ION S. ANTONIU
H. ALBERT

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTROTEHNICA

CHESTIUNI SPECIALE

EDIȚIA A II-a

EDITURA ENERGETICĂ DE STAT

Scanned with OKEN Scanner

Dr. Ing. ION S. ANTONIU
Ing. HERMINA ALBERT

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTROTEHNICĂ

CHESTIUNI SPECIALE

EDIȚIA II-a

REVĂZUTĂ ȘI ADĂUGITĂ



EDITURA ENERGETICĂ DE STAT

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA LA EDIȚIA II-a

Trecerea dela nivelul primelor cercetări organizate și până la nivelul cunoștințelor noastre actuale asupra fenomenelor electromagnetice, evoluția dela modesta pilă a lui Volta și până la centralele electrice de azi, evoluția dela primele experiențe ale acțiunilor electrodinamice efectuate de Ampère și până la aplicațiile electromecanice actuale, evoluția dela enunțarea principiului lui Lenz și până la realizarea mașinilor de inducție pe baza acestui principiu sub diversele lui forme, evoluția dela enunțarea lui Maxwell a existenței și deplasării undelor electromagnetice și până la realizările în radiotransmisiune, toate aceste cuceriri au depășit orice prevedere inițială.

Aceleași progrese se constată și în domeniul realizărilor de transport și distribuția energiei electrice cât și al mașinilor și aparatajului respectiv, constituind desigur unul dintre capitolele cele mai importante ale electrotehnicii.

Progresul continuu realizat în acest domeniu, atât din punct de vedere al cantității de energie distribuită, cât și al distanței de transport, au scos în evidență o serie de fenomene complexe, la început neobservate și ignorate, dar care azi nu se mai pot neglija.

Dacă fenomenele tranzitorii, fenomenele de desechilibraj, fenomenele deformante, nu apăreau decât ca o simplă curiozitate științifică pe circuite de cercetări sau pe micile rețele, funcționând sub tensiune joasă și în regim de puteri reduse, cu totul alta este situația în actualele condiții de extensiune a marilor electrificări, în care aceste fenomene, prin manifestările lor, de data aceasta sunt departe de a mai putea fi neglijate.

Aprofundarea studiului acestor fenomene a condus la elaborarea de teorii noi. Astfel a fost elaborată teoria coordonatelor simetrice necesare studiului sistemelor dezechilibrate. Deasemenea, funcționarea a o serie de aparate industriale ca, de exemplu: supape electronice, redresoare, inductanțe cu fier saturat, liniile de foarte înaltă tensiune prin efectul corona, conduc la apariția unui regim nesinusoidal, care se intensifică pe măsura extensiunii instalațiilor de electrificare. Eu însumi am considerat mai de mult că astfel de fenomene nu mai pot fi totdeauna neglijate sau tratate prin vechea metodă simplistă a sinusoidelor

Scanned with OKEN Scanner

echivalente. In felul acesta am fost condus la preconizarea studiului unora din manifestările acestor fenomene, prin intermediul proprietăților unei mărimi noi, puterea deformantă, care ne permite a explica o serie de manifestări, care nu mai pot rămâne ignorate și nici studiate satisfăcător prin o simplă asimilare cu un regim sinusoidal.

Pe de altă parte toate aceste fenomene noi au condus la elaborarea și desvoltarea unor noi instrumente matematice superioare de investigație.

Intră în acest domeniu, în special, metodele de calcul prin mărimi complexe, calculul operațional, transformările conforme și altele. Studiul rețelelor a condus la operațiile de calcul prin dispozitive de dipoli, cuadripoli, la introducerea calculului matricial, cum și la o serie întreagă de teoreme și metode noi.

Toate aceste teorii, atât referitoare la fenomenele fizice propriu zise, cât și la metodele de investigație matematică devin azi indispensabile atât cercetătorului teoretician, cât și inginerului practician.

Cunoașterea acestor teorii de o profundă semnificație nu este însă posibilă fără o ilustrare suficientă în domeniul aplicativ.

Acest rol este îndeplinit cu mult succes de Culegerea de probleme de Electrotehnică — Chestiuni speciale — *întocmită de Dr. Ing.* I. S. Antoniu *și Ing.* H. Albert. *Apariția în a doua ediție a acestei lucrări nu mai are nevoe de o recomandare specială Epuizarea în scurt timp a primei ediții a scos în evidență cu prisosință importanța și necesitatea acestei lucrări.*

Autorii, în această a doua ediție, au adus revizuiri și completări importante față de prima ediție. Nu numai numărul problemelor a fost mărit, dar însăși chestiunile tratate au fost completate, atât în cadrul vechilor capitole, cât și prin introducerea unui nou capitol referitor la regimul tranzitoriu în circuite neliniare.

Intregul conținut al acestei lucrări este prezentat la un înalt nivel științific și cu multă competență. Breviarul, atât prin extensiunea sa, cât și prin felul cum e prezentat, dă o interesantă expunere condensată a tuturor proprietăților teoretice la care se referă.

Răspunsurile conțin numeroase indicații și îndrumări de rezolvare însoțite, acolo unde e cazul, de planșe și tabele de calcul.

Intreaga lucrare, prin caracterul său original, umple un gol puternic resimțit în aprofundarea unor importante capitole de Electrotehnică.

Această „Culegere de Probleme" se adresează atât inginerilor cât și cercetătorilor într'un domeniu important teoretic și practic al Electrotehnicii.

Apariția acestei lucrări corespunde, deasemenea, unei necesități de actualitate, când opera de electrificare a țării este în faza realizării.

Prof. C. BUDEANU

PREFAȚĂ LA EDIȚIA I

Studiul unei discipline teoretice este fructuos dacă este complectat cu aplicații practice imediate ale diverselor probleme.

Diversele capitole speciale de electrotehnică alcătuesc cursul pe care prof. I. S. Antoniu, unul dintre autori, îl predă de câțiva ani la Facultățile de Energetică și de Electrotehnică ale Institutului Politehnic din București. Deși problemele tratate sunt de natură pur teoretică, ele au totuși o aplicare imediată în practică. Pentru a întări afirmația de mai sus este suficient a cita capitolele privind circuitele echivalente, analiza armonică sau calculul scurtcircuitelor în rețelele electrice.

Problemele cuprinse în această culegere reprezintă, în majoritatea lor, aplicațiile ce au fost date la seminariile cursului sau probleme date la examenele parțiale sau la cele generale. Acestea din urmă au fost însemnate cu inițialele IPB (Institutul Politehnic București) indicându-se și anul când a fost dată problema.

Problemele din această culegere sunt, în majoritatea lor, alcătuite de autori, cu elemente practice luate din tratate sau din practică. Literatura sovietică a fost izvorul de inspirație cel mai fecund, atât prin problemele cu conținut interesant ce se găsesc în culegerile de probleme ce au putut fi consultate, cât și prin problemele teoretice cuprinse în tratatele speciale de mașini electrice, rețele electrice, electrotehnică generală, etc. Dintre autorii care au fost consultați cităm: Crug, Neiman și Calantarov, Costenco, Atabecov, colectivul Crug, Lomonosov, Perecalin, Polivanov, Aronson, Mansurov și Popov, Contorovici, Gutenmaher, etc.

Planul ales de autori în alcătuirea acestei culegeri, este identic cu planul cursului corespunzător. Forma aleasă, care constă în a enunța problemele și a da numai indicații de rezolvare și rezultate, fără a urmări firul complect al rezolvării, a fost inspirată de culegerile de probleme publicate de Gazeta Matematică. Autorii o socotesc pe aceasta cea mai bună, deoarece dă posibilitatea celui care o studiază să judece și să aleagă metoda

cea mai potrivită rezolvării problemei propuse. O culegere de probleme este menită să completeze un curs teoretic, dar nu să-l substitue. Totuși, pentru a veni în ajutorul cititorului, culegerea de probleme este precedată de un breviar al cursului corespunzător, cuprinzând, fără demonstrație, toate noțiunile necesare atacării oricărei probleme din culegere.

Atât breviarul cât și enunțurile și răspunsurile, sunt împărțite în următoarele cinci părți:

Partea I: *Studiul circuitelor electrice în curent alternativ, cuprinzând* **177** *probleme.*

Partea II: *Studiul regimului deformant, cuprinzând* **102** *probleme.*

Partea III: *Studiul regimului desechilibrat, cuprinzând* **77** *probleme.*

Partea IV: *Studiul regimului tranzitoriu, cuprinzând* **54** *probleme.*

Partea V: *Utilizarea calculului matricial în electrotehnică, cuprinzând* **40** *probleme.*

Culegerea conține deci **450** *probleme. Ținând seama că multe din ele pot fi rezolvate pe mai multe căi, practic, culegerea conține un număr mult mai mare de probleme. Autorii recomandă cititorilor să procedeze în acest mod, determinând astfel care este soluția cea mai potrivită, atât prin simplitate cât și prin rezultatele și concluziile ce se pot trage. Autorii recomandă deasemenea ca soluțiile numerice să fie conduse până la capăt.*

Tabelele numerice ce însoțesc culegerea sunt menite să ajute pe cititor în rezolvarea chestiunilor numerice ale problemelor.

Cu toată străduința depusă, se poate să se fi strecurat unele erori, mai ales la soluții. Cititorii sunt rugați să le semnaleze pentru a se face eventualele corectări la edițiile viitoare.

Editura așteaptă sugestii asupra îmbunătățirii calității acestei culegeri și chiar asupra chestiunilor interesante ce ar putea figura în această culegere.

AUTORII

TABLA DE MATERII

Scanned with OKEN Scanner


Scanned with OKEN Scanner

CUVÂNT INAINTE

Epuizarea într'un timp extrem de scurt a primei ediții a acestei lucrări a arătat necesitatea ce se simte în literatura tehnică românească de asemenea lucrări, care să pună la îndemâna tehnicienilor un material care să-i poată ajuta la rezolvarea problemelor practice ridicate de preducție, iar studenților, o posibilitate de a-și complecta cunoștințele teoretice.

Lucrarea se adresează și tuturor acelora care doresc să-și completeze cunoștințele teoretice cu chestiunile speciale de electrotehnică și care au o mare contingență cu toate problemele delicate ridicate de producție.

Călăuziți de experiența câștigată în utilizarea culegerii de probleme atât la Institutul Politehnic din București, cât și la Institutul de Mine din București, precum și de sugestiile primite dela cititori, lucrarea a fost revăzută atât in ce privește conținutul cât și ordinea de prezentare a materiei. Astfel, a fost introdus un capitol nou al regimurilor tranzitorii în circuitele neliniare, au fost introduse 175 probleme noi, au fost revizuite unele soluții și au fost date complectări și precizări în breviar.

S'a căutat ca noile probleme să fie cât mai strâns legate de practică. Este evident că materialul cules nu epuizează totalitatea problemelor puse de practică. El poate constitui, totuși, un îndreptar cu ajutorul căruia să se poată găsi mai ușor soluția la problema studiată și care ar putea avea o analogie cu vreuna din culegere.

A fost schimbat tabelul de corespondență dintre funcțiile imagină și original, punându-l în concordanță cu uzanța actuală din literatura tehnică de specialitate, anume de a se folosi transformarea lui Laplace în locul transformării lui Carson. Formulele date sunt în general suficiente pentru a rezolva cu ajutorul lor aproape toate problemele din practică.

Deasemenea au fost completate nomogramele de calcul ale diverselor mărimi curente ce apar în electrotehnică. Autorii recomandă cititorilor să le folosească pentru a putea să se deprindă

Scanned with OKEN Scanner

cu utilizarea nomogramelor în practică, ele constituind un prețios instrument în mâna tehnicianului.

O serie de modele de tabele pentru analiza armonică a curbelor nesinusoidale au fost introduse în anexă astfel încât cititorul, dacă va avea de efectuat o asemenea lucrare, să o poată efectua ușor chiar pentru cazurile care nu sunt asemănătoare acelora din culegere.

Culegerea conține acum 625 probleme. Foarte multe din acestea pot fi rezolvate pe mai multe căi, autorii recomandând, și de data aceasta, ca cititorii să atace și să caute să rezolve problema pe toate căile posibile, ducând în fiecare caz în parte calculul soluției până la capăt, prin efectuarea calculelor numerice complete, a reprezentărilor grafice, a epurelor, etc. Numai în felul acesta cititorul poate să-și dea seama, în mod critic, de valoarea unei soluții și de simplificările ce pot fi aduse. In ceeace privește calculele numerice, acestea se vor face cu rigla și cu ajutorul tabelelor numerice. Numai în cazuri extreme, când aproximația dată de riglă ar conduce la rezultate absurde, se va recurge la o mașină de calcul sau la calcule cu mâna.

Este deasemenea foarte instructiv ca, la diversele soluții obținute, dacă este cazul, să se dea și interpretarea fizică corespunzătoare.

Autorii s'au străduit să scoată greșelile de tipar din prima ediție, care puteau denatura spiritul problemei, creând mai ales contradicții între enunț și soluția indicată. Totuși, desigur că asemenea greșeli au mai rămas, mai ales la soluții. Cititorii sunt rugați să le semnaleze pentru a fi corectate în edițiile viitoare.

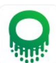
Autorii și editura așteaptă sugestii dela cititori atât asupra îmbunătățirii acestei culegeri, cât și asupra chestiunilor interesante ce ar putea figura în această culegere.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

BREVIAR DE ELECTROTEHNICĂ

CHESTIUNI SPECIALE



Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

STUDIUL CIRCUITELOR IN CURENT ALTERNATIV

1. REPREZENTAREA UNUI VECTOR PLAN PRIN CANTITĂŢI COMPLEXE

(Problemele 1.1—1.43)

1.1. Un vector plan este definit prin *modulul* său, care reprezintă valoarea sa numerică, şi prin *argumentul* său, care determină direcţia suportului său în raport cu o axă luată ca origină de fază (fig. 1). Dacă a şi b sunt proiecţiile sale într'un sistem de axe ortogonale şi dacă j este operatorul de rotaţie cu $+ 90^0$, atunci un vector poate fi reprezentat prin expresia[1])

$$\overline{V} = a + j\,b, \qquad (1)$$

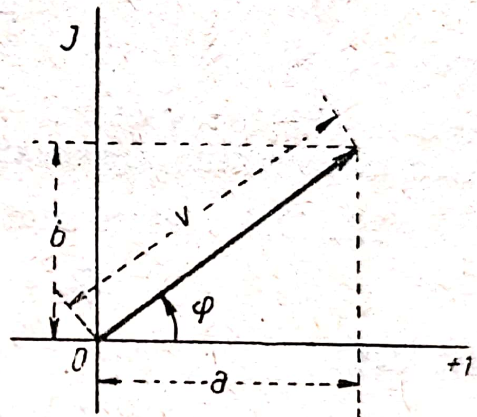


Fig. 1. Vector.

în care a este partea reală şi b este partea complexă a vectorului. Reprezentarea (1) poartă numele de *reprezentare algebrică* a vectorului.

1.2. Pe baza relaţiilor :

$$\left.\begin{aligned} a &= V\cos\varphi \\ b &= V\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

relaţia (1) se poate scrie sub forma

$$V = V\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad (3)$$

care constitue *reprezentarea trigonometrică* a vectorului.

---

[1]) Se convine a se nota un vector, sau o mărime complexă, printr'o literă având o linioară deasupra.

Trecerea dela reprezentarea (1) la reprezentarea (3) se face prin relaţiile

$$V = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

1.3. Ţinând seama de relaţiile lui Euler[1]),

$$\cos \varphi = \frac{\varepsilon^{j\varphi} + \varepsilon^{-j\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\varepsilon^{j\varphi} - \varepsilon^{-j\varphi}}{2j},$$

relaţia (3) se poate scrie sub forma

$$\overline{V} = V \varepsilon^{j\varphi} \tag{5}$$

care constitue *reprezentarea exponenţială.*

1.4. Relaţia (5) se mai scrie

$$\overline{V} = V \underline{|\varphi} \tag{6}$$

care se citeşte: vectorul $\overline{V}$, de modul V şi de argument φ. Aceasta constitue *reprezentarea simbolică.*

1.5. Doi vectori sunt egali dacă

$$V_1 = V_2 \quad \text{şi} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$

sau dacă

$$a_1 = a_2 \quad \text{şi} \quad b_1 = b_2.$$

1.6. Un vector este nul dacă

$$V = 0.$$

sau

$$a = 0 \qquad b = 0$$

1.7. Vectorii

$$\overline{V} = a + jb = V \varepsilon^{j\varphi} = V \underline{|\varphi}$$
$$\overline{V}^{\star} = a - jb = V \varepsilon^{-j\varphi} = V \underline{|-\varphi}$$

se numesc *conjugaţi* unul altuia.

---

[1]) Se convine a se nota cu ε baza logaritmilor neperieni pentru a nu se confunda cu e forţa electromotoare, analog cum se convine a se nota $j = \sqrt{-1}$ pentru a nu se confunda cu i curentul electric.

2. OPERAŢII CU VECTORI

(Problemele 2.1—2.52)

2.1. Adunarea algebrică. Suma algebrică a vectorilor

$$\overline{V}_1 = a_1 + jb_1 \quad \text{şi} \quad \overline{V}_2 = a_2 + jb_2$$

este

$$\overline{V} = \overline{V}_1 \pm \overline{V}_2 = (a_1 \pm a_2) + j\,(b_1 \pm b_2).$$

In general

$$\overline{V} = \sum_1^n \overline{V}_i = \sum_1^n a_i + j \sum_1^n b_i.$$

Dacă vectorii sunt daţi sub forma (5) sau (6), se trece la forma (1) cu ajutorul relaţiilor (2) şi se face suma, după care se revine la forma iniţială prin relaţiile (4).

Grafic, adunarea a doi sau mai mulţi vectori se face folosind regula paralelogramului.

2.2. Inmulţirea vectorilor[1]. Se defineşte *produsul algebric* a doi vectori prin expresia

$$\overline{V} = \overline{V}_1 \cdot \overline{V}_2 = V \underline{|\varphi}$$

Dacă [2])

$$\overline{V}_1 = V_1 \underline{|\varphi_1}$$

şi

$$\overline{V}_2 = V_2 \underline{|\varphi_2}$$

atunci

$$V = V_1 \cdot V_2 \quad \text{şi} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Grafic, produsul a doi vectori se face astfel (fig. 2): se uneşte vârful vectorului $\overline{V}_1$, cu vârful unui vector *unitar* luat

---

[1]) In cele ce urmează nu este vorba de produsul *scalar* sau *vectorial* a doi vectori ci de produsul *algebric*, definit mai sus.

[2]) $\overline{V}_1$ şi $\overline{V}_2$ pot avea oricare din formele (1), (3) sau (5), obţinându-se în aceste cazuri produsul sub formele:

$$(a + jb)\,(c + jd) = ac - bd + j\,(ad + bc)$$

$$V_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\, V_2\,(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = V_1 V_2\,[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$V_1 \varepsilon^{j\varphi_1}\, V_2\, \varepsilon^{j\varphi_2} = V_1 \cdot V_2\, \varepsilon^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

pe axa ce foloseşte de origină de fază, obţinându-se triunghiul $O1V_1$. Pe vectorul $\overline{OV_2}$ se construeşte un triunghi asemenea cu acesta, latura $\overline{OV_2}$ fiind omoloagă lui $\overline{O1}$. Latura $\overline{OV}$, omoloagă laturii $\overline{OV_1}$, reprezintă vectorul produs.

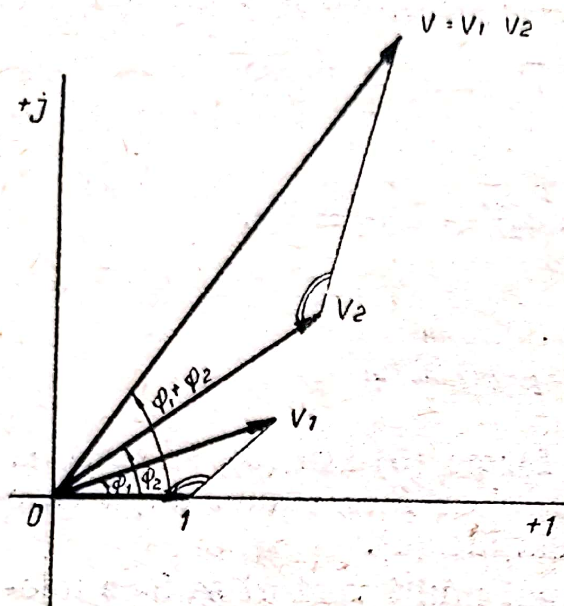


Fig. 2. Efectuarea grafică a produsului a doi vectori

2.3. Impărţirea vectorilor. Se defineşte câtul algebric a doi vectori, expresia

$$\overline{V} = \frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = V \underline{|\varphi}$$

în care [1])

$$V = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{şi} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

Grafic, câtul a doi vectori se face astfel (fig. 3) : se uneşte vârful vectorului împărţitor cu vârful vectorului unitar obţinându-se triunghiul $O1V_2$. Pe vectorul de împărţit $\overline{OV_1}$ se construeşte triunghiul asemenea OVV_1, $\overline{OV_1}$ fiind omologul lui OV_2. Latura $\overline{OV}$, omoloaga laturii $\overline{O1}$, reprezintă vectorul cât.

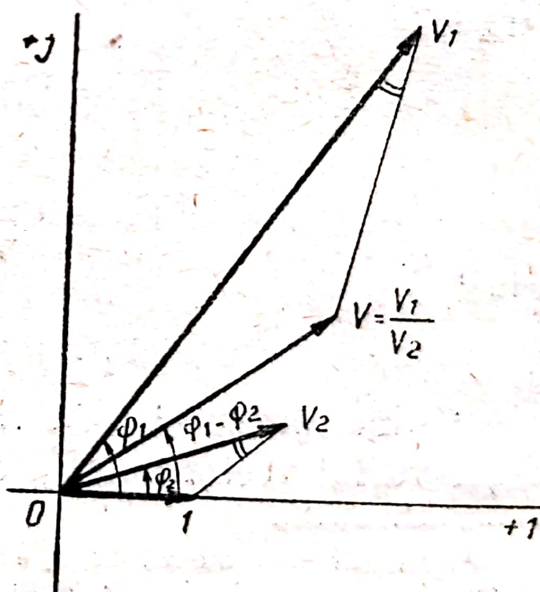


Fig. 3. Efectuarea grafică a câtului a doi vectori.

2.4. Ridicarea la putere şi extragerea rădăcinii. Ridicarea unui vector $\overline{V} = V \underline{|\varphi}$ la o putere n, n fiind un număr oarecare întreg sau fracţionar, este definită prin expresia

$$(\overline{V})^n = V^n \underline{|n\varphi}$$

2.5. Diferenţierea şi integrarea vectorilor. Fie vectorul

$$\overline{V} = V \underline{|\varphi}$$

---

1) Vectorii $\overline{V_1}$ şi $\overline{V_2}$ pot avea oricare din formele (1), (3) sau (5), obţinându-se expresii corespunzătoare pentru cât.

Derivata acestui vector este definită prin relația:

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = j\,\frac{d\varphi}{dt}\,\overline{V}$$

și derivata de ordinul n

$$\frac{d^n\overline{V}}{dt^n} = \left(j\,\frac{d\varphi}{dt}\right)^n \overline{V}.$$

Integrala acestui vector este definită de expresia

$$\int_0^t \overline{V}\,dt = -j\,\frac{\overline{V}}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}.$$

3. REPREZENTAREA FUNCȚIILOR SINUSOIDALE PRIN CANTITĂȚI COMPLEXE. LEGILE LUI OHM ȘI KIRCHHOFF

(Problemele 3.1—3.45)

3.1. Unei funcții sinusoidale

$$y = A\sqrt{2}\,\cos(\omega t + \varphi) \tag{7}$$

i se poate asocia un vector în plan de forma

$$\overline{Y} = A\,\underline{|\omega t + \varphi}. \tag{8}$$

Funcția sinusoidală y poate fi considerată ca proecția pe axa origină de fază a vectorului $\overline{Y}$, astfel că acest vector poate reprezenta în orice moment funcția sinusoidală dată.

Dacă se aplică mărimii (8) identitatea lui Euler se vede că

$$y = \sqrt{2}\,\Re(\overline{Y}).$$

Ca o consecință, rezultă că vectorul (8) poate reprezenta și funcția

$$y' = A\sqrt{2}\,\sin(\omega t + \varphi) \tag{9}$$

pentru care

$$y' = \sqrt{2}\,\Im(\overline{Y}).$$

Vectorul (8), având argumentul o funcție de timp, este un vector învârtitor. Prin rotirea sistemului de referință, în acelaşi sens cu aceiaşi viteză ω el devine un vector static.

Scanned with OKEN Scanner

In aceste condiţii, vectorul (8) poate fi exprimat sub forma

$$\overline{Y} = A \underline{|\varphi} = A\, \varepsilon^{j\varphi} = A\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad (10)$$

argumentul ωt fiind subînţeles.

Oricare ar fi forma funcţiei sinusoidale reprezentată prin vectori învârtitori în plan, utilizarea acestora la studiul circuitelor electrice în curent alternativ se face în acelaşi mod. Singura grijă ce trebueşte avută este de a ţine seama, la trecerea dela cantităţi complexe la cantităţi instantanee, de convenţia de reprezentare care s'a adoptat: vectorul (8) respectiv (10) a fost asociat unei funcţii sinusoidale de forma (7) sau unei funcţii sinusoidale de forma (9)

In această lucrare s'a convenit a se asocia vectorul (8), respectiv (10), funcţiei sinusoidale (7).

3.2. Două mărimi sinusoidale alternative sunt identice dacă în orice moment au aceeaşi fază şi aceeaşi amplitudine. **Mărimile complexe care le reprezintă au acelaşi modul şi acelaşi argument.**

3.3. O ecuaţie integro-diferenţială scrisă între mărimi sinusoidale (funcţii de timp de aceeaşi pulsaţie ω), poate fi transformată într'o ecuaţie algebrică între mărimile complexe reprezentând funcţiile sinusoidale corespunzătoare, asupra cărora s'au efectuat operaţiile de derivare şi integrare. Exemplu, ecuaţia

$$u = e + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1\, dt + M\frac{di_2}{dt}$$

se transformă în

$$\overline{U} = \overline{E} + R\overline{I}_1 + j\,\omega\, L\overline{I}_1 + \frac{1}{jC\omega}\overline{I}_1 + j\,\omega\, M\overline{I}_2.$$

3.4. Trecerea dela o ecuaţie în cantităţi complexe, la ecuaţia între valori instantanee, se face procedând în sens invers. Exemplu ecuaţia

$$\overline{U} = \overline{Z}_1\overline{I}_1 + \overline{Z}_2\overline{I}_2$$

se scrie

$$U\,\underline{|\theta} = Z_1 I_1\,\underline{|\psi_1+\varphi_1} + Z_2 I_2\,\underline{|\varphi_2+\psi_2}$$

şi deci, adăogând ωt argumentelor de mai sus, se obţine

$$U\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta) = Z_1 I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_1 + \varphi_1) + $$
$$+ Z_2 I_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi_2 + \varphi_2).$$

3.5. Legea lui Ohm în cantități complexe se exprimă

$$\overline{U} = \overline{Z}\,\overline{I}$$

în care $\overline{Z}$ este impedanța complexă a circuitului, şi care, pentru un circuit serie este

$$\overline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + jX \tag{11}$$

în care R este rezistența circuitului și X reactanța sa.

3.6. Legile lui Kirchhoff, în cantități complexe, se exprimă prin

$$\sum \overline{I} = 0$$

şi

$$\sum \overline{E} = \sum \overline{Z}\,\overline{I}.$$

3.7. Vectorul admitanță. Vectorul

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = G - jB \tag{12}$$

se numeşte vectorul admitanță, în care G este conductanța circuitului și B susceptanța sa. Se găseşte:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \text{şi} \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

şi invers

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad \text{şi} \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

3.8. Puterea în cantități complexe. Fiind dată tensiunea

$$\overline{U} = U\underline{|\alpha}$$

şi curentul

$$\overline{I} = I\underline{|\beta}$$

dacă

$$\varphi = \alpha - \beta$$

este decalajul dintre tensiune și curent, puterea aparentă este dată de relația

$$\bar{S} = UI\,|\underline{\varphi} = U \cdot I|\underline{\alpha - \beta} = \bar{U} \cdot \bar{I}^{\star} = P + jQ.$$

Deci pentru obținerea puterii aparente în curent alternativ se înmulțește vectorul tensiune cu conjugatul vectorului curent; partea reală a produsului reprezintă puterea activă, iar partea complexă reprezintă puterea reactivă.

Puterea aparentă poate fi calculată și cu expresia

$$\bar{S} = \bar{U}^{\star} \cdot \bar{I} = P - jQ,$$

puterea reală fiind aceeași ca și în cazul precedent, iar puterea reactivă trebuind să fie luată cu semnul schimbat.

4. INVERSIUNE. LOCURI GEOMETRICE

(Problemele 4.1—4.33)

4.1. Inversul unui vector se obține inversându-se geometric simetricul acestui vector, față de vectorul reprezentând puterea de inversiune, în raport cu cercul de inversiune. Inversiunea se face prin metoda polarelor reciproce (fig. 4). Acest procedeu este general fie că puterea de inversiune este o mărime reală (simetrizarea se face în raport cu axa reală, obținându-se astfel conjugatul vectorului dat), fie că puterea de inversiune este un vector.

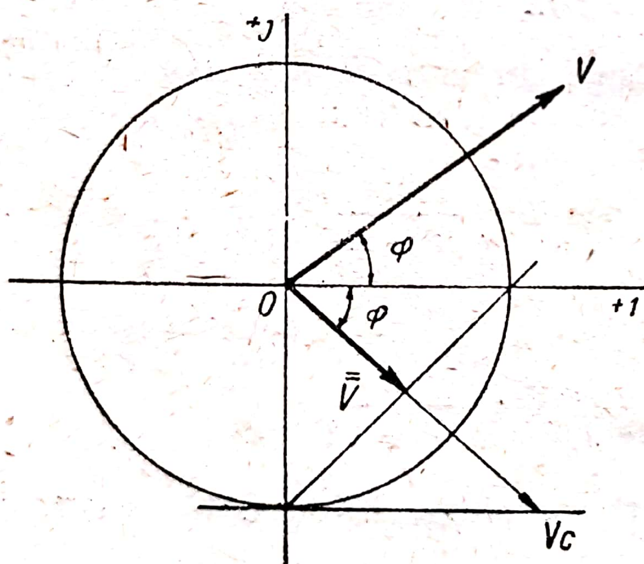


Fig. 4. Inversarea unui vector când puterea de inversiune este reală.

3.2. Se reamintesc următoarele teoreme de inversiune din geometrie:

α) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este chiar pe cerc, este o dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin polul dat. In inversiunea vectorială, dacă puterea de inversiune este un număr real, dreapta inversă este conjugată acestei drepte.

β) Inversul unei drepte date este un cerc ce trece prin polul dat și al cărui diametru corespunzător polului este per-

pendicular pe dreapta inversată. In inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

γ) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este exterior cercului, este tot un cerc, homotetic cu primul în raport cu origina dată. In inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

δ) Inversul unui cerc, când centrul de inversiune este interior cercului, este tot un cerc având centrul pe diametru corespunzător centrului de inversiune. In inversiunea vectorială, cercul invers este simetricul acestui cerc în raport cu axa reală.

4.3. Inversul unui vector, când puterea de inversiune este un număr complex, se obține astfel pe cale grafică (fig. 5): Fie inversiunea

$$\overline{Z}_2 = \frac{\overline{Z}_0^2}{\overline{\overline{Z}}_1}$$

Se construește simetricul vectorului $\overline{Z}_1$ față de vectorul $\overline{Z}_0$ obținându-se vectorul $\overline{Z}'_1$. Se construește cercul de rază Z_0 și se inversează vectorul $\overline{Z}_1'$, față de acest cerc obținându-se vectorul $\overline{Z}_2$ căutat.

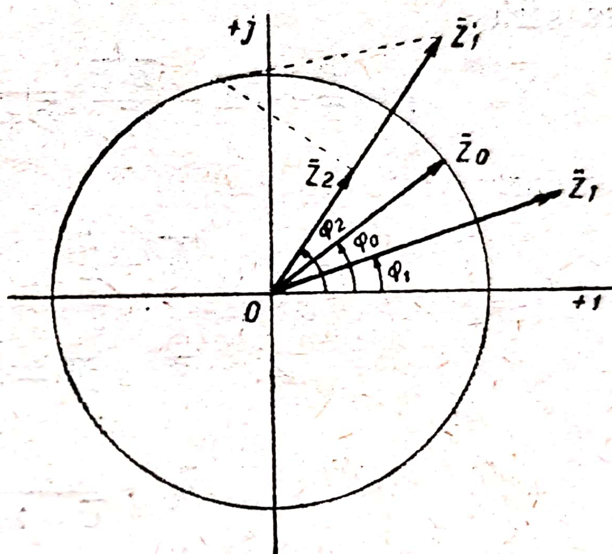


Fig. 5. Inversarea unui vector când puterea de inversiune este un număr complex.

4.4. **Locuri geometrice.** α) $\overline{A}$ și $\overline{B}$ fiind două cantități complexe (doi vectori) și λ un parametru numeric oarecare, locul geometric descris de vârful vectorului $\overline{Z} = \overline{A} + \lambda \overline{B}$ este o dreaptă ce trece prin vârful vectorului $\overline{A}$ și este paralelă cu direcția vectorului $\overline{B}$.

β) Locul geometric al vârfului vectorului

$$\overline{I} = \frac{1}{\overline{A} + \lambda \overline{B}}$$

este un cerc ce trece prin origine și al cărui diametru principal este perpendicular pe conjugata dreptei $(\overline{A} + \lambda \overline{B})$. Dacă $\overline{OP}$

Scanned with OKEN Scanner

este distanţa dela origine la această dreaptă, diametrul cercului este dat de relaţia

$$2r = \frac{k^2}{\overline{OP}}$$

k^2 fiind puterea de inversiune.

γ) Locul geometric al vârfului vectorului

$$\overline{I} = \frac{\overline{A} + \lambda\overline{B}}{\overline{C} + \lambda\overline{D}} \tag{13}$$

este un cerc în planul complex care se obţine astfel: Relaţia (13) se scrie

$$\overline{I} = \frac{\overline{B}}{\overline{D}} + \left(\overline{A} - \frac{\overline{B}\cdot\overline{C}}{\overline{D}}\right)\frac{1}{\overline{C} + \lambda\overline{D}} = \overline{M} + \overline{N}\cdot\overline{I}_0$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{\overline{B}}{\overline{D}} \\ \overline{N} &= \overline{A} - \frac{\overline{B}\cdot\overline{C}}{\overline{D}} \\ \overline{I}_0 &= \frac{1}{\overline{C} + \lambda\overline{D}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Se construeşte cercul $\overline{I}_0$. Se înmulţeşte apoi acest cerc cu vectorul $\overline{N}$, ceeace se realizează înmulţind diametrul cu modulul acestui vector şi rotind acest diametru cu argumentul corespunzător. Se adună apoi, fiecărui punct al cercului, vectorul $\overline{M}$. Rotirea diametrului şi deplasarea cercului se pot obţine deplasând originea axelor de coordonate în vârful vectorului $-\overline{M}$ şi rotind aceste axe în sens contrar celui al argumentului vectorului $\overline{N}$.

δ) Ecuaţia (13) poate fi pusă şi sub forma

$$\overline{I} = \overline{F} + \overline{R}\,|\underline{\varphi}$$

în care

$$\overline{F} = \frac{\overline{A}\cdot\overline{D}_c - \overline{B}\cdot\overline{C}_c}{\overline{C}\cdot\overline{D}_c - \overline{C}_c\cdot\overline{D}} \quad \text{şi} \quad \overline{R} = \frac{\overline{B}\cdot\overline{C} - \overline{A}\cdot\overline{D}}{\overline{C}\cdot\overline{D}_c - \overline{C}_c\cdot\overline{D}}.$$

Observaţie. Locurile geometrice pot fi obţinute şi sub formă analitică, efectuându-se calculele care duc la exprimarea parametrică a ecuaţiei lor.

Scanned with OKEN Scanner

4.5. Despre scări. Calculele grafice, trebue să fie însoțite de scări pentru a putea fi utilizate. Corespondența între diversele scări, în cazul înmulțirii, împărțirii și inversiunii, se obține cu ajutorul modulelor scărilor, aplicându-se formulele de definiție ale diverselor operații. Astfel, pentru un produs

$$\overline{V} = \overline{Z} \times \overline{I}$$

se pornește dela relația

$$\frac{\overline{U}}{\overline{Z}} = \frac{\overline{I}}{\overline{1}}$$

și se deduce relația dintre module

$$[u] = \frac{[z]\cdot[i]}{[c]},$$

c reprezentând modul unității

5. STUDIUL CIRCUITELOR CU AJUTORUL CANTITĂȚILOR COMPLEXE. DIPOLI. CUADRIPOLI. METODE DE CALCUL. CIRCUITE ECHIVALENTE

(Problemele 5.1—5.64)

5.1. Dipolul este circuitul electric format dintr'o se ie de impedanțe (care pot fi reduse la o impedanță unică echivalentă $\overline{Z}$) cuprinse între două borne, una de intrare și alta de ieșire (fig. 6). Dacă dipolul nu cuprinde între cele două borne ale sale nici un fel de sursă de energie și dacă intre bornele de intrare și de ieșire ale dipolului nu există nici o legătură electrică sau magnetică, este numit *dipol pasiv*. Tensiunile de intrare și de ieșire ale unui dipol se raportează întotdeauna la o aceiași origine comună.

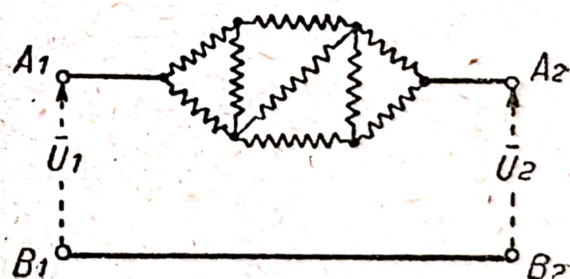


Fig. 6. Dipol.

Ecuația unui dipol pasiv este

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2 + \overline{Z}\,\overline{I}. \qquad (15)$$

5.2. Diagramele dipolului. α) *Diagrama de tensiune.* Se obține construindu-se relația (15) în care se ia $\overline{U}_2$ ca origine

de fază (fig. 7). In această diagramă s'a luat $\overline{U}_1 = U_1 \underline{|\theta}$, $\overline{U}_2 = U_2 \underline{|0}$, $\overline{Z} = Z \underline{|\psi}$ şi $\overline{I} = I \underline{|-\varphi}$.

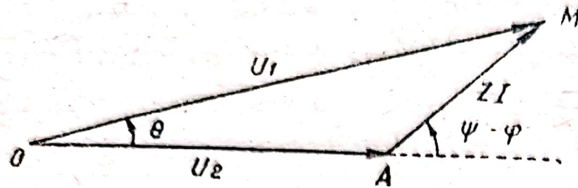


Fig. 7. Diagrama de tensiune a dipolului.

β) *Diagrama de putere sau cu doi poli de tensiune sau a cercului.* Cu aceleaşi notaţii ca mai sus, puterea aparentă *dată* dipolului (la borna de intrare) şi cea *primită* dela dipol (la borna de ieşire), au următoarele expresii:

$$\left.\begin{aligned} \overline{S}_1 &= P_1 + jQ_1 = \overline{U}_1 \overline{I}^* = \frac{U_1^2}{Z} \underline{|\psi} - \frac{U_1 U_2}{Z} \underline{|\psi+\theta} \\ \overline{S}_2 &= P_2 + jQ_2 = \overline{U}_2 \overline{I}^* = \frac{U_1 U_2}{Z} \underline{|\psi-\theta} - \frac{U_2^2}{Z} \underline{|\psi} \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Diagrama cercului se obţine construind aceste relaţii (fig. 8).

5.3. Cuadripolul este circuitul electric format dintr'o grupare oarecare de impedanţe, cuprinsă între *două* borne de in-

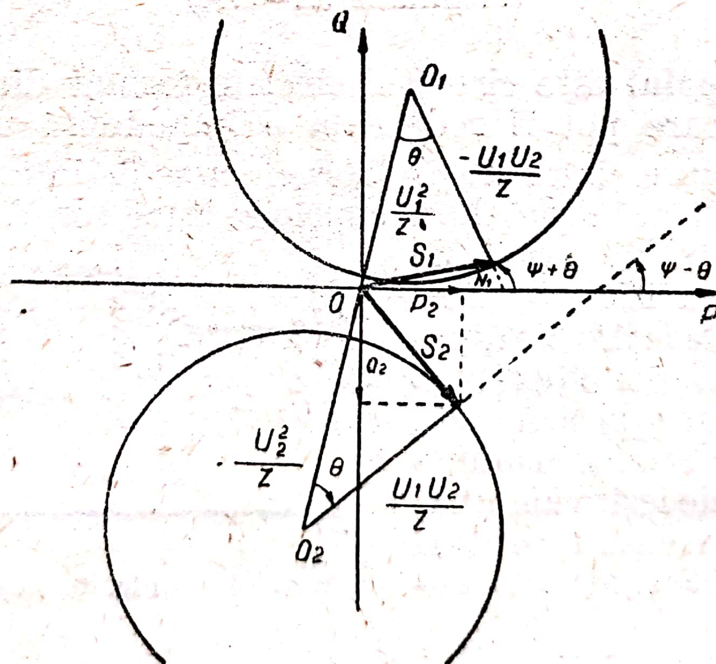


Fig. 8. Diagrama cercului dipolului.

trare şi *două* borne de ieşire. Dacă între aceste patru borne nu există nici o sursă de energie electrică şi dacă între bornele

de intrare şi de ieşire ale cuadripolului nu există nici o legătură electrică sau magnetică, cuadripolul este numit pasiv.

Ecuaţiile unui cuadripol pasiv sunt

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}\,\overline{U}_2 + \overline{B}\,\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 &= \overline{C}\,\overline{U}_2 + \overline{D}\,\overline{I}_2 \\ \overline{A}\,\overline{D} - \overline{B}\,\overline{C} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Coeficienţii cuadripolului pot fi determinaţi experimental printr-o probă de mers în gol ($\overline{I}_2 = 0$). şi una de scurt circuit ($\overline{U}_2 = 0$) la eşire şi o probă de mers în gol cuadripolul fiind alimentat pela eşire ($\overline{I}_1 = 0$). Dacă $\overline{Z}_{10}$, $\overline{Z}_{1sc}$ şi $\overline{Z}_{20}$ sunt impedanţele aparente corespunzătoare, se obţine:

$$\left.\begin{aligned} &\overline{A} = \overline{Z}_{10}\overline{C}\,; \quad \overline{B} = \overline{Z}_{1sc}\,\overline{D}\,; \\ &\overline{C} = \frac{1}{\sqrt{\overline{Z}_{20}\,(\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc})}}\,; \quad \overline{D} = \sqrt{\frac{\overline{Z}_{20}}{\overline{Z}_{10} - \overline{Z}_{1sc}}} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

În cazul unui cuadripol simetric $\overline{A} = \overline{D}$.

5. 4. Circuitul *T* echivalent unui cuadripol oarecare (fig. 10). Dacă $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$, sunt constantele unui cuadripol oarecare, impedanţele corespunzătoare circuitului *T* echivalent se determină cu ajutorul relaţiilor:

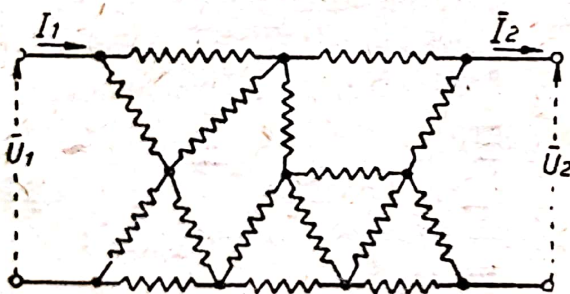


Fig. 9. Cuadripolul.

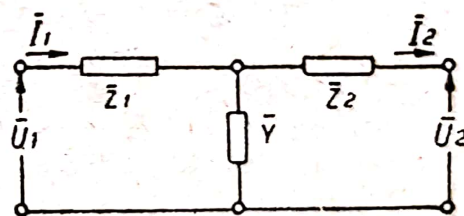


Fig. 10. Circuitul T echivalent.

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{A} - 1}{\overline{C}}\,; \quad \overline{Z}_2 = \frac{\overline{D} - 1}{\overline{C}}\,; \quad \overline{Y} = \overline{C}. \qquad (19)$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în T dat, sunt date de relațiile:

$$\overline{A}=1+\overline{Z}_1\overline{Y}\ ;\quad \overline{B}=\overline{Z}_1+\overline{Z}_2+\overline{Z}_1\overline{Z}_2\overline{Y}\ ;\quad \overline{C}=\overline{Y}\ ;\quad \overline{D}=1+\overline{Z}_2\overline{Y}. \tag{20}$$

5.5. Circuitul Π echivalent unui cuadripol oarecare (fig. 11). Impedanțele corespunzătoare circuitului Π echivalent se determină cu ajutorul relațiilor

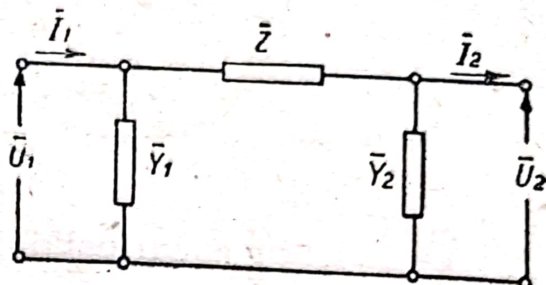


Fig. 11. Circuitul π echivalent.

$$\overline{Z}=\overline{B}\ ;\quad \overline{Y}_1=\frac{\overline{D}-1}{\overline{B}}\ ;\quad \overline{Y}_2=\frac{\overline{A}-1}{\overline{B}}. \tag{21}$$

Reciproc, constantele generale ale unui cuadripol în Π dat, sunt date de relațiile

$$\overline{A}=1+\overline{Z}\overline{Y}_2\ ;\ \overline{B}=\overline{Z}\ ;\ \overline{C}=\overline{Y}_1+\overline{Y}_2+\overline{Z}\overline{Y}_1\overline{Y}_2\ ;\overline{D}=1+\overline{Z}\overline{Y}_1. \tag{22}$$

5.6. Diagramele cuadripolului. α) *Diagrama de tensiune.* Se obține construindu-se dubla egalitate

$$\overline{U}_1=\overline{A}\,\overline{U}_2+\overline{B}\,\overline{I}_2=$$
$$=\frac{\overline{U}_2}{\overline{D}}+\frac{\overline{B}}{\overline{D}}\overline{I}_1, \tag{23}$$

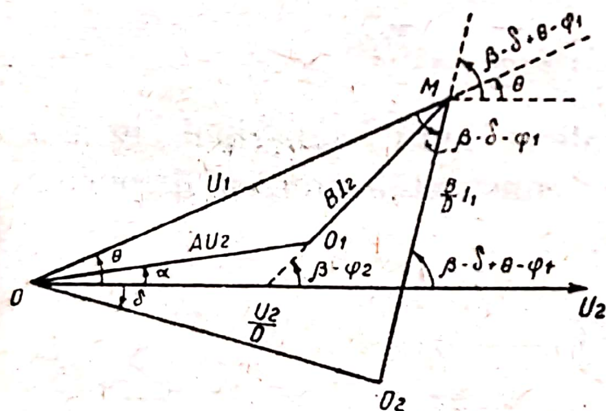


Fig. 12. Diagrama de tensiune a cuadripolului.

dedusă din relațiile (17), în care se ia $\overline{U}_2$ ca origine de fază (fig. 12). In această diagramă s'a luat $\overline{U}_1 = U_1\,\underline{|\theta}$; $\overline{I}_1 = I_1\,\underline{|\theta-\varphi_1}$; $\overline{I}_2 = I_2\,\underline{|-\varphi_2}$; $\overline{A} = A\,\underline{|\alpha}$; $\overline{B}=B\,\underline{|\beta}$ și $\overline{D} = D\,\underline{|\delta}$.

β) *Diagrama de putere* sau *diagrama cu doi poli de tensiune* sau *diagrama cercului.* Cu aceleași notații ca mai sus, puterea aparentă la *intrarea* în cuadripol și cea la *ieșirea* din cuadripol sunt date de relațiie:

$$\left.\begin{aligned}\overline{S}_1 &= \frac{D}{B}U_1^2\,\underline{|\beta-\delta}-\frac{U_1U_2}{B}\,\underline{|\theta+\beta}\\ \overline{S}_2 &= \frac{U_1U_2}{B}\,\underline{|\beta-\theta}-\frac{A}{B}U_2^2\,\underline{|\beta-\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Diagrama cercului se obține construind aceste relații (fig. 13).

5.7. Calculul circuitelor. Circuitele electrice de curent alternativ se calculează, în regim permanent, ca și cele de curent

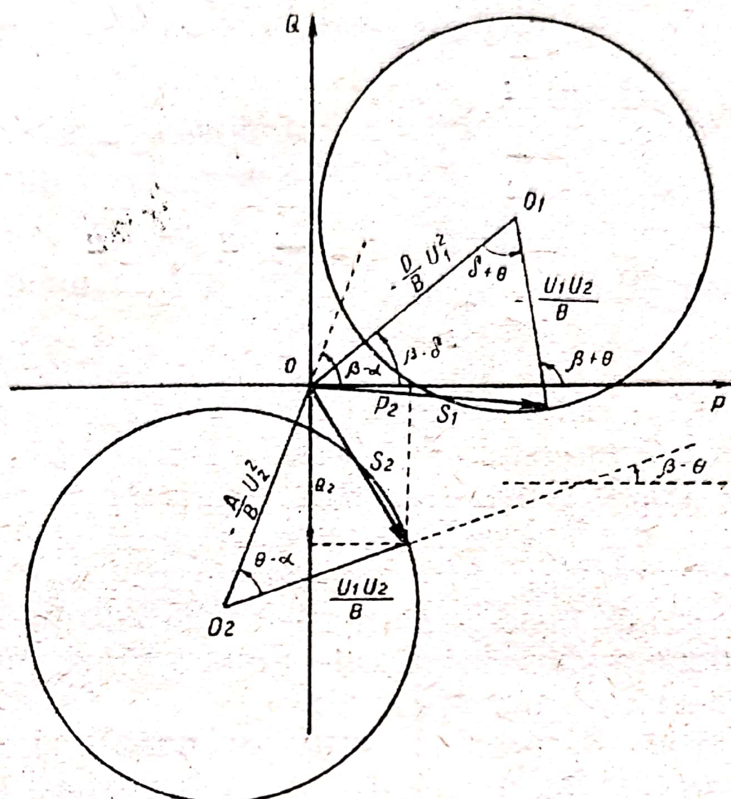


Fig. 13. Diagrama cercului cuadripolului.

continuu, dacă se utilizează cantitățile complexe. Metodele de calcul sunt următoarele:

α) *Aplicarea celor două legi ale lui Kirchhoff*:

$$\text{Prima lege} \quad \sum \overline{I} = 0$$

dă $(n-1)$ ecuații, n fiind numărul de noduri;

$$\text{A doua lege} \quad \sum \overline{E} = \sum \overline{Z}\overline{I}$$

dă $(l - n + s)$ ecuații, l fiind numărul de laturi și s numărul de subrețele.

β) *Descompunerea în circuite independente* (Maxwell): Orice circuit electric poate fi descompus în

$$b = l - n + s$$

circuite independente, l, n și s având semnificațiile de mai sus.

Determinarea celor b curenți independenți se face prin sistemul de ecuații

$$\overline{Z}_l \overline{I}_1 + \overline{Z}_{l2}\overline{I}_2 \ldots + \overline{Z}_{ll}\overline{I}_l + \ldots + \overline{Z}_{lb}\overline{I}_b = \overline{E}_l \qquad (l = 1,2 \ldots b)$$

în care $\overline{Z}_{ll}$ este impendanța totală a ochiului străbătut de curentul $\overline{I}_l$

$\overline{Z}_{li}$ este impedanța comună ochiului străbătut de curentul $\overline{I}_l$ și ochiului străbătut de curentul $\overline{I}_i$

(Pentru fiecare ecuație în parte $\sum \overline{Z}_{li} = \overline{Z}_{ll}$ și $\overline{Z}_{il} = \overline{Z}_{li}$)

$\overline{E}_l$ f.e.m. totală care acționează în ochiul străbătut de curentul $\overline{I}_l$

Curenții reali din laturi se obțin prin însumarea algebrică a curenților independenți care străbat latura respectivă.

γ) *Metoda perechilor de noduri.* Două noduri oarecare, alese arbitrar într'o rețea, formează o *pereche de noduri.* Fixarea arbitrară a unei perechi de noduri pune problema găsirii diferenții de potențial între aceste noduri, iar cunoașterea acestei tensiuni dă posibilitatea găsirii curentului care circulă prin orice element care leagă cele două noduri. Metoda perechilor de noduri este următoarea:

— Se alege în rețeaua dată un număr de $p = n - 1$ perechi de noduri independente, arbitrar alese.

— Se presupune că, la fiecare din aceste perechi de noduri există o diferență de potențial $\overline{E}$ având un anumit sens de polaritate.

— Pentru fiecare nod în parte se scrie prima lege a lui Kirchhoff. Se va obține astfel un sistem de p ecuații lineare de forma

$$\overline{Y}_{N1}\overline{E}_1 + \overline{Y}_{N2}\overline{E}_2 + \ldots + \overline{Y}_{Nn}\overline{E}_n = \overline{I}_n \qquad (N = 1,2,\ldots,p)$$

în care $\overline{Y}_{Nn}$ reprezintă admitanța laturei care unește perechea de noduri Nn iar $\overline{E}_n$ tensiunea independentă dela bornele acestei perechi de noduri.

— Se rezolvă acest sistem de ecuații astfel obținut, determinându-se tensiunile $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$.

— Se determină potențialul celorlalte noduri în raport cu acestea.

— Curenții din laturile rețelei se determină apoi aplicând legea lui Ohm fiecărui element în parte.

Pentru a se putea aplica această metodă trebuesc transformate sursele de tensiune în surse de curent.

O sursă de tensiune având în serie o impedanță $\overline{Z}$ se poate transforma într'o sursă de curent având în paralel o admitanță $\overline{Y}$ (fig. 14). Din această figură rezultă imediat

$$\overline{V} = \overline{E} - \overline{Z}\,\overline{I}_t \qquad \text{și} \qquad \overline{I}_t = \overline{I} - \overline{Y}\,\overline{V}_t$$

$$I_t = \frac{\overline{E} - \overline{V}_t}{Z}\,\overline{I} - \overline{Y}\,\overline{V}_t \qquad \overline{V}_t = \frac{\overline{I} - \overline{I}_t}{\overline{Y}} = \overline{E} - \overline{Z}\,\overline{I}_t$$

δ) *Suprapunerea efectelor*: Intensitatea curentului într'o ramură oarecare a unei rețele electrice liniare, având un număr oarecare de forțe electromotoare, este egală cu suma curenților ce ar fi produși în acea ramură de fiecare forță electromotoare lucrând independent.

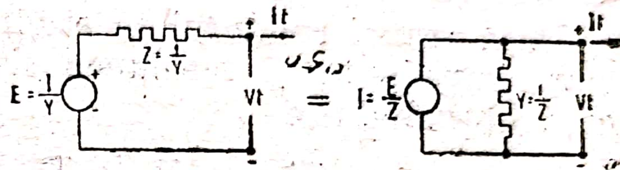


Fig. 14. Transformarea unei surse de tensiune într'o sursă de curent.

ε) *Teorema reciprocității* (Maxwell): Dacă o forță electromotoare $\overline{E}_{AB}$ lucrând în latura AB produce un curent $\overline{I}_{CD}$ în latura CD, reciproc, o forță electromotoare $\overline{E}_{CD}$, egală cu precedenta în mărime și în fază, introdusă în latura CD, produce în latura AB un curent $\overline{I}_{AB}$ egal, în mărime și fază, cu precedentul.

ζ) *Teorema lui Thévenin*: Dacă două puncte A și B ale unei rețele, având potențialele $\overline{V}_A$ și $\overline{V}_B$ sunt legate printr'un conductor de impedanță $\overline{Z}_{AB}$, acest conductor va fi străbătut de curentul

$$\overline{I}_{AB} = \frac{\overline{V}_A - \overline{V}_B}{\overline{Z}_{AB} + \overline{Z}_R}$$

în care $\overline{Z}_R$ este impedanța rețelei, măsurată între punctele A și B înainte de a introduce impedanța $\overline{Z}_{AB}$.

η) *Transfigurarea circuitelor*: Un circuit în stea poate fi transformat prin transfigurare într'un circuit în triunghi și reciproc. Dacă $\overline{Z}_{AO}$, $\overline{Z}_{BO}$, $\overline{Z}_{CO}$, sunt impedanțele ramurilor stelei și $\overline{Z}_{AB}$, $\overline{Z}_{BC}$, $\overline{Z}_{CA}$ sunt impedanțele laturilor triunghiului, relațiile de transformare sunt

$$\overline{Z}_{AO} = \frac{\overline{Z}_{CA}\,\overline{Z}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{BC}+\overline{Z}_{CA}};\ \overline{Z}_{BO} = \frac{\overline{Z}_{AB}\,\overline{Z}_{BC}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{BC}+\overline{Z}_{CA}};\ \overline{Z}_{CO} = \frac{\overline{Z}_{BC}\,\overline{Z}_{CA}}{\overline{Z}_{AB}+\overline{Z}_{BC}+\overline{Z}_{CA}};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\overline{Z}_{AB}=\frac{\overline{Z}_{A0}\overline{Z}_{B0}+\overline{Z}_{B0}\overline{Z}_{C0}+\overline{Z}_{C0}\overline{Z}_{A0}}{\overline{Z}_{C0}};\ \overline{Z}_{BC}=\frac{\overline{Z}_{A0}\overline{Z}_{B0}+\overline{Z}_{B0}\overline{Z}_{C0}+\overline{Z}_{C0}\overline{Z}_{A0}}{\overline{Z}_{A0}};$$

$$\overline{Z}_{CA}=\frac{\overline{Z}_{A0}\overline{Z}_{B0}+\overline{Z}_{B0}\overline{Z}_{C0}+\overline{Z}_{C0}\overline{Z}_{A0}}{\overline{Z}_{B0}}.$$

5.8. Circuitele echivalente ale maşinilor electrice.

α) *Circuitul echivalent al transformatorului.* Circuitul electromagnetic al unui transformator se transformă într'un circuit electric echivalent de forma unui cuadripol în T, în care $\overline{Z}_1$ este impedanţa circuitului primar, $\overline{Z}_2$ este impedanţa circuitului secundar şi $\overline{Y}$ este admitanţa corespunzătoare circuitului de magnetizare (pierderile în fier şi susceptanţa respectivă).

Dacă transformatorul se studiază în raport cu circuitul primar, impedanţa şi tensiunea secundară se raportează la primar, obţinându-se

$$\overline{Z}_2' = k^2\overline{Z}_2 \text{ şi } \overline{U}_2' = k\,\overline{U}_2$$

în care k este raportul de transformare definit prin relaţia

$$k = \frac{U_1}{U_2}.$$

Dacă transformatorul se studiază în raport cu circuitul secundar, impedanţa şi tensiunea primară se raportează la secundar, obţinându-se

$$\overline{Z}_1' = \frac{1}{k^2}\overline{Z}_1 \text{ şi } \overline{U}_1' = \frac{1}{k}\,\overline{U}_1 .$$

Impedanţele cuadripolului echivalent se pot determina experimental prin probele de mers în gol şi de scurt circuit. Se găseşte:

— din proba de mers în gol

$$G_0 = \frac{p_0}{3U_0^2} \text{ S} \qquad (25)$$

în care

$$p_0 = P_0 - 3\,R_1 I_0^2 \quad \text{W}$$

P_0 fiind pierderile totale măsurate la mersul în gol
R_1 rezistenţa înfăşurării primare
I_0 curentul de mers în gol
p_0 pierderile în fier (prin histerezis şi curenţi turbionari)

şi, admiţând egalitatea între curentul de magnetizare şi curentul reactiv absorbit de transformator,

$$B_0 = \frac{\sqrt{3} I_0 \sin \varphi_0}{U_0} \quad S \qquad (26)$$

φ_0 fiind determinat de relaţia

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{\sqrt{3}\, U_0 I_0}.$$

Relaţiile (25) şi (26) dau componentele admitanţei $\overline{Y}$.
— din proba de scurt circuit

$$P_{sc} = 3\,(R_1 + R_2')\, I_{sc}^2; \qquad W$$

cum în general

$$R_2' = k^2 R_2 = R_1 \qquad \Omega$$

rezultă

$$R_1 = k^2 R_2 = \frac{P_{sc}}{6\, I_{sc}^2}. \qquad \Omega \qquad (27)$$

Tot din această probă se deduce din

$$U_{sc} = \sqrt{3}\, Z_{TOT} I_{sc} = \sqrt{3}\, I_{sc} \sqrt{(R_1 + R_2')^2 + (X_1 + X_2')^2} \qquad V$$

reactanţele primară şi secundară

$$X_1 = X_2' = k^2 X_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_{sc}^2}{3 I_{sc}^2} - (R_1 + R'_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\, I_{sc}} \sqrt{U_{sc}^2 - \frac{P_{sc}^2}{I_{sc}^2}}. \qquad \Omega \qquad (28)$$

Relaţiile (27) şi (28) dau componentele impedanţelor $\overline{Z}_1$ şi $\overline{Z}_2$.

Observaţie. **Relaţiile de mai sus sunt stabilite în cazul unui transformator trifazat. In cazul unui transformator monofazat ele devin:**

$$G_0 = \frac{p_0}{U_0^2} \qquad S$$

$$p_0 = P_0 - R_1 I_0^2 \qquad W$$

$$B_0 = \frac{I_0 \sin \varphi}{U_0} \qquad S$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{P_0}{U_0 I_0}$$

$$P_{sc} = (R_1 + R_1') I_{sc}^2 \qquad W$$

$$R_1 = k^2 R_2 = \frac{P_{sc}}{2 I_{sc}^2} \qquad \Omega$$

$$X_1 = k^2 X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{U_{sc}^2}{I_{sc}^2} - (R_1 + R_2')^2} = \frac{1}{2 I_{sc}}\sqrt{U_{sc}^2 - \frac{P_{sc}^2}{I_{sc}^2}}. \qquad \Omega$$

β) **Circuitul echivalent al motorului asincron trifazat.** Socotindu-se motorul asincron ca fiind un transformator, circuitul echivalent al acestuia este deasemenea un cuadripol în T închis pe impedanța variabilă

$$k^2 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{29}$$

în care s este *alunecarea* motorului asincron.

Dacă se cuprinde în această impedanță și rezistența înfășurării rotorului, expresia ei devine

$$k^2 \frac{R_2}{s}. \tag{30}$$

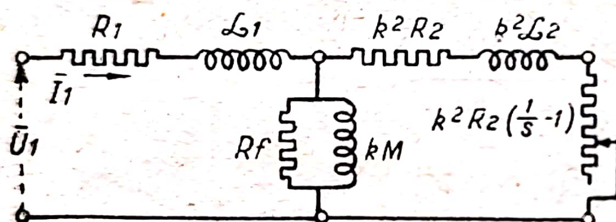


Fig. 15. Circuitul echivalent al motorului asincron trifazat (pe o fază).

Cuadripolul echivalent al motorului asincron este dat în fig. 15.

Relațiile (25). (26), (27), (28) și (30) dau toate elementele necesare construirii circuitului echivalent al motorului asincron.

Cu ajutorul circuitelor echivalente al tansformatorului și motorului asincron, funcționarea acestora se studiază ca și funcționarea unui cuadripol oarecare.

Observație generală : Studiul sistemelor polifazate (respectiv trifazate) cu ajutorul circuitelor echivalente, se face lucrând totdeauna *numai pe fază.*

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA II

STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

6. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

(Problemele 6.1—6.40)

6.1. **Regimul deformant** este regimul energetic alternativ la care, cel puțin una din unde (de curent sau de tensiune), nu este sinusoidală.

6.2. **Funcția periodică nesinusoidală** este acea funcție nesinusoidală care se reproduce identic cu ea însăși după perioade egale și este caracterizată prin ecuația

$$f(t) = f(t + kT)$$

T fiind perioada și k un număr întreg oarecare.

6.3. **Funcțiile armonice** sunt funcțiile periodice *sinusoidale* la care raportul perioadelor este un număr întreg. Funcția la perioada căreia se raportează celelalte perioade se numește *unda* sau *armonica fundamentală*; celelalte se numesc *unde* sau *armonice superioare*.

6.4. Orice funcție periodică nesinusoidală poate fi descompusă într'o infinitate de funcții armonice, cu perioadele în progresie aritmetică, în sinus și cosinus.

Reciproc, compunerea a două sau mai multe armonice dă o funcție periodică nesinusoidală cu perioada egală cu aceea a undei fundamentale.

6.5. Decalajul față de origină a armonicei

$$y = A \sin(n\omega t - \varphi)$$

este φ/n.

6.6. Două armonice sunt în fază dacă trec prin zero în același timp și în același sens.

Dacă trecerile prin zero nu mai coincid, armonicele sunt *defazate* sau *decalate* una față de alta. In general, decalajul are un sens numai pentru armonice de același ordin.

Decalajul între armonice diferite se determină față de origină.

Exemplu: armonicele $y_1 = A_1 \sin (n\omega t - \varphi_1)$ și $y_2 = A_2 \sin (n\omega t - \varphi_2)$ sunt defazate una față de alta cu unghiul:

$$|\varphi| = \left| \frac{\varphi_2}{n} - \frac{\varphi_1}{n} \right| < \frac{\pi}{n}$$

Dacă $\varphi < 0$, funcția y_1 este decalată în *urma* funcției y_2; invers dacă $\varphi > 0$.

6.7. Reprezentarea polară a funcțiilor periodice. Considerând mărimea razei vectoare egală cu mărimea amplitudinii funcției periodice la timpul t oarecare și argumentul corespunzător egal cu ωt, ω fiind pulsația mărimii periodice respective, hodograful acestor raze vectoare, pentru un ciclu complet, reprezintă curba polară a funcției periodice date.

Diagrama polară a unei sinusoide este un cerc având diametrul egal cu amplitudinea maximă. Inclinarea diametrului principal al acestui cerc față de axa complexă dă defazajul mărimii sinusoidale față de origine.

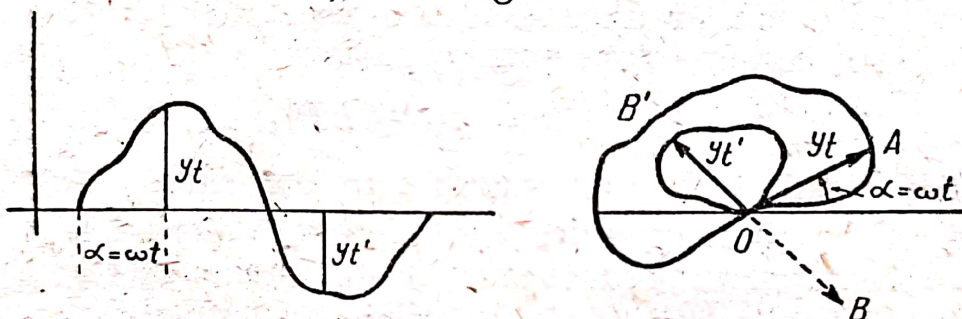


Fig. 16. Reprezentarea polară a mărimilor periodice.

6.8. Compunerea armonicelor se face grafic sau analitic. Grafic, se desenează armonicele respective și se face sumarea punct cu punct a ordonatelor corespunzătoare aceloraşi abscise.

Analitic, se disting două cazuri:

α) Curbele au aceeași perioadă. In acest caz se identifică $A_1 \sin (n\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin (n\omega t + \varphi_2) = A \sin (n\omega t + \varphi)$ și se găsește

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

β) Curbele au perioade diferite. In acest caz se aplică relația

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

undelor cu amplitudine egală şi se găseşte pentru undele

$$A_1 \sin(m\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(n\omega t + \varphi_2) = (A_1 - A_2)\sin(m\omega t + \varphi_1)$$

$$+ 2A_2 \sin\left(\frac{m+n}{2}\,\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{m-n}{2}\,\omega t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right).$$

7. ANALIZA ARMONICĂ A FUNCŢIILOR NESINUSOIDALE

(Problemele 7.1—7.25)

Orice funcţie nesinusoidală poate fi pusă sub forma

$$y = C_0 + \sum_{1}^{\infty} C_k \sin(k\omega t - \varphi_k) =$$

$$C_0 + \sum_{1}^{\infty} A_k \sin k\omega t + \sum_{1}^{\infty} B_k \cos k\omega t \qquad (31)$$

în care

$$C_k^2 = A_k^2 + B_k^2 \quad \text{şi} \quad \mathrm{tg}\varphi_k = -\frac{B_k}{A_k} \qquad (32)$$

Găsirea coeficienţilor A_k, B_k şi C_0 formează obiectul analizei armonice.

7.1. Metoda integrării. y fiind o funcţie algebrică cunoscută, coeficienţii sunt daţi de relaţiile

$$\left.\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y \sin k\omega t \, dt \\ B_k &= \frac{2}{T}\int_0^T y \cos \ \omega \, dt \\ C_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T y \, dt \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

7.2. Metoda discontinuităţilor sau a incidentelor geometrice. (Lalescu — Abason). $F(x_i)$ fiind valoarea funcţiei în *dreapta* punctului de discontinuitate de abscisă x_i şi $f(x_i)$ fiind valoarea acesteia în *stânga* punctului de discontinuitate, dacă se notează

$$S_i^{(0)} = F(x_i) - f(x_i)$$
$$S_i^{(p)} = F^{(p)}(x_i) - f^{(p)}(x_i)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $F^{(p)}(x_i)$ şi $f^{(p)}(x_i)$ sunt derivatele de ordinul p ale acestor funcţii, coeficienţii termenilor generali ai descompunerii în serie Fourier sunt

$$\left.\begin{aligned}
\pi A_k &= \frac{1}{k}\sum S_i^{(0)} \cos kx_i - \frac{1}{k^2}\sum S_i^{(1)} \sin kx_i - \\
&- \frac{1}{k^3}\sum S_i^{(2)} \cos kx_i + \frac{1}{k^4}\sum S_i^{(3)} \sin kx_i + \\
&+ \frac{1}{k^5}\sum S_i^{(4)} \cos kx_i - \ldots\ldots \\
\pi B_k &= -\frac{1}{k}\sum S_i^{(0)} \sin kx_i - \frac{1}{k^2}\sum S_i^{(1)} \cos kx_i + \\
&+ \frac{1}{k^3}\sum S_i^{(2)} \sin kx_i + \frac{1}{k^4}\sum S_i^{(3)} \cos k\,x_i - \\
&- \frac{1}{k^5}\sum S_i^{(4)} \sin kx_i - \ldots\ldots\ldots \\
2\pi C_0 &= \sum\Big(-\frac{1}{1!}\,x_i\,S_i^{(0)} + \frac{1}{2!}\,x_i^2\,S_i^{(1)} - \frac{1}{3!}\,x_i^3\,S_i^{(2)} + \\
&+ \frac{1}{4!}\,x^4\,S_i^{(3)} - \ldots\Big)
\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

In aceste expresii, termenul general $\sum S_i^{(p)} \sin kx_i$, respectiv $\sum S_i^{(p)} \cos kx_i$, trebue înţeles în sensul că, pentru *toate* punctele de abscisă x_i în care funcţia prezintă salturi de ordinul p (derivate de ordinul p) se va face produsul $S_i^{(p)} \sin kx_i$ sau $S_i^{(p)} \cos kx_i$ şi se adună rezultatele.

Pentru origina curbei de analizat ($x_i = 0$) ca şi pentru extremitatea ei ($x_i = 2\pi$), se consideră că funcţia din stânga originii cum şi funcţia din dreapta punctului de abscisă $x_i = 2\pi$ sunt nule.

7.3. Analiza armonică a curbelor periodice experimentale. Pentru aceste curbe nu se poate scrie ecuaţia analitică. Se transformă integralele (33) în sume finite şi se obţine

$$\left.\begin{aligned}
A_k &= \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \sin km\,\frac{\pi}{p} \\
B_k &= \frac{1}{p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m \cos km\,\frac{\pi}{p} \\
C_0 &= \frac{1}{2p}\sum_{m=1}^{2p} Y_m
\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

în care $2p$ este numărul de părți egale în care a fost împărțită perioada și Y_m amplitudinea corespunzătoare abscisei m.

Calculul sumelor (35) se poate face direct sau sistematizând acest calcul. Metodele de sistematizare sunt foarte multe. Dintre acestea indicăm următoarele două:

α) *Metoda ordonatelor echidistante* (Thompson-Runge). Se împarte perioada în $2p = 4q$ diviziuni egale. Calculul se face după următoarea schemă, întocmită pentru $2p = 12$.

Ordonate		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
	Y_{12}	Y_{11}	Y_{10}	Y_9	Y_8	Y_7	
Sume s_k		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
diferențe d_k		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	
	Sume				Diferențe		
	s_0	s_1	s_2	s_3	d_1	d_2	d_3
	s_6	s_5	s_4		d_5	d_4	
Sume	S_0	S_1	S_2	S_3	E_1	E_2	E_3
Diferențe	M_0	M_1	M_2		D_1	D_2	

Calculul coeficienților termenilor în sinus

Sin 30° = 0,5 Sin 60° = 0,866 Sin 90° = 1	E_1 E_3	E_2	D_1	D_2	E_1	E_3
Sume	I	II	I	II	I	II
Suma I + II	6 A_1		6 A_2		—	
Diferența I — II	6 A_5		6 A_4		6 A_3	

Calculul coeficienţilor termenilor în cosinus

$\cos 0^0 = 1$ . . $\cos 30^0 = 0{,}866$ $\text{css } 60^0 = 0{,}5$	S_0+S_2	S_1+S_3	M_0 M_2	M_1	S_0 $-S_2$	$-S_3$ S_1	M_0	M_2
Suma	I	II	I	II	I	II	I	II
Suma I + II .	$12\ B_0$		$6\ B_1$		$6\ B_2$		—	
Diferenţa I—II	$12\ B_6$		$6\ B_5$		$6\ B$		$6\ B_3$	

Notă. In fiecare rând, valorile trebue înmulţite cu sinusul sau cosinusul din stânga lor.

Pentru calcule cu mai multe armonice există formulare de calcul. Calculul se poate face deasemenea şi cu ajutorul unor cartoane ajurate (vezi problemele 7.14 şi 7.15).

β) *Metoda grafică* (Krug-Roth). In relaţiile (35) se înmulţeşte prima relaţie cu j şi se adună cu a doua, obţinându-se

$$\overline{C}_k = B_k + jA_k = \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \left(\cos km\frac{\pi}{p} + j \sin km\frac{\pi}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{m=1}^{2p} Y_m \Big| km\frac{\pi}{p} .$$

Armonica de ordinul k poate fi determinată efectuând suma geometrică a diverselor amplitudini, fiecare făcând unghiul $km\frac{\pi}{p}$ faţă de originea de fază, şi împărţind rezultanta prin p (2 p este numărul în care s'a împărţit perioada).

Defazajul se obţine măsurând unghiul pe care îl face această rezultantă cu axa complexă.

8. STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

(Problemele 8.1—8.51)

8.1. Mărimile caracteristice ale regimului deformant. O mărime nesinusoidală poate fi reprezentată printr'o expresie de forma (seria Fourier):

$$y = Y_0 + \sum_{1}^{\infty} Y_k \sqrt{2} \sin (k\omega t - \varphi_k) \tag{36}$$

în care Y_k este valoarea eficace a armonicii de ordinul k.

Scanned with OKEN Scanner

α) *Valoarea eficace* a mărimii nesinusoidale (36) este dată de relația

$$Y_{ef} = \sqrt{\sum_{0}^{\infty} Y_k^2}. \tag{37}$$

Valoarea eficace (37) poate fi determinată grafic cu ajutorul curbei polare reprezentative a funcției periodice date. Dacă S este suprafața închisă de această curbă polară, valoarea eficace este :

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

β) *Reziduul deformant* sau *reziduul* unei funcții nesinusoidale este curba care se obține suprimând armonica fundamentală și care are valoarea eficace

$$Y_d = \sqrt{Y_{ef}^2 - Y_1^2} \cong \sqrt{Y_0^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_n^2} \tag{38}$$

γ) *Valoarea medie* a unei funcții nesinusoidale (corespunzând valorii medii a unei funcții sinusoidale) e dată de relația

$$Y_{med} = \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} \left(Y_0 + \sum_{1}^{n} Y_k \sqrt{2} \sin k\,\omega\,t\right) dt =$$

$$Y_0 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k} Y_k \tag{39}$$

în care k este un număr impar.

δ) *Factorul de formă* este definit de relația

$$\alpha = \frac{Y_{ef}}{Y_{med}}. \tag{40}$$

ε) *Factorul de creastă* sau *de vârf* este definit de relația

$$f_v = \frac{Y_{max}}{Y_{ef}}. \tag{41}$$

în care Y_{max} este amplitudinea maximă *măsurată* pe curbă.

ζ) *Coeficientul de distorsiune* este definit de relația

$$\delta = \frac{Y_d}{Y_{ef}} \tag{42}$$

8.2. Puterea în regim deformant. Fie undele de tensiune și curent ale unui regim deformant

$$\left.\begin{aligned} u &= U_0 + \sum_1^n U_k\sqrt{2}\sin(k\omega t - \alpha_k) \\ i &= I_0 + \sum_1^n I_k\sqrt{2}\sin(k\omega t - \beta_k) \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

și

$$\varphi_k = \beta_k - \alpha_k.$$

In regim deformant se întâlnesc patru noțiuni de putere:

α) *Puterea activă*

$$P = U_0 I_0 + \sum_1^n U_k I_k \cos\varphi_k. \qquad (44)$$

Unitatea de măsură este wattul (W).

β) *Puterea reactivă* (C. Budeanu):

$$Q = \sum_1^n U_k I_k \sin\varphi_k. \qquad (45)$$

Unitatea de măsură este varul (VAR).

γ) *Puterea deformantă* (C. Budeanu):

$$D = \sqrt{\sum_0^{m,n}\left[U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2\,U_m\,U_n\,I_m\,I_n\cos(\varphi_m - \varphi_n)\right]}. \qquad (46)$$

Unitatea de măsură (propusă) este vadul (VAD).

Dacă U este sinusoidal, sau dacă $\delta_T \leqslant 20\%$,

$$D = U_{ef}\, I_d\,. \qquad (47)$$

Dacă $\delta_T > 20\%$,

$$D = U_{ef}\, I_d + U_d\, I_{ef}. \qquad (48)$$

O formulă simplificată dar foarte precisă este

$$D = \sqrt{U_1^2 I_d^2 + U_d^2 I_1^2 - 2U_1 I_1 \sum_2^n U_m I_m \cos(\varphi_1 - \varphi_m)}. \qquad (49)$$

Scanned with OKEN Scanner

δ) *Puterea aparentă*

$$S = U_{ef} I_{ef} = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}. \qquad (50)$$

Unitatea de măsură este volt-amperul (VA).

8.3. Factorul de putere în regim deformant. Factorul de putere în regim deformant este definitiv de relația

$$K = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \qquad (51)$$

Se definește:

α) *Factor ul reactiv* al regimului.

$$\rho = \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi. \qquad (52)$$

β) *Factorul deformant* al regimului

$$\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \operatorname{tg} \xi. \qquad (53)$$

Cu mărimile deduse din (52) și (53), relația (51) devine

$$K = \cos \varphi \cdot \cos \xi. \qquad (54)$$

8.4. Circuite electrice în regim deformant. α) *Legile lui Ohm și Kirchhoff.* Pentru un circuit serie, format dintr'o rezistență, o inductanță și un condensator căruia i se aplică o tensiune de forma (43), curentul ce ia naștere în circuit este

$$i = I_0 + \sum_{1}^{n} I_k \sqrt{2} \, \sin (k\omega t - \varphi_k) \qquad (55)$$

în care

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \frac{U_k}{\sqrt{R^2 + \left(Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}\right)^2}} \\ \operatorname{tg} \varphi_k &= \frac{Lk\omega - \frac{1}{Ck\omega}}{R}, \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

termenul

$$I_0 = \frac{U_0}{R + R_c}$$

există numai dacă condensatorul este imperfect (şuntat cu o rezistenţă de o valoare oarecare R_c).

β) *Rezonanţa în regimul deformant.*

Condiţia de rezonanţă pentru armonica de ordinul k, este

$$LC\,k^2\omega^2 - 1 = 0.$$

8.5. Efectele regimului deformant.

α) *Un condensator* alimentat cu tensiunea

$$u = \sum_0^n (U_k' \sqrt{2} \sin k\omega t + U_k'' \sqrt{2} \cos k\omega t) \qquad (57)$$

este străbătut de curentul

$$i = C\omega \sum_0^n \left[k\, U_k' \sqrt{2} \sin\left(k\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + k\, U_k'' \sqrt{2} \cos\left(k\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

β) *O inductanţă* alimentată cu tensiunea (57) este străbătută de curentul

$$i = \frac{1}{L\omega} \sum_0^n \left[\frac{1}{k}\, U_k' \sqrt{2} \sin\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{k}\, U_k'' \sqrt{2} \cos\left(k\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

γ) *Creşterea puterii aparente* este dată de relaţia

$$\xi = \frac{S'' - S'}{S'} \cdot 100$$

în care S' este puterea aparentă datorită numai undei fundamentale şi S'' puterea aparentă totală.

δ) *Creşterea pierderilor ohmice.* R fiind rezistenţa circuitului trifazat pe fază, dacă se notează

$$p'' = 3\,R\,\frac{P^2 + Q^2 + D^2}{3\,U^2}$$

şi

$$p' = 3\,R\,\frac{P^2 + Q^2}{3U^2},$$

U fiind tensiunea între faze, creşterea pierderilor ohmice este dată de relaţia

$$\xi = \frac{p'' - p'}{p'} = \tau^2.$$

ε) *Creșterea impedanței aparente.* Impedanța unui circuit serie format dintr'o rezistență R, o reactanță inductivă X_L și o reactanță capacitativă X_C în regim sinusoidal fiind

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2},$$

aceiași impedanță, măsurată în regim deformant este

$$Z' = \Gamma \cdot Z$$

în care

$$\Gamma = \sqrt{\frac{U_1^2 + \sum_2^n U_k^2}{U_1^2 + \sum_2^n \frac{R^2 + (X_L - X_C)^2}{R^2 + \left(kX_L - \frac{1}{k} X_C\right)^2} U^2{}_k}}$$

U_k fiind valoarea eficace a armonicei de ordinul k.

8.6. Regimul deformant în sisteme trifazate echilibrate.

α) Tensiunea *pe fază* a unui alternator este de forma

$$\left.\begin{aligned} e_I &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega t && \text{pentru faza I} \\ e_{II} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t - \frac{2\pi}{3\omega}\right) && \text{,, ,, II} \\ e_{III} &= \sum_1^n E_k \sqrt{2} \sin k\omega \left(t + \frac{2\pi}{3\omega}\right) && \text{,, ,, III} \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

în care k este un număr impar.

Pentru

$$k = 3\,\alpha \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots .)$$

armonicele corespunzătoare formează *sisteme homopolare*, tensiunile pe cele trei faze fiind identice și în fază:

$$e_I = e_{II} = e_{III} = \sum_0^\infty E_{3\alpha} \sqrt{2} \sin 3\alpha\omega t. \qquad (59)$$

Pentru

$$k = 3\,\alpha + 1 \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots .)$$

armonicile corespunzătoare formează *sisteme directe*, tensiunile pe cele trei faze fiind

$$\left.\begin{aligned} e_I &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1}\sqrt{2}\sin(3\alpha+1)\omega t \\ e_{II} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha+1)\omega t - \frac{2\pi}{3}\right] \\ e_{III} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha+1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha+1)\omega t + \frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Pentru

$$k = 3\alpha - 1 \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots.)$$

armonicile corespunzătoare formează *sisteme inverse*, tensiunile pe cele trei faze fiind

$$\left.\begin{aligned} e_I &= \sum_0^\infty E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin(3\alpha-1)\omega t \\ e_{II} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha-1)\omega t + \frac{2\pi}{3}\right] \\ e_{III} &= \sum_0^\infty E_{3\alpha-1}\sqrt{2}\sin\left[(3\alpha-1)\omega t - \frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

β) *Tensiunea între două faze (tensiunea la borne) a unui alternator*. Din (58) se găsește

$$e_{II-I} = e_I - e_{II} = \sum_1^n E_k\sqrt{2}\cdot 2\sin\left(k\,\omega t - k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)\sin k\frac{\pi}{3}$$

Pentru

$$k = 3\alpha \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots.)$$

rezultă

$$e_{II-I} = 0.$$

Pentru

$$k = 3\alpha + 1 \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots.)$$

$$e_{II-I} = \sum_0^\infty E_{3\alpha+1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left[(3\alpha+1)\omega t + \frac{\pi}{6}\right].$$

Pentru

$$k = 3\alpha - 1 \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots\ldots)$$

$$e_{II-I} = \sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha-1} \sqrt{2}\sqrt{3} \sin\left[(3\alpha - 1)\,\omega t - \frac{\pi}{6}\right].$$

Raportul dintre tensiunea la borne și tensiunea pe fază este dat de relația

$$\frac{E_{II-I}}{E_I} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_{11}^2 + \cdots}{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_9^2 + E_{11}^2 + \cdots}}$$

γ) *Legarea în triunghi a fazelor unui alternator.*

Tensiunea la bornele triunghiului deschis al fazelor alternatorului este

$$u = e_I + e_{II} + e_{III} = \sum_{1}^{n} E_k \sqrt{2}\left(1 + 2\cos k\frac{2\pi}{3}\right)\sin k\omega .$$

Pentru

$$k = 3\,\alpha \pm 1 \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots .)$$

$$u = 0.$$

Pentru

$$k = 3\,\alpha \qquad (\alpha = 0,1,2 \ldots .)$$

$$u = 3\sum_{0}^{\infty} E_{3\alpha}\sqrt{2}\sin 3\alpha\omega t.$$

PARTEA III

STUDIUL REGIMULUI TRIFAZAT DESECHILIBRAT

9. DEPLASAREA PUNCTULUI NEUTRU. CALCUL DIRECT DE REŢELE

(Problemele 9.1—9.35)

9.1. Reprezentarea topografică a tensiunilor. In cazul unui sistem trifazat simetric şi echilibrat, forţele electromotoare pe fază ale unui alternator se reprezintă prin trei vectori concurenţi, egali ca mărime şi decalaţi succesiv unul faţă de altul cu un unghi $2\pi/3$. In cazul în care sistemul este desechilibrat, cei trei vectori concurenţi pot fi oricum, atât ca mărime cât şi ca defazaj. Punctul de concurenţă al acestor vectori se consideră ca potenţialul de origine al sistemului — potenţialul de referinţă. El este luat în general egal cu zero. Reprezentarea de mai sus se numeşte *reprezentarea topografică a tensiunilor*. Tot pe această diagramă se pot reprezenta curenţii şi, în raport cu aceştia, căderile de tensiune în alternator şi deci tensiunea pe fază şi între faze.

In acelaşi mod, se pot construi, pe aceeaşi diagramă, sau pe o diagramă diferită, tensiunile pe fază şi la borne la sarcină. Punctul de concurenţă al acestor vectori se numeşte *punctul neutru al sarcinii*. Diferenţa de potenţial dintre acest punct neutru şi punctul neutru al alternatorului se numeşte *deplasarea punctului neutru al sarcinii.*

9.2. Problema generală a sistemelor desechilibrate. Fiind date forţele electromotoare induse în fazele alternatorului (presupuse legate în stea), rezistenţele şi admitanţele pe fază ale generatorului, liniei şi sarcinii (aceasta deasemenea presupusă legată în stea), se cere să se calculeze curenţii pe fază. Presupunându-se potenţialul punctului neutru al alternatorului egal cu zero, problema constă în găsirea potenţialului punctului neutru al sarcinii — deplasarea punctului neutru — cu ajutorul căruia se pot găsi tensiunile pe fază la sarcină şi deci curenţii căutaţi.

9.3. Metode pentru calcularea potențialului punctului neutru al sarcinii și curenții pe fază.

α) *Metoda analitică.* Fie $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$, $\overline{E}_3$, $\overline{E}_0$ forțele electromotoare ale alternatorului și potențialul punctului neutru al sarcinii și $\overline{Y}_1$, $\overline{Y}_2$, $\overline{Y}_3$, $\overline{Y}_0$ admitanțele totale ale celor trei faze și a firului neutru. Potențialul punctului neutru al sarcinii este dat de relația

$$\overline{E}_0 = \frac{\overline{E}_1 \overline{Y}_1 + \overline{E}_2 \overline{Y}_2 + \overline{E}_3 \overline{Y}_3}{\overline{Y}_0 + \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} \tag{62}$$

Curentul pe fiecare fază este dat de relația

$$\overline{I}_1 = (\overline{E}_1 - \overline{E}_0)\, \overline{Y}_1 \tag{63}$$

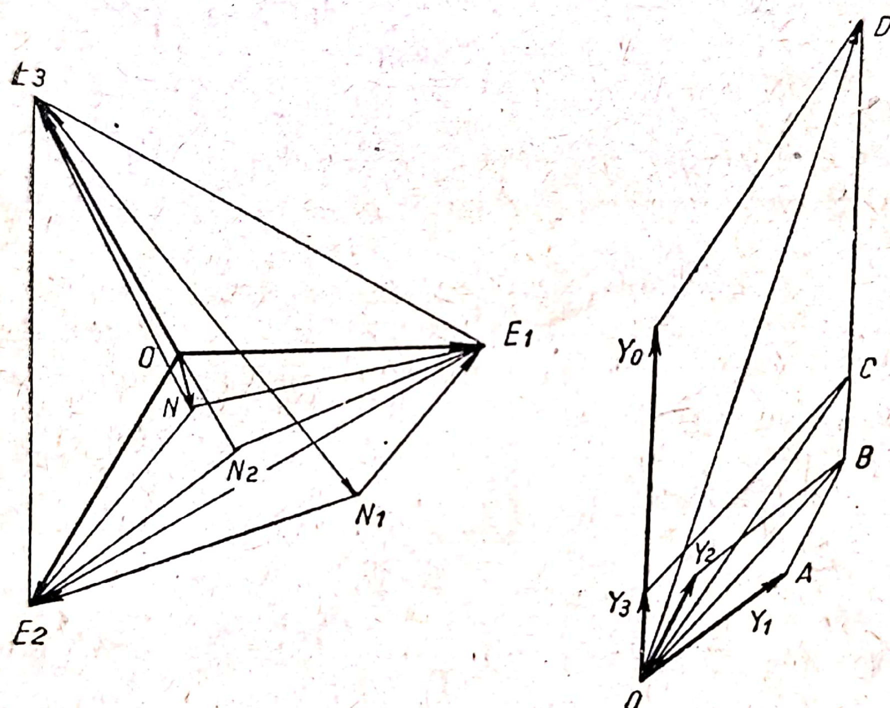


Fig. 17. Construcția grafică a punctului neutru.

și alte două relații analoage. Curentul în firul neutru este dat de relația

$$\overline{I}_0 = -\overline{E}_0 \overline{Y}_0 \tag{64}$$

β) *Metoda grafică.* Se construește topograma tensiunilor și se reprezintă pe o diagramă admitanțele sistemului (fig. 17). Găsirea punctului neutru se face în trei etape:

1) se presupune la început că sistemul nu are fir neutru, și că una din faze (ex. faza 3) este întreruptă. In acest caz

$$\frac{\overline{E_2 N_1}}{\overline{N_1 E_1}} = \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}};$$

Construind această relație în topograma tensiunilor se găsește punctul neutru N_1. Se presupune apoi că faza 3 nu este întreruptă. In acest caz se poate scrie relația

$$\frac{\overline{E}_3 - \overline{E}_N}{\overline{E}_3 - \overline{E}_{N1}} = \frac{\overline{E_3 N}}{\overline{E_3 N_1}} = \frac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}},$$

care construită dă punctul neutru N al sistemului fără fir neutru. Dacă sistemul are fir neutru, atunci se poate scrie relația, N_0 fiind punctul neutru al sistemului,

$$\frac{\overline{E}_{N0}}{\overline{E}_N} = \frac{\overline{ON_0}}{\overline{ON}} = \frac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3}{\overline{Y}_0 + \overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$$

care construită determină punctul neutru al sistemului cu fir neutru.

Cunoscându-se punctul neutru, se determină pe topogramă cele trei tensiuni pe fază și se pot calcula grafic curenții căutați.

9.4. Calculul curenților când se cunosc tensiunile între faze la utilizare. Tensiunile între faze formând întotdeauna un triunghi, suma lor este nulă. Se presupune mai întâi că cele trei sarcini sunt identice. Dacă $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_3$ sunt tensiunile pe fază la utilizare, suma curenților în punctul neutru al sarcinii fiind nulă, rezultă

$$\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0, \tag{65}$$

ceeace înseamnă că punctul neutru al sarcinii se găsește în centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze. $\overline{U}_{12}$, $\overline{U}_{23}$, $\overline{U}_{31}$ fiind tensiunile între faze, tensiunile pe fază sunt date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \frac{1}{3}\,(\overline{U}_{12} - \overline{U}_{31}) \\ \overline{V}_2 &= \frac{1}{3}\,(\overline{U}_{23} - \overline{U}_{12}) \\ \overline{V}_3 &= \frac{1}{3}\,(\overline{U}_{31} - \overline{U}_{23}) \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Dacă cele trei sarcini nu sunt egale și simetrice, se calculează deplasarea punctului neutru al acestor sarcini față de

Scanned with OKEN Scanner

centrul de greutate al triunghiului tensiunilor între faze cu relația

$$\overline{V}_0 = \frac{\overline{V}_1 \overline{Y}_1 + \overline{V}_2 \overline{Y}_2 + \overline{V}_3 \overline{Y}_3}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} \tag{67}$$

și tensiunile pe fază cu relațiile

$$\overline{V}_1' = \overline{V}_1 - \overline{V}_0$$

și alte două relații analoage.

10. TEORIA COORDONATELOR SIMETRICE

(Problemele 10.1—10.30)

10.1. Reprezentarea analitică a unui sistem trifazat. Un sistem trifazat, simetric și echilibrat se reprezintă prin trei vectori egali decalați unul de altul cu 120^0.

S'a convenit a se defini sensul pozitiv de succesiune al fazelor, sensul mișcării acelor unui ceasornic, sensul mișcării vectorilor rămânând același, adică unghiurile cresc cu timpul în sensul trigonometric.

Luând ca origine de fază vectorul $\overline{V}_1$ de pe faza 1 (numit vector principal al sistemului) și notând

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^{j\,120^0} = 1\,\underline{|120^0}$$

sistemul trifazat simetric de mai sus se reprezintă analitic prin

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 &= a^2\,\overline{V}_1 \\ \overline{V}_3 &= a\,\overline{V}_1 \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Acest sistem se numește un sistem *direct* sau de succesiune 1.

Un sistem având succesiunea fazelor inversă precedentului, se numește un sistem *invers* sau de succesiune 2. Acest sistem se reprezintă analitic prin

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 &= a\,\overline{V}_1 \\ \overline{V}_3 &= a^2\,\overline{V}_1 \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Un sistem trifazat format din trei vectori egali și în fază se numește sistem *homopolar* sau de succesiune 0.

Acest sistem se exprimă analitic prin

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 &= \overline{V}_1 \\ \overline{V}_3 &= \overline{V}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

10.2. Proprietățile operatorului a. Prin definiție

$$a = 1\underline{|\,120^0} = \varepsilon^{j120^0} = \cos 120^0 + j \sin 120^0 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

rezultă

$$a^2 = 1\underline{|-120^0},\ a^3 = 1\,;\ a^4 = a\,;\ a^5 = a^2\,;\ a^6 = 1\,;\ a^{-1} = a^2$$

și

$$1 + a + a^2 = 0$$

10.3. Teorema lui Stokvis — Fortescue. Un sistem de vectori trifazat oarecare poate fi descompus în două sisteme de vectori trifazate simetrice de succesiune diferită, unui direct și altul invers, și într'un sistem homopolar.

Analitic aceasta se exprimă prin ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_1 &= \overline{V}_h + \overline{V}_d + \overline{V}_i \\ \overline{V}_2 &= \overline{V}_h + a^2\overline{V}_d + a\overline{V}_i \\ \overline{V}_3 &= \overline{V}_h + a\overline{V}_d + a^2\overline{V}_i \end{aligned}\right\} \qquad (71)$$

în care V_h este componenta homopolară, $\overline{V}_d$ este componenta directă și $\overline{V}_i$ componenta inversă.

10.4. Determinarea componentelor simetrice ale unui sistem trifazat dat. α) *Metoda analitică.* Rezolvând sistemul (71) se găsește

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_h &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3) \\ \overline{V}_d &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a\overline{V}_2 + a^2\overline{V}_3) \\ \overline{V}_i &= \frac{1}{3}(\overline{V}_1 + a^2\overline{V}_2 + a\overline{V}_3) \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

Scanned with OKEN Scanner

β) *Metode grafice.* Se bazează pe construcția relațiilor (72). Pentru sistemul în stea construcția este dată în fig. 18.

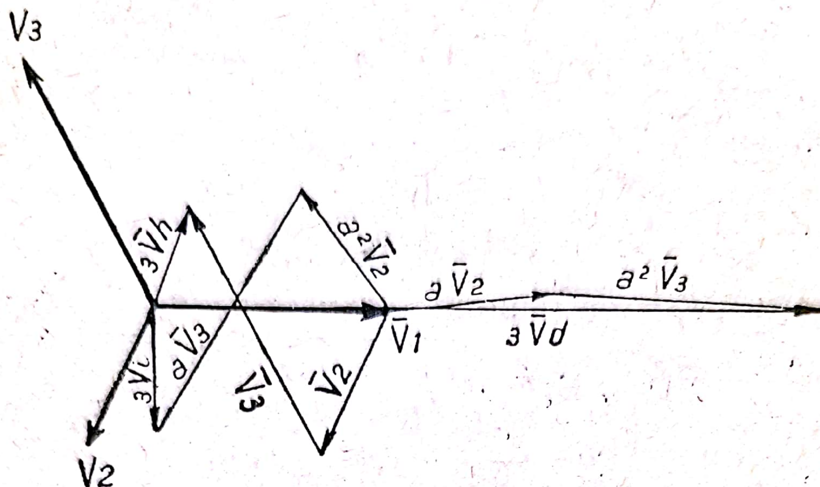


Fig. 18. Construcția grafică a componentelor simetrice.

Pentru sistemul între faze (sistem în triunghi), construcția este arătată în fig. 19.

10.5. Proprietăți ale componentelor simetrice. Două sisteme de vectori trifazați care au aceleași vârfuri dar origini diferite, au aceleași componente simetrice directe și inverse, iar componenta homopolară este dată în mărime și direcție de vectorul care unește cele două origini.

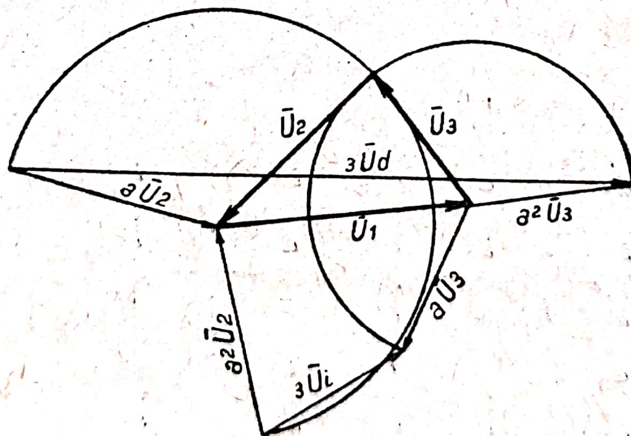


Fig. 19. Construcția grafică a componentelor simetrice ale unui sistem în triunghi.

10.6. Gradul de desechilibrare a unui sistem de vectori trifazat. α) Raportul

$$\varepsilon_i = \frac{|\bar{V}_i|}{|\bar{V}_d|}$$

se numește *gradul de disimetrie.*

β) Raportul

$$\varepsilon_h = \frac{|\overline{V}_h|}{|\overline{V}_d|}$$

se numeşte *gradul de asimetrie.*

In practică un sistem de vectori se poate socoti simetric dacă

$$\varepsilon_i \leq 5\% \quad \text{şi} \quad \varepsilon_h \leq 5\%.$$

10.7. Operaţii cu sisteme trifazate. α) *Sistemul sumă.* Fiind date sistemele $S_1(\overline{V}) = (\overline{V}'_1, \overline{V}'_2, \overline{V}'_3)$ şi $S_2(\overline{V}'') = (\overline{V}''_1, \overline{V}''_2, \overline{V}''_3)$ sistemul sumă este sistemul al cărui vectori sunt suma geometrică a vectorilor de acelaşi indice în sistemele date: $S(\overline{V}) = S_1(\overline{V}') \pm S_2(\overline{V}'') = S(\overline{V}' \pm \overline{V}'') =$

$$= [(\overline{V}'_1 \pm \overline{V}''_1), (\overline{V}'_2 \pm \overline{V}''_2), (\overline{V}'_3 \pm \overline{V}''_3)].$$

Definiţia de mai sus poate fi extinsă la oricâte sisteme.

β) *Sistemul produs.* Sistemul produs simbolic este sistemul al cărui vectori sunt produsul celor doi vectori de acelaşi indice al sistemelor de vectori date:

$$S(\overline{V}) = S_1(\overline{V}') \cdot S_2(\overline{V}'') = S(V' \cdot \overline{V}'') =$$

$$= [(\overline{V}'_1 \cdot \overline{V}''_1), (\overline{V}'_2 \cdot \overline{V}''_2), (\overline{V}'_3 \cdot \overline{V}''_3)].$$

Produsul a două sisteme simetrice este un sistem simetric al cărui ordin este egal cu suma algebrică a ordinelor celor două sisteme simetrice. Astfel

$$S_d(\overline{V}') \cdot S_d(\overline{V}'') = S_i(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_i(\overline{V}') \cdot S_i(\overline{V}'') = S_d(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_h(\overline{V}') \cdot S_h(\overline{V}'') = S_h(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_d(\overline{V}) \cdot S_i(\overline{V}'') = S_h(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_i(\overline{V}') \cdot S_d(\overline{V}'') = S_h(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_d(\overline{V}') \cdot S_h(\overline{V}'') = S_d(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_h(\overline{V}') \cdot S_d(\overline{V}'') = S_d(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_i(\overline{V}') \cdot S_h(\overline{V}'') = S_i(\overline{V}' \cdot \overline{V}'')$$
$$S_h(\overline{V}') \cdot S_i(\overline{V}'') = S_i(\overline{V}' \cdot \overline{V}'').$$

In cazul când cele două sisteme $S(\overline{V}')$ şi $S(\overline{V}'')$ nu sunt simetrice, dacă $S_h(\overline{V}'), S_h(\overline{V}'')\ldots\ldots$ sunt componentele sime-

trice ale celor două sisteme, atunci componentele simetrice ale sistemului produs sunt

$$\left.\begin{aligned} S_d(\overline{V}'\cdot\overline{V}'') &= S_d(\overline{V}')\cdot S_h(\overline{V}'') + S_i(\overline{V}')\cdot S_i(\overline{V}'') + \\ &\quad + S_h(\overline{V}')\cdot S_d(\overline{V}'') \\ S_i(\overline{V}'\cdot\overline{V}'') &= S_d(\overline{V}')\cdot S_d(\overline{V}'') + S_i(\overline{V}')\cdot S_h(\overline{V}'') + \\ &\quad + S_h(\overline{V}')\cdot S_i(\overline{V}'') \\ S_h(\overline{V}'\cdot\overline{V}'') &= S_d(\overline{V}')\cdot S_i(\overline{V}'') + S_i(\overline{V}')\cdot S_d(\overline{V}'') + \\ &\quad + S_h(\overline{V}')S_h(\overline{V}'') \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

10.8. Puterea în regimul desechilibrat.

Puterea în regimul desechilibrat este dată de relația

$$\overline{S} = 3\ \overline{V}_h\cdot\overline{I}_h^{*} + 3\ \overline{V}_d\cdot\overline{I}_d^{*} + 3\overline{V}_i\cdot\overline{I}_i^{*}$$

Cum $\bar{S} = P + jQ$, rezultă

$$\left.\begin{aligned} P &= 3\ V_h I_h \cos\varphi_h + 3\ V_d I_d \cos\varphi_d + 3V_i I_i \cos\varphi_i \\ Q &= 3\ V_h I_h \sin\varphi_h + 3\ V_d I_d \sin\varphi_d + 3V_i I_i \sin\varphi_i \end{aligned}\right\} (74)$$

11. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

(Problemele 11.1—11.12)

11.1. Măsurarea componentelor simetrice de curent și de tensiune. Pentru măsurarea acestor componente se efectuează diverse montaje cu ajutorul impedanțelor care se dimensionează astfel încât aparatul să indice componenta căutată. Dimensionarea aceasta se face aplicând legile lui Kirchhoff, calculând curentul ce trece prin aparatul de măsură și punând condiția ca acest curent să reprezinte componenta căutată.

11.2. Măsurarea reactanțelor simetrice ale mașinilor sincrone. Dintr'o probă de mers în gol și trei probe în scurtcircuit (trifazat, bifazat și monofazat) se obține

$$X_s = \frac{E}{I_{(3)}}$$

$$X_a = E\left(\frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}} - \frac{1}{I_{(3)}}\right)$$

$$X_0 = E\left(\frac{3}{I_{(1)}} - \frac{\sqrt{3}}{I_{(2)}}\right)$$

în care X_s, X_a, X_o sunt reactanțele: sincronă (sau directă), asincronă (sau inversă) și homopolară (sau de nul); $I_{(3)}$, $I_{(2)}$, $I_{(1)}$, sunt respectiv curenții pe fază în probele de scurtcircuit trifazat, bifazat și monofazat; E este forța electromotoare indusă, pe fază.

Reactanțele unei mașini sincrone se dau deobicei în procente, reprezentând raportul tensiunii de scurtcircuit corespunzătoare tensiunii nominale. Cunoscând acest raport, reactanța respectivă se deduce din relația

$$X = \frac{\varepsilon}{100} \frac{U^2}{S} \ \Omega$$

în care ε este tensiunea de scurtcircuit, în procente; U tensiunea mașinii în kV și S puterea aparentă a acesteia în MVA.

12. CALCULUL CIRCUITELOR TRIFAZATE DESCHILIBRATE. CALCULE DE SCURTCIRCUIT

(Problemele 12.1—12.34)

12.1. Legile lui Kirchhoff în sistemul desechilibrat. Se numește *impedanța directă* a rețelei, impedanța efectivă pe fază opusă trecerii curenților *sistemului direct*. (Pentru mașinile sincrone această impedanță se numește *impedanța sincronă*). *Impedanța inversă* (impedanța *asincronă*) și *impedanța homopolară* (impedanța *de nul*), se definesc în același mod.

Legile lui Kirchhoff se scriu

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_d &= \overline{U}_d + \overline{Z}_d \overline{I}_d \\ \overline{E}_i &= \overline{U}_i + \overline{Z}_i \overline{I}_i \\ \overline{E}_h &= \overline{U}_h + \overline{Z}_h \overline{I}_h \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

In cazul liniilor și transformatorilor $\overline{Z}_d = \overline{Z}_i$. Pentru mașinile rotative în general $\overline{Z}_d \neq \overline{Z}_i$.

Impedanța homopolară $\overline{Z}_h$ nu are o valoare finită decât dacă există un conducător neutru; în caz contrariu $\overline{Z}_h = \infty$.

Dacă $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$, $\overline{Z}_3$ sunt impedanțele celor trei faze ale sistemului, se definesc *impedanțele de calcul*

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathfrak{Z}}_h &= \frac{1}{3}(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \overline{Z}_3) \\ \overline{\mathfrak{Z}}_d &= \frac{1}{3}(\overline{Z}_1 + a\overline{Z}_2 + a^2\overline{Z}_3) \\ \overline{\mathfrak{Z}}_i &= \frac{1}{3}(\overline{Z}_1 + a^2\overline{Z}_2 + a\overline{Z}_3) \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Cu aceste elemente, se poate aplica a doua lege a lui Kirchhoff scrisă sub forma

$$S(\overline{V}) = S(\overline{\mathfrak{Z}}\cdot\overline{I}) = S(\overline{\mathfrak{Z}})\cdot S(\overline{I}) \qquad (77)$$

și ținându-se seama de relațiile (73).

12.2. Relația între coordonatele simetrice ale unui sistem de trei vectori concurenți și acelea ale sistemului de vectori care leagă vârfurile primului sistem. Fiind dat sistemul de vectori concurenți $S_1(\overline{V}) = (\overline{V}_1, \overline{V}_2, \overline{V}_3)$ și sistemul de vectori $S_2(\overline{U}) = (\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{U}_3)$ obținut prin legarea vârfurilor primului sistem (fig. 20), între componentele simetrice ale acestor sisteme există relațiile:

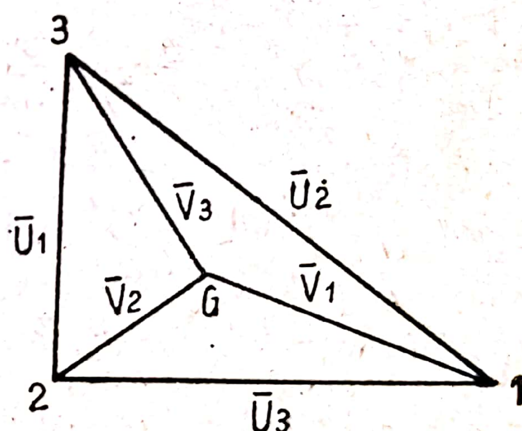


Fig. 20. Sistemele stea și triunghi corespunzătoare.

α) Dacă se ia ca vectori principali vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{U}_1$,

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_h &= 0 \\ \overline{U}_d &= \sqrt{3}\ \overline{V}_d \angle{-90^0} \\ \overline{U}_i &= \sqrt{3}\ \overline{V}_i \angle{90^0} \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

β) Dacă se ia ca vectori principali vectorii $\overline{V}_1$ și $\overline{U}_{12} = \overline{U}_3$,

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_h &= 0 \\ \overline{U}_d &= \sqrt{3}\ \overline{V}_d \angle{30^0} \\ \overline{U}_i &= \sqrt{3}\ \overline{V}_i \angle{-30^0} \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

In aceste expresii, $\overline{V}_d$, $\overline{V}_i$, $\overline{U}_d$, $\overline{U}_i$ reprezintă vectorii principali ai sistemelor stea și triunghi corespunzătoare.

12.3. Calculul circuitelor trifazate desechilibrate cu ajutorul componentelor simetrice. Problema generală se enunță:

fiind dată o rețea trifazată la care se cunosc impedanțele și tensiunile la borne se cere distribuția curenților și tensiunile pe fază.

α) *Rețeaua nu are fir neutru.* In acest caz

$$\overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 0 \text{ deci } \overline{I}_h = 0$$

Relațiile (77) dau

$$\left.\begin{aligned} \overline{V}_h &= \overline{\mathfrak{z}}_i \overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_d \overline{I}_i \\ \overline{V}_d &= \overline{\mathfrak{z}}_h \overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_i \overline{I}_i \\ \overline{V}_i &= \overline{\mathfrak{z}}_d \overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_h \overline{I}_i \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Ultimele două ecuații, ținând seama și de relațiile (78) dau componentele simetrice ale curenților

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}_d &= \frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{U}_d \overline{\mathfrak{z}}_h + \overline{U}_i \overline{\mathfrak{z}}_i}{\overline{\mathfrak{z}}_h^2 - \overline{\mathfrak{z}}_d \overline{\mathfrak{z}}_i} \\ \overline{I}_i &= -\frac{j}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\overline{U}_i \overline{\mathfrak{z}}_h + \overline{U}_d \overline{\mathfrak{z}}_d}{\overline{\mathfrak{z}}_h^2 - \overline{\mathfrak{z}}_d \overline{\mathfrak{z}}_i} \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Curenții pe faze $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$, $\overline{I}_3$ se deduc din relațiile:

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i \\ \overline{I}_2 &= \overline{I}_h + a^2\overline{I}_d + a\overline{I}_i \\ \overline{I}_3 &= \overline{I}_h + a\overline{I}_d + a^2\overline{I}_i \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

similare cu relațiile (71) pentru tensiuni. Introducând valorile componentelor simetrice $\overline{I}_d$ și $\overline{I}_i$ din relațiile (81) în relațiile (80) aflăm componentele simetrice ale tensiunilor $\overline{V}_h$, $\overline{V}_d$, $\overline{V}_i$. Inlocuind apoi aceste valori în relațiile (71) se găsesc tensiunile pe fază.

β) *Rețeaua are fir neutru.* Fie $\overline{E}_h$, $\overline{E}_d$, $\overline{E}_i$ componentele simetrice ale forțelor electromotoare induse în fazele alterna-

Scanned with OKEN Scanner

torului presupus disimetric, $\overline{Z}_o$, $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$ impedanțele alternatorului, $\overline{z}_h$, $\overline{z}_d$, $\overline{z}_i$, impedanțele de calcul ale liniei și sarcinii, $\overline{Z}_N$, impedanța firului neutru, $\overline{I}_h$, $\overline{I}_d$, $\overline{I}_i$ componentele simetrice ale curenților pe faze, ecuațiile generale ale sistemulu sunt

$$\left.\begin{aligned} \overline{E}_h &= (\overline{z}_h + \overline{Z}_o + 3\overline{Z}_N)\overline{I}_h + \overline{z}_i\overline{I}_d + \overline{z}_d\overline{I}_i \\ \overline{E}_d &= \overline{z}_d\overline{I}_h + (\overline{z}_h + \overline{Z}_s)\overline{I}_d + \overline{z}_i\overline{I}_i \\ \overline{E}_i &= \overline{z}_i\overline{I}_h + \overline{z}_d\overline{I}_d + (\overline{z}_h + \overline{Z}_a)\overline{I}_i \end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Când alternatorul este simetric, $\overline{E}_h = \overline{E}_i = 0$.

Când alternatorul este de putere infinită, $\overline{Z}_0 = \overline{Z}_s = \overline{Z}_a = 0$.

12.4. Calculul curenților de scurtcircuit. Determinarea componentelor simetrice ale curenților de scurtcircuit se face cu ajutorul schemei echivalente, corespunzătoare fiecărui tip de defect în parte. Pentru construirea schemei echivalente este necesară determinarea impedanțelor directă, inversă și homopolară a circuitului dat, redus la punctul defectului.

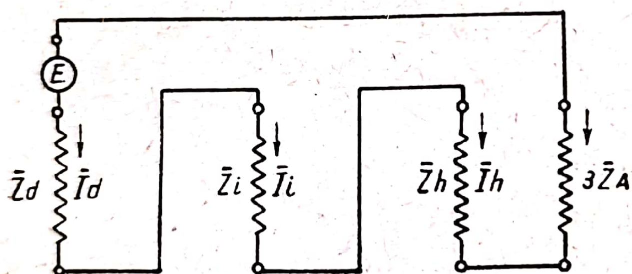


Fig. 21. Schema echivalentă a unui scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc.

Calculul componentelor simetrice ale curenților se face aplicând legile lui Kirchhoff circuitului echivalent, forța electromotoare de referință fiind introdusă în circuitul impedanței directe.

Când defectul se produce printr'un arc electric se mai adaugă în circuit și impedanța acestuia.

Schemele echivalente ale celor patru tipuri de defecte, la care se pot reduce toate celelalte, sunt:

α) *Scurtcircuit al unei faze la pământ* (fig. 21). In acest caz

$$\overline{I}_h = \overline{I}_d = \overline{I}_i$$

şi

$$\bar{E}_d = \bar{E} - \bar{Z}_d \bar{I}_d$$
$$\bar{E}_i = -\bar{Z}_i \bar{I}_i$$
$$\bar{E}_h = -\bar{Z}_h \bar{I}_h$$

Dacă nu există arc, $\bar{Z}_A = 0$.

β) *Scurtcircuit între două faze și la pământ* (fig. 22). In acest caz

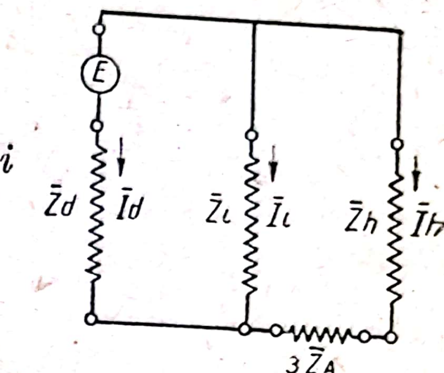


Fig. 22. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze şi la pământ, cu arc.

$$\bar{E}_d = \bar{E}_i$$
$$\bar{E}_h - \bar{E}_d = 3\bar{Z}_A \bar{I}_h$$

şi

$$\bar{I}_h + \bar{I}_d + \bar{I}_i = 0$$

Când nu există arc, $Z_A = 0$.

γ) *Scurtcircuit între două faze, izolat de pământ* (fig. 23). In acest caz

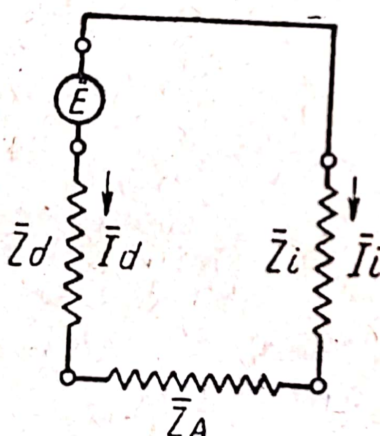


Fig. 23. Schema echivalentă a unui scurtcircuit între două faze, izolat de pământ, cu arc.

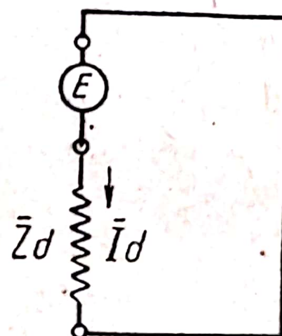


Fig. 24. Schema echivalentă a unui scurtcircuit trifazat.

$$\bar{I}_h = 0 \quad \bar{I}_d = -\bar{I}_i$$
$$\bar{E}_h = 0 \quad \bar{E}_d - \bar{E}_i = \bar{Z}_A \bar{I}_d$$

Când nu există arc, $Z_A = 0$.

δ) *Scurtcircuit între toate trei fazele* (fig. 24). In acest caz circuitul este simetric şi

$$\bar{I}_h = \bar{I}_i = 0.$$

După determinarea componentelor simetrice ale curenților se calculează curenții pe faze.

In rețetele cu mai multe trepte de tensiune, calculul curenților de scurtcircuit se face reducând, inițial, toate elementele rețelei la o tensiune de referință, iar apoi, după determinarea curenților reduși la această tensiune, ei se recalculează în raport cu tensiunile reale din rețea.

Observație. Valorile mărimilor de scurt circuit determinate corespund momentului pentru care au fost determinate reactanțele.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA IV

REGIMUL TRANZITORIU

13. STUDIUL DIRECT AL REGIMULUI TRANZITORIU

(Problemele 13.1 – 13.45)

13.1. Regimul tranzitoriu de funcționare al unui sistem electric se obține din suprapunerea peste regimul permanent de funcționare, a unui regim liber, neimpus de vreo forță electromotoare oarecare. Matematic, expresia regimului tranzitoriu se obține adăugând soluției generale a ecuației diferențiale (fără membrul al doilea), de funcționare a sistemului, o soluție particulară corespunzând expresiei tensiunii din membrul al doilea.

Ecuația de funcționare a unui circuit electric este de forma

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = E(t). \qquad (84)$$

Soluția acestei ecuații se obține ușor dacă coeficienții R, L și C sunt cantități constante. In caz contrar problema este mai dificilă și nu se mai poate rezolva prin metode elementare.

13.2. Circuit serie format dintr'o rezistență și o inductanță. Ecuația diferențială de funcționare a acestui circuit este

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E(t)$$

a cărui soluție este (regimul tranzitoriu)

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0})\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \qquad (85)$$

în care i_p este curentul permanent, i_{p0} valoarea acestui curent la timpul $t = 0$, i_0 valoarea curentului total la timpul $t = 0$ și ε baza logaritmilor neperieni.

Scanned with OKEN Scanner

Soluțiile diverselor probleme se obțin determinându-se valorile acestor trei mărimi.

Raportul (L/R) se numește *constanta de timp* (τ) a circuitului. Inversul său se numește *constanta de atenuare* (δ).

13.3. Circuit serie format dintr'o rezistență și o capacitate. Ecuația diferențială este

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt = E(t)$$

sau

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

în care q este cantitatea de electricitate înmagazinată de capacitate.

Regimul tranzitoriu corespunzător este

$$q = q_p + (q_0 - q_{p0})\,\varepsilon^{-\frac{t}{CR}}, \qquad (86)$$

q_p, q_{p0} și q_0 având semnificații analoage cu acelea din § 13.2. RC este constanta de timp a circuitului.

Curentul de încărcare (sau descărcare) al condensatorului este dat de relația

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (87)$$

iar tensiunea la bornele condensatorului de relația

$$u = \frac{1}{C}\,q. \qquad (88)$$

13.4. Circuit serie format dintr'o rezistență, o inductanță și o capacitate. Funcționarea acestui circuit este dată de ecuația (84) care se mai poate scrie ținând seama de relațiile (87) și (83):

$$CL\frac{d^2u}{dt^2} + CR\frac{du}{dt} + u = CE(t) \qquad (89)$$

Regimul tranzitoriu este dat de relațiile:

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega' L}\left[(i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,sh\,(\Omega' t - \alpha') + (u_0 - u_{p0})\,sh\,\Omega' t\right] \\ u &= u_p + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega'\sqrt{CL}}\left[(u_0 - u_{p0})\,sh\,(\Omega' t + \alpha') + (i_0 - i_{p0})\sqrt{\frac{L}{C}}\,sh\,\Omega' t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

în care i_p, i_{p0}, i_0, u_p, u_{p0}, u_0 au semnificațiile date mai sus,

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

$$\Omega' = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

$$\text{tgh}\ \alpha' = \frac{\Omega'}{\delta}.$$

Se pot prezenta trei cazuri:

α) $\Omega'^2 > 0$. Circuitul este *aperiodic* și regimul tranzitoriu este dat de relațiile (90).

β) $\Omega'^2 < 0$. Circuitul este *oscilant* și regimul tranzitoriu este dat de relațiile

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L}\left[(i_o - i_{po})\sqrt{\frac{L}{C}}\sin(\Omega t - \alpha) + (u_o - u_{po})\sin \Omega t\right] \\ u &= u_p + \frac{\varepsilon^{-t}}{\Omega\sqrt{CL}}\left[(u_o - u_{po})\sin(\Omega t + \alpha) + (i_o - i_{po})\sqrt{\frac{L}{C}}\sin \Omega t\right] \end{aligned}\right\} \quad (91)$$

în care

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\Omega}{\delta},$$

Ω fiind *pseudopulsația* și $T = 2\pi/\Omega$, *pseudoperioada* sau *perioada proprie* a circuitului.

Expresia

$$\gamma = \ln \frac{Y_{11}}{Y_{12}} = \delta T$$

în care Y_{11} și Y_{12} sunt două amplitudini de același sens diferind printr'o pseudoperioadă, se numește *decrementul logaritmic al oscilațiilor*.

γ) $\Omega'^2 = 0$. Circuitul este *aperiodic critic* şi regimul tranzitoriu este dat de relaţiile:

$$\left.\begin{aligned} i &= i_p - \varepsilon^{-\delta t}\left[-(i_0 - i_{p0}) + \left(\frac{i_0 - i_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{u_0 - u_{p0}}{L}\right)t\right] \\ u &= u_p + \varepsilon^{-\delta t}\left[(u_0 - u_{p0}) + \left(\frac{u_0 - u_{p0}}{\sqrt{CL}} + \frac{i_0 - i_{p0}}{C}\right)t\right] \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

Pentru a găsi regimul tranzitoriu de încărcare al condensatorului, în oricare din cazurile de mai sus, se aplică relaţia (88).

14. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CANTITĂŢILOR COMPLEXE ŞI AL CALCULULUI OPERAŢIONAL

(Problemele 14.1—14.42)

14.1. Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul cantităţilor complexe. Se aplică numai regimului liber, regimul permanent sau forţat calculându-se în mod obişnuit cu aceste mărimi. Regimul tranzitoriu se obţine apoi suprapunându-se cele două regimuri şi determinându-se constantele prin condiţii de limită.

Curentul sau tensiunea regimului liber poate fi exprimat printr'o funcţie, sau o sumă de funcţii, de forma

$$i = I\,\varepsilon^{-\delta t}\cos(\Omega t + \psi) \qquad (93)$$

în care I şi ψ sunt constante ce urmează a fi determinate din condiţiile de funcţionare ale circuitului, iar δ şi Ω sunt mărimi reale.

Dacă $\delta = 0$ şi $\Omega = 0$, expresia (93) reprezintă un curent continuu.

Dacă $\delta \neq 0$ şi $\Omega = 0$, expresia (93) reprezintă un curent aperiodic.

Dacă $\delta = 0$ şi $\Omega \neq 0$. expresia (93) reprezintă un curent alternativ sinusoidal.

Dacă $\delta \neq 0$ şi $\Omega \neq 0$, expresia (93) reprezintă un curent alternativ sinusoidal amortizat.

Punând

$$\overline{p} = -\delta + j\Omega \qquad (94)$$

expresia (93) poate fi scrisă

$$\overline{I} = I\,\varepsilon^{\overline{p}t + j\psi} \qquad (95)$$

Rezolvarea unui regim tranzitoriu (regimul liber) cu ajutorul cantităţilor complexe, se face înlocuind în ecuaţia (84) fără membru al doilea, simbolul $\frac{d}{dt}$ prin $\bar{p}$, $\frac{d^2}{dt^2}$ prin $\bar{p}^2$, $\int_0^t (\quad) dt$ prin $\frac{1}{\bar{p}}$, etc. şi rezolvând ecuaţia algebrică în $\bar{p}$ astfel obţinută, fie direct, fie înlocuind pe $\bar{p}$ cu expresia sa (94) şi valorile instantanee, prin cantităţile complexe. Identificând părţile reale şi cele imaginare, se obţine un sistem de două ecuaţii care dau pe δ şi pe Ω. Se alege numai soluţia care dă valori reale pentru aceste mărimi. Introducând apoi aceste valori în (93) se găseşte soluţia căutată.

Dacă se cunoaşte ecuaţia de funcţionare a unui circuit în funcţie de $\bar{p}$, se poate trece şi invers, la ecuaţia diferenţială corespunzătoare prin înlocuirea lui $\bar{p}$ prin simbolurile de diferenţiere sau integrare corespunzătoare.

Analog cu impedanţa complexă din regimul permanent, se poate scrie impedanţa complexă generalizată a circuitului sub forma:

$$\bar{Z} = R + \bar{p}L + \frac{1}{\bar{p}C} \tag{96}$$

In cazul unei inductanţe mutuale

$$X = \bar{p}M. \tag{97}$$

14.2. Studiul regimului tranzitoriu cu ajutorul calculului operaţional (Transformarea lui Laplace). Transformarea lui Laplace este definită de integrala:

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \varepsilon^{-pt} f(t)\, dt \tag{98}$$

în care t este o variabilă reală, p este o variabilă complexă, iar ε este baza logaritmilor neperieni.

Funcţia $\varphi(p)$ se numeşte *imaginea* funcţiei $f(t)$, denumită *originalul* funcţiei $\varphi(p)$. Aceasta se exprimă simbolic prin relaţiile:

$$\varphi(p) = \mathfrak{L}f(t)$$

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\varphi(p).$$

Impedanța operațională este dată de relația:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \tag{99}$$

analoagă cu relația (96). Deasemenea în cazul unei inductanțe mutuale

$$X(p) = pM.$$

Legea lui Ohm în calculul operațional este:

$$\mathfrak{L}u = Z(p) \cdot \mathfrak{L}i.$$

Rezolvarea unui regim tranzitoriu cu ajutorul calculului operațional se face după următoarele reguli:

α) Se scrie ecuația diferențială a circuitului, căruia i se aplică apoi transformata lui Laplace. Se obține astfel o ecuație algebrică în p, care se rezolvă în raport cu mărimea căutată (curentul sau tensiunea) găsindu-se astfel funcția imagine a mărimii căutate.

β) In cazul când este foarte greu sau imposibil a se scrie direct ecuația diferențială a circuitului, atunci se scrie relația între funcțiile imagine ale curentului şi tensiunii şi impedanța operațională. Ecuațiile obținute se rezolvă ca mai sus.

γ) După ce s'a determinat funcția imagine căutată, se determină funcția original a acesteia, fie direct, cu ajutorul regulelor calculului operațional, fie luând din tabele expresia acesteia.

Spre deosebire de metoda cantităților complexe, calculul operațional dă soluția complectă a problemei de regim tranzitoriu.

Observație importantă. In multe lucrări din literatura de specialitate se utilizează calculul operațional bazat pe transformarea lui Carson, definită prin integrala:

$$\psi(p) = p \int_0^{\infty} \varepsilon^{-pt} f(t)\, dt.$$

Intre funcția imagine a lui Carson şi funcția imagine a lui Laplace există relația:

$$\psi(p) = p\, \varphi(p).$$

Este necesar a se ține seama de această relație în cazul utilizării tabelelor de transformare, dacă acestea sunt scrise într'un alt sistem decât acel folosit în calcul.

14.3. Studiul funcționării liniilor lungi cu ajutorul calculului operațional. Fie r, l, c şi g constantele unei linii lungi

exprimate pe unitatea de lungime. Aplicând transformarea lui Laplace ecuațiilor unei linii lungi, acestea devin

$$-\frac{d\,\mathfrak{L}u}{dx} = (pl + r)\,\mathfrak{L}i \tag{100}$$

$$-\frac{d\,\mathfrak{L}i}{d\,x} = (pc + g)\,\mathfrak{L}u \tag{101}$$

trebuește observat că $\mathfrak{L}u$ este funcție de x și de p. Se obișnuește a se considera p ca un parametru și pentru aceste motive s'a scris derivata totală în loc de cea parțială. Același lucru pentru $\mathfrak{L}i$.

Eliminând pe $\mathfrak{L}i$ între ecuațiile (100) și (101) se obține

$$\frac{d^2\mathfrak{L}u}{dx^2} - \alpha^2\mathfrak{L}u = 0 \tag{102}$$

în care:

$$\alpha^2 = (pl + r)\,(pc + g)$$

i a cărui integrală este de forma

$$\mathfrak{L}u = A\ ch\ \alpha x + B\ sh\ \alpha x, \tag{103}$$

A și B fiind constantele de integrare, care pot fi funcții de p și care se determină prin condiții de limită.

Rezultă apoi

$$\mathfrak{L}i = -\frac{1}{\beta}\,(A\ sh\ \alpha x + B\ ch\ \alpha x) \tag{104}$$

în care

$$\beta = \frac{pl + r}{\alpha} = \sqrt{\frac{pl + r}{pc + g}}\,.$$

Expresiile (103) și (104) constitue soluțiile operaționale ale sistemului (100), (101).

Pentruca soluțiile sistemului să fie unice, este necesar ca α și β să nu aibe mai mult de o valoare; pentru aceasta se ia numai valoarea lui α pentru care

$$\mathfrak{R}\,(\alpha) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant arg\ \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\,.$$

In cazul unei linii fără pierderi, imaginile soluțiilor sunt date tot de relațiile (103) și (104) în care

$$\alpha = p\sqrt{lc} \quad \text{și} \quad \beta = \sqrt{\frac{l}{c}}\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Trecerea la originalele tensiunilor sau curenților se face prin metodele obișnuite de calcul operațional sau cu ajutorul tabelelor.

15. STUDIUL SISTEMELOR NELINEARE

(Problemele 15.1 — 15.24)

15.1. Definiții. Legea a doua a lui Kirchhoff poate fi scrisă, în cazul cel mai general sub forma

$$\sum e = \sum Ri + \sum \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} + \sum \int \frac{i}{C}\,\mathrm{d}t, \qquad (105)$$

în suma $\sum \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t}$ fiind cuprinse atât forțele electromotoare de inducție proprie cât și acelea de inducție mutuală.

În raport cu parametrii R, L și C ai ecuației de funcționare (105), circuitele electrice pot fi împărțite în patru categorii

a) Circuite a căror parametri sunt constanți;

b) Circuite a căror parametri variază numai cu timpul;

c) Circuite a căror parametri variază cu curentul sau cu tensiunea fiind independente de timp;

d) Circuite a căror parametri variază atât cu curentu sau cu tensiunea cât și cu timpul.

Din categoria (*a*) fac parte circuitele din sistemele lineare și metodele de rezolvare sunt acelea clasice.

Caracteristicele de funcționare ale acestor parametri sunt linii drepte.

Din categoria (*b*) fac parte circuitele la care parametrii sunt funcții explicite de timp și independente de curent sau tensiune.

Ecuațiile de funcționare ale circuitelor electrice caracteristice corespunzătoare sunt

pentru circuitul rezistent $u_R = R_t\, i$

pentru circuitul inductiv $u_L = \frac{\mathrm{d}(L_t i)}{\mathrm{d}t} = L_t \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\,\frac{\mathrm{d}L_t}{\mathrm{d}t}$

pentru circuitul capacitiv $u_C = \int \frac{i}{C_t}\,\mathrm{d}t$

respectiv $i = \frac{\mathrm{d}(C_t u_C)}{\mathrm{d}t} = C_t \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \frac{\mathrm{d}C_t}{\mathrm{d}t}$.

Scanned with OKEN Scanner

Problemele de această natură se rezolvă direct, obținându-se soluția completă a problemei. Rezolvarea este ușoară dacă ecuația (105) are numai unul din parametri variabili. In caz contrariu, rezolvarea analitică este mai complicată și necesită rezolvarea unor ecuații integro-diferențiale [1]).

La acest gen de probleme se poate aplica principiul suprapunerii efectelor.

Caracteristica de funcționare a acestor parametri este formată dintr'o familie de drepte având originea ca punct comun.

Din categoria (*c*) fac parte circuitele la care parametrii sunt funcții implicite de timp, prin intermediul curentului sau tensiunii (s. ex. bobinele cu miez de fier). Caracteristica de funcționare a acestor parametri se determină numai experimental. Acești parametri se numesc *parametri* sau *elemente nelineare.*

Caracteristica de funcționare a acestor parametri este o curbă care nu se poate deduce decât experimental.

Rezolvarea acestor probleme se face prin mijloace speciale sau cu ajutorul mașinilor de calcul speciale. La asemenea probleme nu se poate aplica principiul suprapunerii efectelor decât în cazuri cu totul particulare.

Din categotia (*d*) fac parte circuitele electrice numite cu *elemente* sau *parametri nelineari variabili în timp* (s. ex. tuburile electronice cu mai mulți electrozi). Caracteristica de funcționare a acestor parametri este formată dintr'o familie de curbe trecând prin origină.

Pentru circuitele conținând asemenea parametri, principiul suprapunerii efectelor nu se poate aplica. Soluția exactă a acestor probleme este în general imposibil de obținut; se obțin soluții aproximative prin reducerea circuitului la unul cu parametrii variind în timp, sau prin metode grafice aproximative, ori cu ajutorul mașinilor de calcul speciale.

15.2. Metodele generale de calcul ale sistemelor nelineare. Rezolvarea sistemelor nelineare se face prin una din metodele următoare:

a) *Integrarea grafică*, care se efectuează aplicând regulile cunoscute de integrare grafică. In cazul unei ecuații de ordinul I, se procedează prin separarea variabilelor și cuadratură simplă (evaluarea ariei cuprinsă între curba reprezentativă a funcției de sub semnul integralei).

---

[1]) *Sergiu Vasilache*: O nouă metodă de calcul a rețelelor electrice cu parametri variabili (Analele Academiei R.P.R., Tomul III, Memoriile 13 și 22).

b) *Soluție semigrafică*, care constă în înscrierea unui contur poligonal în caracteristica nelineară a parametrului corespunzător și tratându-se fiecare element al conturului ca un sistem linear. Soluția generală a problemei se obține racordându-se diversele soluții parțiale obținute prin condiții comune la limită.

c) *Aproximarea printr'o coardă unică.* Se înlocuește caracteristica de funcționare a elementului nelinear printr'o coardă unică, transformându-l astfel într'un element linear. Aproximația obținută este mai puțin precisă.

O altă aproximație ce se poate face este de a se înlocui coarda printr'o secantă.

d) *Aproximarea printr'o curbă analitică.* Sunt multe cazuri când caracteristica de funcționare a elementului nelinear poate fi aproximată printr'o curbă analitică, deobicei printr'o parabolă de gradul n, sub forma

$$i = K u^n \tag{106}$$

în care K și n sunt constante, u fiind tensiunea la bornele elementului nelinear și i curentul ce-l străbate. Constantele K și n se determină construind ecuația (106) pe o hârtie dublu logaritmică; se obține dreapta

$$\log i = \log K + n \log u,$$

determinându-se astfel cele două constante. Cunoscând funcția (106), calculul se poate face analitic.

15.3. Studiul stabilitătii functionării circuitelor electrice. Funcționarea unui circuit electric se consideră stabilă dacă fenomenul tranzitoriu se amortizează după un timp a cărui mărime depinde de parametrii circuitului (constanta de timp a circuitului). Pentruca această condiție să fie satisfăcută, trebue ca factorul de atenuare δ să fie pozitiv. In caz contrariu circuitul nu se amortizează și poate fi sediul unor oscilații autoîntreținute.

Pentruca un sistem să fie stabil este necesar ca cel puțin una din rădăcinile ecuației caracteristice a ecuației diferențiale de funcționare a sistemului să aibe partea reală negativă, dacă rădăcina este complexă, sau să fie negativă, dacă rădăcina este reală.

Studiul stabilității se poate face rezolvînd ecuația caracteristică sau aplicând diversele criterii de stabilitate. Prima metodă, directă, poate fi uneori foarte dificilă, ecuațiile de grad mai mare ca doi rezolvîndu-se destul de dificil.

Dintre criteriile de stabilitate se indică următoarele două: a) *Criteriul lui Hurwitz,* pentru sistemele oscilante și b) *criteriul lui Meerov* pentru sistemele aperiodice.

a) *Criteriul lui Hurwitz.* Fiind dată ecuația algebrică

$$a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (107)$$

în care $a_0 > 0$, scriind determinantul

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \dots\dots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \dots\dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots a_n \end{vmatrix} \qquad (108)$$

condiția necesară și suficientă pentruca toate rădăcinile ecuației (107) să aibe partea reală negativă este ca cei n determinanți ,,minori principali'' ai determinantului (108) să fie pozitivi. Determinanții ,,minori principali'' ai determinantului Δ_H sunt acei încadrați cu linii punctate.

b) *Criteriul lui Meerov.* Considerând aceiași ecuație (107), condiția de stabilitate în cazul regimului aperiodic este satisfăcută dacă minorii principali ai determinantului

$$\Delta_M = \begin{vmatrix} na_0 & a_0 & 0 & \dots\dots \\ (n-1)\,a_1 & a_1 & na_0 & \dots\dots \\ (n-2)a_2 & a_2 & (n-1)a_1 & \dots\dots \\ (n-3)a_3 & a_3 & (n-2)a_2 & \dots\dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots \end{vmatrix} \qquad (109)$$

sunt mai mari decât zero.

15. 4. Regimul critic de funcționare al unui sistem electric. Acest regim constitue funcționarea limită între regimul de funcționare stabilă și regimul de funcționare instabilă. In acest caz sistemul nu are termen de amortizare și deci rădăcinile ecuației caracteristice (107) sunt pur imaginare. Condițiile pe care trebue să le îndeplinească coeficienții ecuației

Scanned with OKEN Scanner

(107) pentru ca funcționarea sistemului să fie critică, se obțin substituind în ecuația caracteristică o rădăcină de forma $x = \pm j\Omega$ și separând părțile reale de cele imaginare; se găsesc două relații între care se elimină parametrul Ω obținându-se astfel condițiile căutate.

15.5. Condiția de funcționare a unui regim nestabil sau de producere a oscilațiilor autoîntreținute. Dacă cel puțin una din condițiile lui Hurwitz nu este satisfăcută, atunci sistemul nu este stabil.

Pentru a găsi condițiile pe care trebue să le îndeplinească coeficienții ecuației caracteristice pentruca regimul de funcționare reprezentat de ecuația diferențială corespunzătoare să fie instabil, se alege din inegalitățile lui Hurwitz pe acelea care dau condiția de funcționare în regim critic și se schimbă semnul acelor inegalități.

PARTEA V

UTILIZAREA CALCULULUI MATRICIAL IN ELECTROTEHNICĂ

16. NOŢIUNI DE ALGEBRĂ MATRICIALĂ

(Problemele 16.1—16.15)

16.1. Definiţii şi proprietăţi. Calculul matricial este folosit ca un instrument de rezolvare pentru sistemele electrice având un mare număr de grade de libertate.

O matrice este un sistem de $m \times n$ cantităţi, reale sau complexe, aşezate într'un tablou de m linii şi n coloane şi se notează [1]) :

$\| A \| = \| a_{jk} \| =$

a_{11}	a_{12}		a_{1k}		a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2k}		a_{2n}
a_{j1}	a_{j2}		a_{jk}		a_{jn}
a_{m1}	a_{m2}		a_{mk}		a_{mn}

[1]) Există diferite moduri de a nota o matrice. Astfel:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

etc. In aplicaţiile tehnice se preferă notaţia în căsuţe adoptată în text, deoarece astfel se evită cauzele erorilor ce ar putea apărea prin confundarea diverselor elemente.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $m \neq n$, matricea se numeşte *dreptunghiulară* sau *tensor*.

Dacă $m = n$, matricea se numeşte *pătratică*. Orice matrice dreptunghiulară poate fi făcută pătratică prin adăugirea de linii sau coloane nule.

Dacă $m = 1$ şi n oarecare, sau invers, m oarecare şi $n = 1$ matricea se numeşte *lineară*, sau *vector*.

Dacă $a_{jj} \neq 0$ şi $a_{jk} = 0$, matricea se numeşte *diagonală*.

Dacă $a_{jj} = 1$ şi $a_{jk} = 0$, matricea se numeşte *unitate*. Matricea unitate are toate proprietăţile unităţii din algebră.

Dacă $a_{jj}=a_{jk}=0$, matricea se numeşte *zero*. Ea are toate proprietăţile acestei cifre din algebră.

Matricea pătratică la care $a_{jk}=a_{kj}$ se numeşte *simetrică*.

Matricea ce se obţine dintr'o matrice dată schimbând liniile şi coloanele între ele se numeşte matricea *transpusă*. Pentru matricea diagonală şi pentru matricea simetrică $\| A_t \| = \| A \|$.

Două matrice sunt egale dacă au acelaşi număr de elemente şi dacă elementele corespunzătoare sunt egale.

Dacă elementele unei matrice sunt mărimi complexe, matricea se numeşte *complexă*.

Matricea ale cărei elemente sunt formate din conjugatele elementelor unei matrice complexe se numeşte *matricea conjugată* a acesteia.

Matricea inversă a unei matrice date este matricea care înmulţită cu matricea dată, dă ca rezultat o matrice unitate.

Matricea inversă a unei matrice date $\| A \|$, se notează, cu simbolul $\| A \|^{-1}$ şi se calculează astfel:

1° Se scrie matricea $\| A_t \|$, transpusa matricei $\| A \|$.

2° Se înlocueşte fiecare element al matricei $\| A_t \|$ prin determinatul obţinut ştergând linia şi coloana elementului considerat.

3° Acestor determinanţi li se dă semnul (+) sau (—) după cum suma indicilor elementului respectiv este pară sau impară.

4° Se împarte matricea astfel obţinută prin Δ, determinantul matricei $\| A \|$.

Un element al matricei inverse va fi deci:

$$b_{jk} = (-1)^{j+k} \frac{\delta_{jk}}{\Delta}.$$

Numai o matrice pătratică poate avea o matrice inversă. Matricea inversă este o matrice pătratică.

Dacă matricea $\| A \|$ este simetrică şi matricea $\| A \|^{-1}$ este simetrică.

Dacă matricea $\| A \|$ este diagonală şi matricea $\| A \|^{-1}$ este diagonală.

Dacă determinatul matricei $\| A \|$ este nul, atunci matricea inversă nu există. Se zice că matricea este singulară.

16.2. Operaţii cu matricele. α) *Adunarea şi scăderea.* Numai matricele cu acelaşi număr de linii şi coloane pot fi adunate sau scăzute, rezultatul fiind o matrice de acelaşi ordin având elementele egale cu suma sau diferenţa elementelor corespunzătoare. Deci :

$$c_{jk} = a_{jk} \pm b_{jk}$$

Unei matrice i se pot adăuga oricâte linii sau coloane nule fără ca să i se schimbe valoarea.

β) *Inmulţirea matricelor.* Produsul a două matrice este o matrice având acelaşi număr de linii ca matricea de înmulţit şi acelaşi număr de coloane ca matricea înmulţitor.

Pentru a obţine elementul c_{jk} al matricei produs, se înmulţeşte fiecare element al liniei j cu fiecare element al coloanei k a celei de a doua matrice şi se adună rezultatul. Rezultă dar :

$$c_{jk} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\, b_{lk}$$

Produsul a două matrice nu este comutativ.

γ) *Puterea unei matrice.* Prin definiţie

$$\| A \|^p = \underbrace{\| A \| \cdot \| A \| \cdots\cdots \| A \|}_{p \text{ factori}}.$$

Deasemenea

$$\| A \|^0 = \| 1 \|$$

δ) *Impărţirea matricelor.* Impărţirea unei matrice nu se poate face decât cu o matrice pătratică nesingulară, deoarece

$$\| C \| = \| A \| : \| B \| = \| B \|^{-1} \cdot \| A \| .$$

Ultimul produs nu este comutativ.

16.3. Ordinea matricelor. α) Intr'un produs, ordinea matricelor nu poate fi schimbată :

$$\| A \| \cdot \| B \| \neq \| B \| \cdot \| A \|$$

sau

$$(\|A\| \cdot \|B\|) \cdot \|C\| \neq \|A\| \cdot \|C\| \cdot \|B\|$$

Excepții: 1⁰ Dacă una din matrice este unitară.

2⁰ $(\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C\|)_t = \|C_t\| \cdot \|B_t\| \cdot \|A_t\|$

$$(\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C\|)^{-1} = \|C\|^{-1} \cdot \|B\|^{-1} \cdot \|A\|^{-1}.$$

16.4. Ecuații cu matrice. Ecuațiile matriciale se rezolvă ca și ecuațiile algebrice, cu singura deosebire că o matrice nu poate fi trecută dintr'un membru în celălalt prin înmulțirea cu inversa acestei matrice decât dacă această matrice nu este singulară.

16.5. Matricea compusă. Orice matrice poate fi descompusă într'un număr oarecare de părți mai mici, fiecare parte formând la rândul ei o matrice. O matrice al cărui fiecare element este o matrice, se numește o matrice compusă.

La o matrice compusă

$$\|Z\| = \left\| \begin{array}{c|c} \|A\| & \|B\| \\ \hline \|C\| & \|D\| \end{array} \right\|$$

matricea transpusă este

$$\|Z\|_t = \left\| \begin{array}{c|c} \|A_t\| & \|C_t\| \\ \hline \|B_t\| & \|D_t\| \end{array} \right\|$$

16.6. Derivata și integrala unei matrice. Dacă elementele unei matrice sunt funcții de timp și p simbolul de derivare, atunci

$$\frac{\mathrm{d}\|A\|}{\mathrm{d}t} = p\|A\| = \|pa_{jk}\|$$

și

$$\int_{t_0}^{t} \|A\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\|A\| = \left\|\frac{a_{jk}}{p}\right\|$$

Scanned with OKEN Scanner

17. STUDIUL REŢETELOR ELECTRICE

(Problemele 17.1—17.35)

17.1. Studiul cuadripolului. Ecuaţiile cuadripolului fiind

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{A}\,\overline{U}_2 + \overline{B}\,\overline{I}_2 \\ \overline{I}_1 &= \overline{C}\,\overline{U}_2 + \overline{D}\,\overline{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

ele se pot scrie sub forma matricială

$$\| E_1 \| = \| \gamma \| \cdot \| E_2 \| \qquad (110)$$

în care

$$\| E_1 \| = \begin{vmatrix} \overline{U}_1 \\ \overline{I}_1 \end{vmatrix}, \quad \| E_2 \| = \begin{vmatrix} \overline{U}_2 \\ \overline{I}_2 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \| \gamma \| = \begin{vmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{vmatrix},$$

$\| \gamma \|$ se numeşte *matricea caracteristică* a cuadripolului.

Ecuaţiile cuadripolului în raport cu curenţii fiind

$$\left.\begin{aligned} \overline{I}_1 &= \overline{Y}_{11}\overline{U}_1 + \overline{Y}_{12}\overline{U}_2 \\ \overline{I}_2 &= \overline{Y}_{21}\overline{U}_1 + \overline{Y}_{22}\overline{U}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

în care

$$\overline{Y}_{11} = \frac{\overline{D}}{\overline{B}}, \quad \overline{Y}_{12} = -\overline{Y}_{21} = \frac{1}{\overline{B}}, \quad \overline{Y}_{22} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

ecuaţia matricială corespunzătoare este:

$$\| I \| = \| \eta \| \cdot \| U \|, \qquad (112)$$

$\| \eta \|$, matricea coeficienţilor, se numeşte *matricea admitanţă* a cuadripolului.

Ecuaţiile cuadripolului în raport cu tensiunile fiind

$$\left.\begin{aligned} \overline{U}_1 &= \overline{Z}_{11}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{12}\overline{I}_2 \\ \overline{U}_2 &= \overline{Z}_{21}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{22}\overline{I}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$\overline{Z}_1 = \frac{\overline{A}}{\overline{C}}, \quad \overline{Z}_{12} = -\overline{Z}_{21} = \frac{1}{\overline{C}}, \quad \overline{Z}_{22} = -\frac{\overline{D}}{\overline{C}},$$

ecuația matricială este:

$$\| U \| = \| \zeta \| \cdot \| I \|, \tag{114}$$

$\| \zeta \|$, matricea coeficienților, se numește *matricea impedanță* a cuadripolului.

Intre matricea admitanță și matricea impedanță există relația

$$\| \zeta \| = \| \eta \|^{-1}$$

Cele trei matrice se pot scrie una în funcție de cealaltă, obținându-se:

$$\| \gamma \| = \begin{Vmatrix} \overline{A} & \overline{B} \\ \overline{C} & \overline{D} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\overline{Y}_{12}} \begin{Vmatrix} \overline{Y}_{22} & -1 \\ |\eta| & -\overline{Y}_{11} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\overline{Z}_{12}} \begin{Vmatrix} -\overline{Z}_{11} & |\zeta| \\ -1 & \overline{Z}_{22} \end{Vmatrix}$$

$$\| \eta \| = \frac{1}{\overline{B}} \begin{Vmatrix} \overline{D} & -1 \\ 1 & -\overline{A} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} \end{Vmatrix} = \frac{1}{|\xi|} \begin{Vmatrix} \overline{Z}_{22} & -\overline{Z}_{12} \\ -\overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{11} \end{Vmatrix}$$

$$\| \zeta \| = \frac{1}{\overline{C}} \begin{Vmatrix} \overline{A} & -1 \\ 1 & -\overline{D} \end{Vmatrix} = \frac{1}{|\eta|} \begin{Vmatrix} \overline{Y}_{22} & -\overline{Y}_{21} \\ -\overline{Y}_{12} & \overline{Y}_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} \\ \overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} \end{Vmatrix}$$

17.2. Legarea cuadripolilor. α) *Legarea în lanț.* Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (110) obținându-se matricea caracteristică a cuadripolului rezultant

$$\| \gamma \| = \| \gamma' \| \cdot \| \gamma'' \| \cdots \| \gamma^{(n)} \|. \tag{115}$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\| \gamma \| = \| \gamma' \|^n$$

Scanned with OKEN Scanner

β) *Legarea în paralel.* Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (112) și matricea admitanță a cuadripolului rezultant este :

$$\| \eta \| = \| \eta' \| + \| \eta'' \| + \ldots . + \| \eta^{(n)} \| . \tag{116}$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\| \eta \| = n \| \eta \| .$$

γ) *Legarea în serie.* Se utilizează ecuația cuadripolului sub forma (114) și matricea impedență a cuadripolului rezultant este

$$\| \zeta \| = \| \zeta' \| + \| \zeta'' \| + \ldots . + \| \zeta^{(n)} \| . \tag{117}$$

Dacă sunt identici cuadripolii atunci

$$\| \zeta \| = n \| \zeta' \| .$$

17.3. Mărimile de calcul ale unei rețele eletrice. Dacă rețeaua de studiat are l elemente (sau laturi) n noduri și s subrețele, cei l curenți din laturi pot fi înlocuiți cu m curenți independenți (teorema lui Maxwell), al căror număr se calculează cu relația

$$m = l - n + s. \tag{118}$$

Se notează $\| e \|$, $\| Z \|$, $\| i \|$, $\| e' \|$, $\| Z' \|$, $\| i' \|$ matricele forțelor electromotoare, impedanțelor și curenților rețelei date (rețeaua primitivă) și rețelei transformate. Intre aceste mărimi se scriu următoarele relații :

$$\| i \| = \| C \| \cdot \| i' \| \tag{119}$$

$$\left. \begin{aligned} \| e \| = \| Z \| \cdot \| i \| \quad &\text{și} \quad \| e' \| = \| Z' \| \cdot \| i' \| \\ \| P \| = \| e_t \| \cdot \| i \| \quad &\text{și} \quad \| P' \| = \| e_t' \| \cdot \| i' \| \end{aligned} \right\} \tag{120}$$

$$\left. \begin{aligned} \| e' \| &= \| C_t \| \cdot \| e \| \\ \| Z' \| &= \| C_t \| \cdot \| Z \| \cdot \| C \| \end{aligned} \right\} \tag{121}$$

în care $\| C \|$ este *matricea de conexiune* între cele două rețele și este definită ca matricea coeficienților sistemului de ecuații lineare dintre curenții din fiecare latură a rețelei primitive și curenții independenți sau ciclici din aceeași rețea. Ecuațiile acestea sunt de forma

$$i_k = \sum C_{kl} i_l \tag{122}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\| P \|$ şi $\| P' \|$ sunt matricele puterilor puse în joc în rețea. In orice rețea, întotdeauna

$$\| P \| = \| P' \| .$$

17.4. Reguli generale de calcul al rețelelor. 1⁰ Se trasează cu grijă o schemă a rețelei de studiat etichetându-se elementele $Z_{aa}, \ldots,$ numerotându-se extremitățile lor conform cuplajului electromagnetic fixat (sensul curenților) și trasându-se forțele electromotoare impuse.

2⁰ Se numără laturile, nodurile și subrețelele, deducându-se numărul de circuite independente cu ajutorul relației (118).

Se introduc în rețea atâți curenți independenți i_p, i_q, $i_r, \ldots,$ câte circuite independente sunt, materializându-i prin săgeți având un sens arbitrar.

3⁰ Se determină curenții din toate laturile circuitului în funcție de acești curenți independenți, cu ajutorul primei legi a lui Kirchhoff.

4⁰ Se scriu ecuațiile (122) între curenții rețelei primitive și acești curenți. Se deduce matricea de conexiune $\| C \|$.

5⁰ Se calculează $\| e' \|$ și $\| Z' \|$ cu ajutorul relațiilor (121). Din ecuația de funcționare (120) se deduce

$$\| i' \| = \| Z' \|^{-1} \cdot \| e' \| \tag{123}$$

și apoi cu relația (119) curenții căutați din rețeaua primitivă. Se calculează diferența de potențial la bornele fiecărui element

$$\| e_l \| = \| Z \| \cdot \| C \| \cdot \| i' \| \tag{124}$$

și puterea absorbită cu a doua relație (119).

6⁰ Pentru conducerea mai departe a calculului trebue să se cunoască constituția elementelor rețelei și să se precizeze scopul urmărit.

α) Dacă se caută regimul permanent sinusoidal, atunci în sistemul (123) impedanțele vor avea forma

$$\overline{Z}_{jk} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

iar forțele electromotoare, forma

$$\overline{e} = E \underline{|\varphi}$$

β) Dacă se caută regimul tranzitoriu creat de un anumit număr de forțe electromotoare de forma $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... aplicate la timpul $t = 0$, atunci impedanțele au forma

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$$

şi forțele electromotoare, forma

$$\varphi(p) = \mathfrak{L} f(t);$$

sistemul (123) va da soluțiile sub forma

$$i(t) = \mathfrak{L}^{-1} \frac{\alpha(p)}{\beta(p)}.$$

γ) Dacă se caută numai sistemul de ecuații diferențiale de funcționare ale sistemului, se calculează produsul matricelor $\| Z' \|$ şi $\| i' \|$ şi se înlocueşte în rezultat p prin simbolul de derivare $\frac{d}{dt}$, $\frac{1}{p}$ prin simbolul de integrare $\int_0^t (\quad) \, dt$ şi se egalează această matrice cu matricea forțelor electromotoare date $f(t)$.

17.5. Interconectarea rețelelor. α) *Conectarea prin conductori.* 1⁰ Se obțin matricele forțelor electromotoare, impedanțelor şi curenților rețelei interconectate date compunând matricele corespunzătoare ale rețelelor componente simple.

2⁰ Se alege apoi un număr de curenți independenți, dat de relația (118), în funcție de care se scriu curenții din laturile rețelei primitive, deducându-se astfel matricea de conexiune.

Restul calculului se urmează apoi ca în cazul rețelelor simple.

β) *Conectarea prin circuite magnetice.* Circuitele magnetice mai introduc un număr de ecuații de legătură între curenți obținute scriind că forța magnetomotoare este nulă

$$\sum ni = 0 \tag{125}$$

ceeace are ca efect eliminarea unui număr de curenți egal cu numărul de ecuații de tipul (125) ce se poate scrie.

Matricea de conexiune se obține astfel:

1⁰ Se scrie matricea de conexiune $\| C_1 \|$ dintre curenți fără a ține seama de circuitele magnetice.

2⁰ Se elimină o parte din curenți cu ajutorul ecuațiilor (125) şi se scriu vechii curenți în funcție de curenții rămaşi. Se obține matricea de conexiune $\| C_2 \|$.

3° Matricea de conexiune rezultantă căutată este:

$$\| C \| = \| C_1 \| \cdot \| C_2 \| . \qquad (126)$$

17.6. Utilizarea coordonatelor simetrice. Presupunând că toate matricele sistemului sunt complexe, formulele de transformare devin

$$\left.\begin{aligned} \| e' \| &= \| C_t \|^* \cdot \| e \| \\ \| \overline{S} \| &= \| e_t \| \cdot \| i \|^* \\ \| Z' \| &= \| C_t \|^* \cdot \| Z \| \cdot \| C \| \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

în care s'a notat cu $\| a \|^*$ matricea conjugată a matricei $\| a \|$.

Matricea de conexiune între curenţii pe fază şi componentele simetrice corespunzătoare este:

$\| C_s \| =$

	h	d	i
a	1	1	1
b	1	a^2	a
c	1	a	a^2

Deoarece în componente simetrice puterea este

$$\overline{S} = 3\, \overline{U}_h \overline{I}_h^* + 3\, \overline{U}_d \overline{I}_d^* + 3\, \overline{U}_i \overline{I}_i^*$$

matricele de transformare în coordonate simetrice, sunt

$$\left.\begin{aligned} \overline{S} &= 3 \| e_t' \| \cdot \| i' \|^* \\ \| e' \| &= \tfrac{1}{3} \| C_s \|_t^* \cdot \| e \| \\ \| Z' \| &= \tfrac{1}{3} \| C_s \|_t^* \cdot \| Z \| \cdot \| C_s \| . \end{aligned}\right\} \qquad (128)$$

17.7. Calculul reţelelor cu ajutorul coordonatelor simetrice. Calculul reţelelor se face cu ajutorul următoarelor patru reţele:

1° Reţeaua dată, conţinând B bucle.

2° Reţeaua primitivă a acesteia, conţinând K elemente şi K bucle, repartizate în grupe de câte trei elemente sau câte un element.

3° Reţeaua primitivă în coordonate simetrice, identică cu precedenta, ca număr de elemente şi bucle şi ca grupare.

4° Reţeaua echivalentă, în coordonate simetrice, a reţelei date, conţinând acelaşi număr de elemente şi bucle ca şi reţeaua dată, putând avea însă un număr diferit de subreţele.

Dacă

$\| C_2^1 \|$ este matricea de conexiune între rețelele 1 și 2
$\| C_3^2 \|$ idem între rețelele 2 și 3
$\| C_4^3 \|$ idem între rețelele 3 și 4

atunci matricea de conexiune a sistemului este

$$\| C \| = \| C_2^1 \| \cdot \| C_3^2 \| \cdot \| C_4^3 \| . \qquad (129)$$

In problemele de această natură sunt date impedanțele și forțele electromotoare în una sau mai multe din aceste rețele și se caută curenții în rețeaua (1), fie direct, fie prin intermediul rețelei (4).

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

STUDIUL CIRCUITELOR IN CURENT ALTERNATIV

1. CANTITĂŢI COMPLEXE. REPREZENTAREA UNUI VECTOR PRIN MĂRIMI COMPLEXE

— Să se deseneze vectorii:

1.1. $3+j4$
1.2. $-2+j6$
1.3. $-4-j1$
1.4. $2-2j$
1.5. $4\ \varepsilon^{j\frac{\pi}{5}}$
1.6. $-3\ \varepsilon^{j\,0,2}$
1.7. $2\ \varepsilon^{j\,14,0}$
1.8. $5\ \varepsilon^{-j1,0}$
1.9. $3\underline{|45^0}$
1.10. $8\underline{|125^0}$
1.11. $5\underline{|208^0 30'}$
1.12. $1\underline{|315^0}$
1.13. $-2\underline{|45^0}$
1.14. $3\underline{|-60^0}$
1.15. $-5\underline{|-30^0}$

1.16. Să se exprime vectorii din exerciţiile 1.1—1.4 sub forma $V\underline{|\varphi}$.

1.17. Idem, sub forma $V\varepsilon^{j\varphi}$.

1.18. Să se exprime vectorii din exerciţiile 1.5—1.8 sub forma $a+jb$.

1.19. Idem, sub forma $V\underline{|\varphi}$.

1.20. Să se exprime vectorii din exerciţiile 1.9—1.15 sub forma $a+jb$.

1.21. Idem, sub forma $V\varepsilon^{j\varphi}$.

— Să se exprime sub forma $a+jb$ expresiile:

1.22. $y = \cos 2j$
1.23. $y = \sin 3j$
1.24. $y = \cosh j$
1.25. $y = \sinh 2j$

1.26. Idem, dar sub forma $V\underline{|\varphi}$.

— Aceeaşi chestiune pentru expresiile:

1.27. $\sin(1-j)$
1.28. $\cos(-1+2j)$
1.29. $\sinh(3-2j)$
1.30. $\cosh(-5+4j)$

— Aceiaşi chestiune pentru expresiile

1.31. $y=\sqrt[3]{j}$ 1.32. $y=\ln j$ 1.33. $y=\varepsilon^{\sqrt{j}}$

1.34. Un vector are modulul 60 şi face un unghi de 30^0 cu axa reală. Care este expresia algebrică a acestui vector,

dacă el se găsește în primul cadran? Dar dacă se găsește în al patrulea cadran?

1.35. Un vector are modulul egal cu 50 și face un unghi de 30^0 cu axa complexă. Să se scrie expresia algebrică a acestui vector, când se găsește: *a*) în primul cadran; *b*) în al doilea cadran.

1.36. Un vector $\overline{V}$ face un unghi de 45^0 cu vectorul $\overline{V}_1$ a cărui expresie analitică este $-7 + j3$. Dacă modulul vectorului $\overline{V}$ este egal cu 10, să se scrie expresiile analitice posibile ale acestui vector.

1.37. Se rotește vectorul $\overline{V} = 10 + j15$ până când face 30^0 cu vectorul $\overline{V}_1 = -5 - j10$. Care sunt expresiile algebrice posibile ale vectorului $\overline{V}$ după rotire?

1.38. Se dau vectorii $\overline{V}_1 = -10 + j5$ și $\overline{V}_2 = 10 + j5$. Se alege un nou sistem de axe de referință astfel încât axa reală să coincidă cu vectorul $\overline{V}_1$. Care sunt expresiile analitice ale vectorilor dați, în raport cu noile axe?

1.39. Expresia analitică a unui vector este $\overline{V} = 5 + j10$. Să se scrie expresia acestui vector după ce a fost rotit cu 120^0 în sensurile pozitiv și negativ.

1.40. Care este unghiul dintre vectorii $\overline{V}_1 = -3 + j4$ și $\overline{V}_2 = 4 - j3$?

1.41. Expresia analitică a unui vector $\overline{V}$ în raport cu un anumit sistem de axe de referință ortogonal este $-4 + j3$. Aceste axe se rotesc cu un unghi oarecare, astfel încât axa reală a acestui sistem să coincidă cu vectorul $\overline{V}_1$ a cărui expresie în raport cu sistemul principal de referință este $-1 + j2$. Care este expresia vectorului $\overline{V}$ în raport cu sistemul principal de referință?

1.42. Se dau vectorii $\overline{V}_1 = 10 - j20$ și $\overline{V}_2 = -6 - j8$. Care este proiecția lui $\overline{V}_2$ pe $\overline{V}_1$?

1.43. Care este proiecția vectorului $\overline{V}_2$ din problema precedentă pe normala la $\overline{V}_1$?

2. OPERAȚII CU VECTORI REPREZENTAȚI PRIN MĂRIMI COMPLEXE

— Să se efectueze operațiile:

2.1. $(3 + j4) + (-4 - j1)$

2.2. $(2 - j2) + (-4 - j1)$

2.3. $(-2 + j6) + 4\,\varepsilon^{-j\frac{\pi}{4}}$

2.4. $2\underline{|30^0} + 3\,\varepsilon^{j\,0,3}$

2.5. $(1 + j3) - (3 - j2)$

2.6. $(-1 + j2) - (-2 - j3)$

Scanned with OKEN Scanner

2.7. $3\underline{|60^0} - 3\underline{|-60^0}$

2.8. $1\ \varepsilon^{j\frac{2\pi}{3}} - 1\ \varepsilon^{-j\frac{2\pi}{3}}$

2.9. $\sqrt{2}\,(1 + j) - 1\underline{|120^0}$

2.10. $1\underline{|-120^0} - 1$

2.11. $(3 + j2)(-2 + j3)$

2.12. $(3 + j4)\,(2 - j2)$

2.13. $2\ \varepsilon^{j\frac{\pi}{3}}\cdot(2 + j2)$

2.14. $(-3 + j3)\cdot 5\underline{|-15^0}$

2.15. $2\underline{|-18^0}\cdot 0{,}866\underline{|48^0}$

2.16. $(2 - j\,2)\cdot(1 - j3)$

2.17. $(-2 + j6) : (-4 - j)$

2.18. $(-3 - j4) : (2 + j)$

2.19. $2\ \varepsilon^{j\frac{\pi}{3}} : (0{,}75 + j\ 0{,}433)$

2.20. $(1{,}91 + j0{,}60) : \sqrt{2}\underline{|29^045'}$

2.21. $3\underline{|120^0} : j\sqrt{3}$

2.22. $15\underline{|169^0} : 6\underline{|84^0}$

2.23. $(2 - j\,2)^2$

2.24. $(\sqrt{3}\underline{|22^015'})^2$

2.25. $\sqrt{-12 + j\,16}$

2.26. $\sqrt{-4 - j\,1}$

2.27. $\sqrt{5\underline{|63^0}}$

— Să se simplifice expresiile:

2.28. $(4 + j\,6)/(3 - j4)$

2.29. $\dfrac{2 - j\,4}{6 + j\,7} \times \dfrac{3 + j\,8}{j\,2}$

2.30. $\dfrac{(4 + j\,2)^2}{2 - j\,1} \times \dfrac{3}{1 + j\,10}$

2.31. $\dfrac{2\underline{|65^0}}{3\underline{|28^0}} \times \dfrac{(6\underline{|15^0})^2}{\sqrt{3\underline{|18^0}}}$

2.32. Fiind date mărimile complexe

$\overline{A} = 3 + j\,5$

$\overline{B} = 7\,(\cos 135^0 + j \sin 135^0)$

$\overline{C} = 4\underline{|50^0}$

$\overline{D} = \underline{|6 - 130^0}$

$\overline{E} = 8\ \varepsilon^{j2}$

$\overline{F} = 9\ \varepsilon^{-j2}$

Se cere să se calculeze: (*a*) $\overline{A} + \overline{B}$; (*b*) $\overline{C} + \overline{D}$; (*c*) $\overline{E} - \overline{F}$; (*d*) $\overline{A} - \overline{C} + \overline{F}$; (*e*) $\overline{C}\,\overline{D}$; (*f*) $\overline{A}\,\overline{B}$; (*g*) $\overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E}$; (*h*) $\overline{A} : \overline{B}$; (*i*) $\overline{C} : \overline{F}$; (*j*) $1 : (\overline{A} - \overline{C} + \overline{F})$; (*k*) $\overline{B}\,\overline{D}\,\overline{E} : \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{F}$; (*l*) $\Re(\overline{C}\,\overline{D})$; (*m*) $\Re(\overline{C})\cdot\Re(\overline{D})$; (*n*) $\sqrt{\overline{F}}$; (*p*) $\ln \overline{E}$.

Să se rezolve ecuațiile

(1) $\overline{F}x + \overline{C} = 0$ (2) $\overline{F}x^2 + \overline{C}x = \overline{E}$.

— Să se calculeze derivatele funcțiilor:

2.33. $5\,[\cos(\omega t - 15^0) + j \sin(\omega t - 15^0)]$ în care $\omega = 314$ rad/s

2.34. $8\,[(\cos(3\omega t + 18^0) - j\ \sin\ (3\omega t + 18^0)]$ în care $f = 42$ Hz.

Scanned with OKEN Scanner

2.35. $U\underline{|\alpha}$ în care $\alpha = f(t)$ şi $U = \text{const.}$

2.36. $15 \underline{|3\omega t + 30^0}$ în care $\omega = 314$ rad/s

2.37. $100 \underline{|\omega t - 45^0}$ în care $f = 16\ {}^2/_3$ Hz.

2.38. $120\ \varepsilon^{j(2\omega t - 45^0)}$ în care $\omega = 314$ rad/s

2.39. $5\ \varepsilon^{j(\omega t + 30^0)}$ în care $f = 60$ Hz.

— Să se integreze funcţiile:

2.40. $10 [\cos(\omega t + 10^0) + j \sin(\omega t + 10^0)]$ în care $\omega = 314$ rad/s.

2.41. $8 [\cos(5\omega t - 30^0) - j \sin(5\omega t - 30^0)]$ în care $f = 16^2/_3$ Hz.

2.42. $I\underline{|\beta}$ în care $\beta = f(t)$ şi $I = \text{const.}$

2.43. $12 \underline{|\omega t - 15^0}$ în care $\omega = 105$ rad/s

2.44. $120 \underline{|5\omega t + 20}$ în care $f = 50$ Hz..

2.45. $141\ \varepsilon^{-j(3\omega t + 60^0)}$ în care $\omega = 314$.

2.46. $120\ \varepsilon^{j(\omega t - 30^0)}$ în care $f = 42$ Hz.

2.47. Să se găsească expresia vectorului care, adunat cu vectorii $\overline{V}_1 = 8 - j6$ şi $\overline{V}_2 = 2 + j10$ să dea ca rezultantă vectorul $\overline{V} = -3 - j6$.

2.48. Un vector $\overline{V}$ este suma a doi vectori. Primul are modulul egal cu 10 şi este paralel cu vectorul $\overline{V}_1 = 3 - j4$. Al doilea are modulul egal cu 20 şi este paralel cu vectorul $\overline{V}_2 = -8 + j2$. Care este expresia analitică a vectorului $\overline{V}$?

2.49. Ce operator trebue aplicat vectorului $\overline{V}_1 = -5 + j10$ pentru a-l face să coincidă cu vectorul $\overline{V}_2 = 5 + j10$?

2.50. Să se determine unghiul pozitiv de rotire necesar pentru a face ca vectorul $\overline{V}_1 = -10 - j5$ să fie paralel cu vectorul $\overline{V}_2 = 3 + j4$.

2.51. Se dă vectorul $\overline{V}_1 = -8 + j6$. Să se determine vectorii $\overline{V}_2$ şi $\overline{V}_3$ având amândoi acelaşi modul, ştiind că $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$.

2.52. Să se arate că, oricare ar fi vectorul $\overline{Z}$, rădăcinile lui de ordinul m pot fi reprezentate prin cele m raze ale unui poligon regulat cu m laturi.

Care este poziţia primei raze în raport cu vectorul dat?

Scanned with OKEN Scanner

3. REPREZENTAREA FUNCŢIILOR SINUSOIDALE PRIN CANTITĂŢI COMPLEXE. LEGILE LUI OHM ŞI KIRCHHOFF

— Să se scrie sub forma complexă expresiile:

3.1. $i = 7{,}05 \cos(\omega t - 30^0)$ A
3.2. $u = 170 \sin(\omega t + 25^0)$ V

3.3. $z = 15 \cos 35^0\ \Omega$
3.4. $i = 21{,}2 \sin(\omega t - 60^0)$ A
3.5. $u = 312 \cos(\omega t + 15^0)$ V
3.6. $z = 200 \sin 60^0\ \Omega$

— Să se scrie valoarea instantanee a mărimilor:

3.7. $\overline{I} = 4 - j\,3$ A
3.8. $\overline{I} = 7 + j\,24$ A
3.9. $\overline{U} = 60 + j\,80$ V
3.10. $\overline{U} = 160 - j\,120$ V
3.11. $\overline{I} = 10\underline{|-25^0}$ A
3.12. $\overline{U} = 220\underline{|15^0}$ V
3.13. $\overline{I} = 6\varepsilon^{j\frac{\pi}{18}}$ A
3.14. $\overline{U} = 120\varepsilon^{-j\,15^0}$ V

— Să se determine impedanţa, rezistenţa şi reactanţa echivalentă, precum şi defazajul faţă de originea de fază, a circuitelor:

3.15

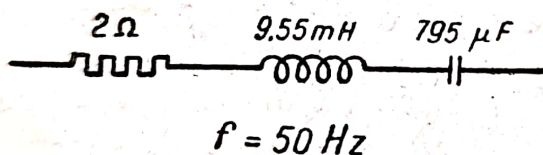


Fig. 3.15.

3.16

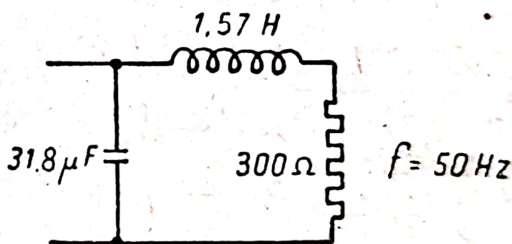


Fig. 3.16.

3.17

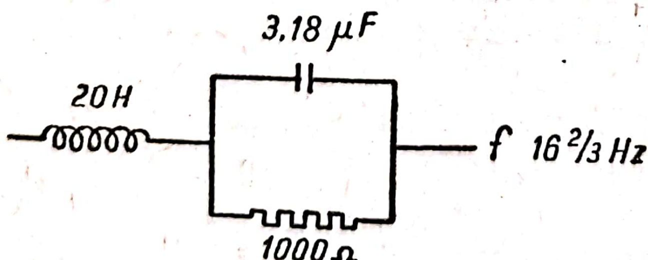


Fig. 3.17.

3.18

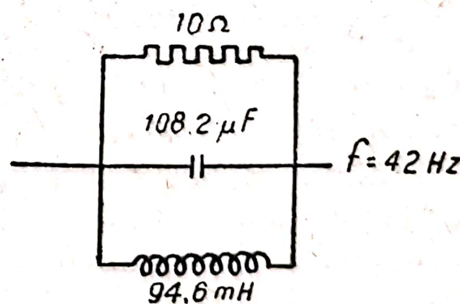


Fig. 3.18.

3.19. Să se determine impedanţa circuitului din problema 3 18 cu ajutorul admitanţelor.

3.20. Din impedanța calculată, să se determine admitanța, conductanța și susceptanța echivalentă a circuitului din exercițiul 3.16.

3.21. Să se calculeze impedanța echivalentă a circuitului din fig. 3.21, privită pe la bornele AC.

3.22. O impedanță $\overline{Z}_2$ este alimentată dela o sursă de tensiune sinusoidală de 2300 V și 50 Hz printr'o linie având o rezistență $R_1 = 0{,}80\ \Omega$ și o inductanță $L_1 = 3{,}72$ mH. Puterea absorbită de instalație este de 190 kW cu un factor de putere inductiv de 0,78.

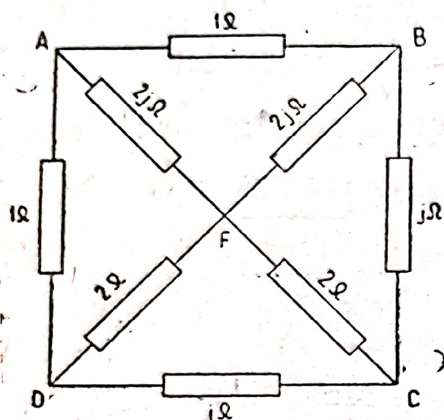


Fig. 3.21

Să se determine expresia impedanței $\overline{Z}_2$.

Dacă la bornele impedanței $\overline{Z}_2$ se montează un condensator perfect având o capacitate de 57,1 μF, se cere să se calculeze puterea absorbită de sistem și factorul de putere corespunzător.

3.23. Tensiunea aplicată unui circuit este $\overline{U} = 4 + j\,5$ V iar curentul care străbate circuitul este $\overline{I} = 10 + j\,2$ A. Să se găsească rezistența și reactanța circuitului.

3.24. O tensiune de 220 V cu o frecvență de 50 Hz, este aplicată la bornele unui circuit format din:

(*a*) o inductanță de 0,5 H având o rezistență proprie de 90 Ω;

(*b*) un condensator de 20 μF în serie cu o rezistență de 50 Ω;

(*c*) circuitele (*a*) și (*b*) în serie;

(*d*) circuitele (*a*) și (*b*) în paralel.

Să se determine, pentru fiecare caz în parte, curentul din circuit și defazajul său față de tensiune, precum și valoarea tensiunii și curentului, pentru valorile lui t egale cu 0,002, 0,005, 0,010 și 0,015s, timpul t măsurându-se dela primul maxim al tensiunii.

3.25. Se dă un circuit format dintr'o inductanță L în derivație cu un condensator de capacitate C și totul în serie cu o rezistență R. Se cere condiția ca în circuit să nu existe curent de frecvență f când acestui circuit i se aplică tensiunea $\overline{U}$ (circuitul bușon).

3.26. Se dă un circuit $ABCD$ în formă de punte Wheatstone în care două laturi opuse AB și CD sunt formate din două inductanțe L egale, iar celelalte două laturi opuse AC

şi BD sunt formate din două capacităţi C egale. Una din diagonale, BC, este formată dintr'o rezistenţă R. Pe a doua diagonală, AD, se aplică o tensiune alternativă sinusoidală $\overline{U}$. Se cere condiţia pe care trebue să o îndeplinească inductanţele şi capacităţile astfel încât curentul care circulă prin BC să fie independent de R (sistem de distribuţie cu curent constant).

3.27. Unui circuit serie format dintr'o rezistenţă de 10 Ω o inductanţă de 5 mH şi o capacitate de 800 μμF, i se aplică o tensiune de 5 V de frecvenţă variabilă.

Să se determine curba de variaţie a curentului în funcţie de frecvenţă şi din acesta să se deducă şi curba de rezonanţă.

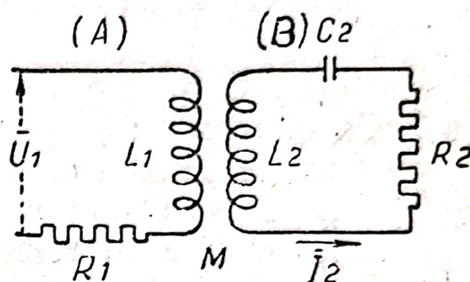


Fig. 3.28

3.28. Două circuite (A) şi (B) sunt cuplate prin inductanţa mutuală $M = 0{,}25$ H (fig. 3.28).

Circuitul (A) are o inductanţă proprie $L_1 = 0{,}30$ H şi o rezistenţă $R_1 = 40\ \Omega$.

Circuitul (B) are o inductanţă proprie $L_2 = 0{,}16$ H şi este închis pe o impedanţă formată dintr'o rezistenţă $R_2 = 30\ \Omega$ în serie cu un condensator de 3,18 μF.

Se cere să se determine tensiunea u, care trebue aplicată circuitului (A) pentru ca I_2, curentul din circuitul (B), să fie egal cu 10 μA.

Să se studieze variaţia funcţiei $u = \Phi(f)$ pentru $f = 10^2, 10^3$ şi 10^4 Hz.

3.29. Un motor asincron monofazat de 10 CP alimentat sub o tensiune de 2000 V şi o frecvenţă de 50 Hz, funcţionează cu un randament de 83% şi un factor de putere de 0,79. Cu ce condensator trebue şuntat motorul pentru ca factorul de putere global să fie egal cu 0,95?

3.30. Pentru măsurarea capacităţii cablurilor sau a materialelor izolante, se foloseşte un montaj special în punte, numit puntea Schering (fig. 3.30).

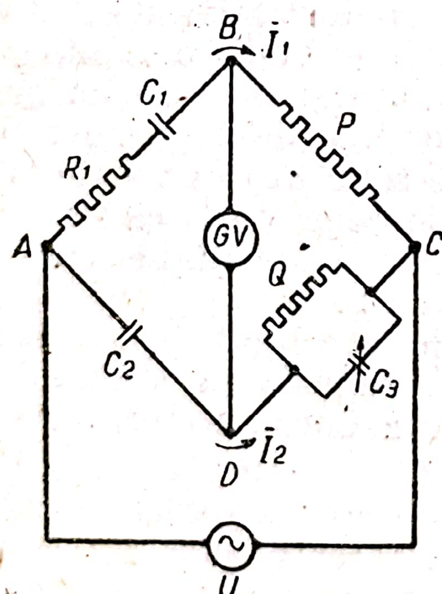


Fig. 3.30.

Condiţia de echilibru a acestei punţi este aceeaşi ca şi a punţii Wheatstone, adică

$$\frac{\overline{Z}_{AB}}{\overline{Z}_{AD}} = \frac{\overline{Z}_{BC}}{\overline{Z}_{DC}}.$$

La o asemenea punte, alimentată sub o tensiune de 20 kV la 50 Hz, s'a obţinut echilibrul pentru

$$C_2 = 0{,}055\ \mu F, \quad C_3 = 1{,}75\ \mu F \quad P = 200\ \Omega \quad Q = 700\ \Omega$$

Să se calculeze C_1, rezistenţa sa echivalentă R_1, factorul de putere al condensatorului C_1, unghiul său de pierdere precum şi tensiunea la bornele condensatorului variabil C_3.

(IPB, 1949)

3.31. O punte de curent alternativ $ABCD$ are următoarele elemente:

Intre A şi B o rezistenţă neinductivă P.
„ B şi C o capacitate C în serie cu o rezistenţă r.
„ C şi D o rezistenţă neinductivă Q.
„ D şi A o inductanţă L în serie cu o rezistenţă R.

Să se găsească condiţia de echilibru.

Aplicaţie. Dacă tensiunea aplicată între bornele A şi C este de 10 V cu o frecvenţă de 795 Hz, $P = 2000\ \Omega$, $Q = 1000\ \Omega$, $C = 0{,}1\ \mu F$ şi $r = 900\ \Omega$, să se găsească valorile lui L şi R.

(IPB 1949)

3.32. Se dau două impedanţe Z_1 şi Z_2 legate în serie. Alimentându-le cu o tensiune continuă de 110 V, căderea de tensiune în impedanţa Z_1 este de două ori mai mare decât în impedanţa Z_2. Alimentate sub o tensiune alternativă de 220 V, 50 Hz, căderea de tensiune în prima impedanţă este numai jumătate din aceia din a doua impedanţă şi factorul de putere este egal cu 0,5. Dacă se ia ca origine de fază curentul ce străbate cele două impedanţe, să se scrie expresia tensiunii aplicate circuitului precum şi expresiile celor două căderi de tensiune, cunoscând că raportul dintre intensităţile curenţilor (continuu şi alternativ) este egal cu 2.

3.33. Un circuit receptor telefonic este legat de circuitul transmiţător printr'un transformator. Impedanţa circuitului receptor este $Z_R = 260\ \underline{|15^0}\ \Omega$ la 1000 Hz. Constantele transformatorului sunt $R_1 = R_2 = 43\ \Omega$, $L_1 = L_2 = 3{,}6$ H, $M = 3{,}5$ H.

Dacă R_1, R_2, L_1, L_2 şi M sunt presupuse constante, care este impedanţa aparentă a circuitului receptor plus transformatorul privită dinspre bornele de intrare ale transformatorului?

Pierderile în fier ale transformatorului se neglijează dat fiind efectul neglijabil al lor în condţiile de funcţionare.

Notă: Se numeşte impedanţă aparentă, impedanţa măsurată la bornele circuitului primar în prezenţa circuitului secundar.

3.34. Se dă circuitul din figura 3.34 în care $\overline{E}_1 = 10 + j0$ V; $\omega = 314$ rad/s; $R_1 = 3{,}4$ A; $R_2 = 5{,}1\,\Omega$; $R_3 = 0{,}5\,\Omega$; $L_1 = 55\,\mu$H; $L_2 = 725\,\mu$H; $L_2 = 106\,\mu$H; $C_2 = 0{,}0421\,\mu$F; $C_3 = 0{,}0076\,\mu$F; $R_s = 120\Omega$; $L_s = 450\,\mu$H; $M = 268\,\mu$H. Se cere să se detrmine impedanţele totale ale buclelor; curenţii în cele două bucle; raportul curenţilor; puterea dată de sursă; puterea absorbită de sarcină şi randamentul sistemului.

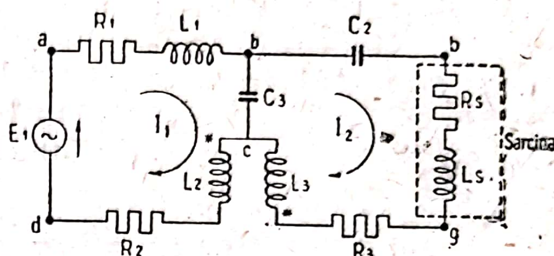


Fig. 3.34.

3.35. Se dă circuitul din figura 3.35. Ştiind că puterea aparentă totală dată de sursă este

$$\overline{S} = 5{,}2 - j\,2{,}5 \text{ kVA}$$

se cere să se determine:

a) Mărimea inductanţei L_1 în henry;

b) Valoarea eficace a tensiunii E a sursei;

c) Factorul de putere al circuitului, măsurat la bornele AB.

d) Decalajul curentului I în raport cu tensiunea E.

Date numerice: $R_1 = 80\,\Omega$; $R_2 = 200\,\Omega$; $C_2 = 10^{-5}$ F; $f = 50$ Hz.

3.36. O impedanţă abscarbe dela o sursă, cu tensiune constantă, o putere de 250 kVA cu un factor de putere inductiv egal cu 0,5. O a doua impedanţă este legată în paralel cu prima şi absorrbe o putere de 100 kVA cu un factor de putere reglabil. Se cere să se determine factsrul de putere global maximum ce se poate obţine.

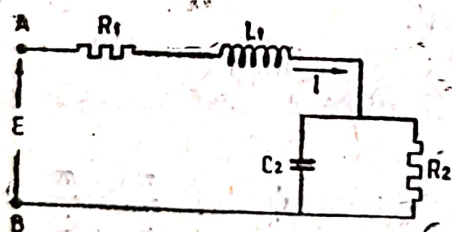


Fig. 3.35

In acest caz să se găserscă:

a) Puterea activă şi reactivă absorbită de a doua impedanţă.

b) Expresia puterii aparente totale absorbită de sistem.

3.37. O sarcină inductivă de 2000 kW la un factor de putere de 0,8 este conectată la o sursă de 3 000 V, 50 Hz. In paralel cu sarcina inductivă se montează un condensator astfel ca factorul de putere total al sistemului să fie egal cu unitatea. Factorul de putere al condensatorului cu aparatele auxiliare necesare este de 0,05.

Se cere să se determine:

a) Curentul absorbit de sarcină şi de condensator;

b) Diagrama vectorială cuprinzând tensiunea aplicată circuitului şi curenţii absorbiţi de sarcină şi de condensator.

c) Expresia în cantități complexe a curentului total absorbit de instalație.

d) Puterile active și reactive absorbite de instalația întreagă și de fiecare element al ei în parte (sarcină și condensator).

3.38. Un wattmetru și un ampermetru sunt montate într'un circuit serie format dintr'o rezistență R, o inductanță L și un condensator C, fiecare constantă ca mărime. Circuitul este conectat la o sursă de tensiune sinusoidală, având amplitudinea constantă. Frecvența sursei crește lent dela valoarea de 20 Hz la valoarea de 60 Hz, astfel încât se pot neglija fenomenele tranzitorii.

La frecvența de 25 Hz, wattmetrul indică 314,4 W. Crescând frecvența, atât indicațiile ampermetrului, cât și acelea ale wattmetrului cresc. La 60 Hz acestea sunt respectiv 35 A și 3851 W. Peste această valoare, orice creștere a frecvenței face ca indicațiile wattmetrului să descrească.

Se cere să se determine:

a) Rezistența circuitului.

b) Amplitudinea tensiunii aplicate.

c) Capacitatea și inductanța din circuit.

d) Frecvența de rezonanță a circuitului.

e) Forma curbei de rezonanță.

3.39. La cele două perechi de plăci ale unui oscilograf catodic se aplică tensiunile

$$u_1 = U_1\sqrt{2} \cos (\omega t - \psi)$$

$$u_2 = U_2\sqrt{2} \cos 2\omega t.$$

Să se determine:

a) Expresia analitică a imaginii care apare pe ecranul oscilografului.

b) Forma figurilor ce se obțin pentru $\psi = 0, \frac{\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{2}$ radiani, presupunându-se tensiunile U_1 și U_2 egale și u_1 fiind măsurată pe abscisă.

3.40. Tensiunea aplicată rețelei, reprezentate în fig. 3.40 este de 127 V. Parametrii rețelei au următoarele valori:

$$G_1 = 0{,}01 \text{ S} \qquad B_1 = 0{,}02 \text{ S}$$
$$R_2 = 20\ \Omega \qquad X_2 = 10\ \Omega$$
$$R_3 = 50\ \Omega \qquad X_3 = 25\ \Omega$$
$$X_4 = 10\ \Omega$$

Să se arate ce indică ampermetrul A. Să se găserscă diferența de potențial între punctele a și b, verificându-se că, pe orice drum ar fi determinată, diferența de potențial este aceiași.

Scanned with OKEN Scanner

3.41. Pentru determinarea inductanţei unei bobine a fost aleasă schema reprezentată în fig. 3.41.

Capacitatea condensatorului este astfel fixată, încât indicaţia ampermetrului să rămână neschimbată ori cum ar fi K, deschis sau închis.

Să se determine inductanţa căutată a bobinei, ştiind că măsurătorile s'au făcut la tensiunea de 380 V, frecvenţa 50 Hz şi că ampermetrul a arătat în ambele cazuri 1 A.

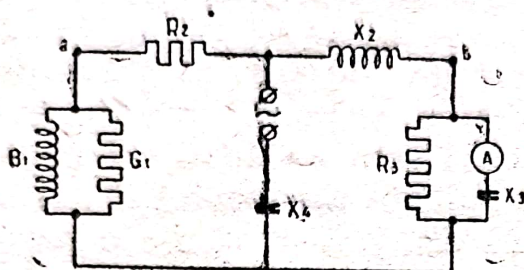


Fig. 3.40

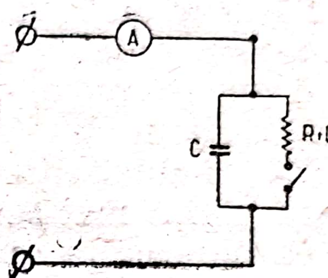


Fig. 3.41

3.42. In reţeaua din fig. 3.42 se aplică la bornele AB tensiunea de 220 V. Să se determine curenţii în ramuri şi curentul total pentru cazul întrerupătorului închis şi deschis.

Aplicaţie numerică $R_1 = R_2 = X_L = X_c = 25\ \Omega$

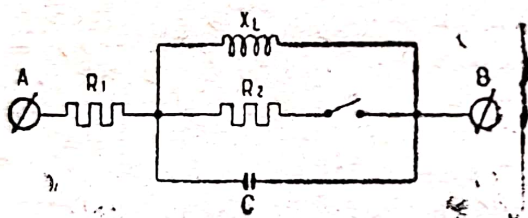


Fig. 3.42

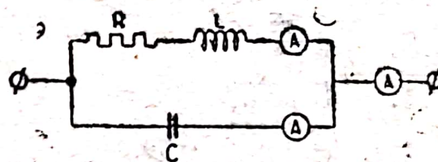


Fig. 3.43

3.43. In circuitul din fig. 3.43 are loc rezonanţa curenţilor. Ampermetrul A_1 arată curentul $I_1 = 6$ A, iar ampermetrul A_3, curentul $I_3 = 3{,}6$ A. Ce arată ampermetrul A_2?

3.44. In circuitul reprezentat în fig. 3.44 ampermetrul A_2 arată $I_2 = 0$. Ce curent I_4 arată ampermetrul A_4, dacă tensiunea aplicată este $U = 200$ V, iar parametrii circuitului sunt respectiv: $R_1 = 50\Omega$, $L_1 = 0{,}2$ H, $C_3 = 10 \mu$F, $L_4 = 0{,}1$ H, $C_5 = 5\ \mu$F, $R_5 = 50\ \Omega$.

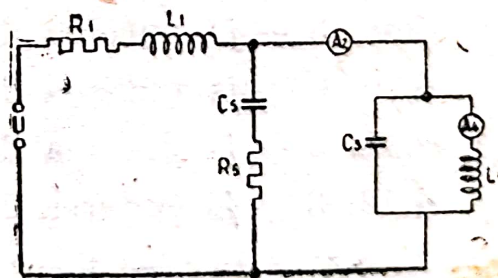


Fig. 3.44

Să se construiască diagrama vectorială a curenţilor şi tensiunilor.

3.45. Pentru un aparat de înaltă frecvență se folosește un circuit format din două bobine cuplate magnetic între ele. In serie cu fiecare bobină este legat câte un condensator. Constantele circuitelor sunt: circuitul primar $L_1 = 0{,}150$ mH și $C_1 = 160$ μμF; circuitul secundar $L_2 = 0{,}150$ mH. Rezistența ambelor circuite este astfel ca, la frecvența de 10^6 Hz, raportul $\omega L/R$ este egal cu 100. Sursa de tensiune este în serie cu circuitul primar. Circuitul secundar este închis. Se cere:

a) Mărimea inductanței mutuale pentru care impedanța aparentă a primarului apare ca o rezistență pură dacă valoarea capacității din secundar este tot de 160 μμF. Se presupune că frecvența tensiunii din înfășurarea primară este de 10^6 Hz.

b) Dacă inductanța mutuală este de două ori mai mare decât aceia găsită mai sus, ce valoare a capacității din secundar face ca impedanța aparentă din primar să fie o rezistență pură la aceiași frecvență?

4. INVERSIUNE. LOCURI GEOMETRICE

— Să se găsească, analitic și grafic, inversul vectorilor:

4.1. $-4 - j1$

4.2. $2 - j2$

4.3. $4\varepsilon^{j\frac{\pi}{3}}$

4.4. $5\underline{|30^0}$

4.5. $0{,}1\underline{|-25^0}$

4.6. $3 + j4$, puterea de inversiune fiind $\overline{V}_0^2 = (1 + j\,1)^2$

4.7. $5\underline{|-25^0}$, puterea de inversiune fiind $\overline{V}_0^2 = (2 + j\,2)^2$

4.8. $3\underline{|30^0}$, puterea de inversiune fiind $\overline{V}_0^2 = (2\underline{|20^0})^2$

4.9. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\overline{V}_0^2 = (1 + j0)^2$

4.10. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\overline{V}_0^2 = (-1 + j0)^2$

4.11. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\overline{V}_2^0 = (0 + j1)^2$

4.12. $3 + j4$ puterea de inversiune fiind $\overline{V}_2^0 = (0 - j1)^2$

— Să se traseze locul geometric al vectorilor

4.13. $\overline{Z} = a + jb$ pentru $a = 0{,}5$ și b variind între -5 și $+5$

4.14. $\overline{Z} = a + jb$ pentru $b = 2$ și a variind între 0 și 5.

Scanned with OKEN Scanner

4.15. $\overline{Z} = \frac{1}{a + jb}$ pentru $a = 0{,}5$ şi b variind între -5 şi $+5$.

4.16. $\overline{Z} = \frac{1}{a + jb}$ pentru $b = 2$ şi a variind între 0 şi 5.

4.17. $\overline{Z} = a + j\,(b + c)$ pentru $a = b = 1$ şi c variind între -5 şi $+5$.

4.18. $\overline{Z} = (a + b) + jc$ pentru $a = c = 1$ şi b variind între -5 şi $+5$.

4.19. $\overline{Z} = (a + b + jc)^{-1}$ pentru $a = c = 1$ şi b variind între -5 şi $+5$.

4.20. Tensiunea de punere la pământ a unei bobine de stingere este dată de relaţia

$$\overline{U}_0 = \frac{46 + j\,34{,}5}{j\,5 - v}$$

Să se studieze variaţia acestei tensiuni când variază parametrul v.

4.21. Circuitul echivalent al unui motor asincron ne conduce la ecuaţia:

$$\overline{I} = \frac{1}{2 + j3 + \frac{25}{4 + j\lambda}}$$

Să se construiască acest loc geometric prin metoda industrială, adică cu ajutorul a trei vectori caracteristici. Să se gradeze locul şi să se traseze curba $I = f(\lambda)$ pentru $-5 \leqslant \lambda \leqslant +5$.

(IPB 1949)

4.22. Să se deseneze locul geometric

$$\overline{I} = \frac{(5 + j3)^2}{[2 + j3 - \frac{9}{j1 + 4x}}$$

4.23. Se dau vectorii

$\overline{A} = -3 + j5$ $\quad\overline{B} = 7 + j6$ $\quad\overline{C} = 2 + j3$

Se cere să se construiască diagrama

$$\overline{I} = \frac{\overline{C}}{\overline{A} + \lambda\overline{B}}$$

Se va grada locul şi trasa caracteristica $I = f(\lambda)$ pentru valorile lui λ cuprinse între $\pm$ 2. (IPB 1949)

4.24. Se dau vectorii

$\overline{A} = -5 + j2$ $\quad\overline{B} = 3 + j3$ $\quad\overline{C} = -2 - j4$ $\quad\overline{D} = 5 - j1$

Se cere să se construiască diagrama

$$\overline{I} = \frac{\overline{A} + \lambda \overline{B}}{\overline{C} + \lambda \overline{D}}$$

folosindu-se metoda industrială, adică cu ajutorul a trei vectori caracteristici. Diagrama se va grada pentru valori ale lui λ cuprinse între $\pm$ 2.

Toate operațiile se vor efectua numai grafic.

(IPB 1949)

4.25. Se dă circuitul din figura 4.25, în care R este o rezistență ohmică și se cere să se determine variația curentului absorbit de circuit, pentru toate regimurile de funcționare ale acestuia între mersul în gol și scurt circuit.

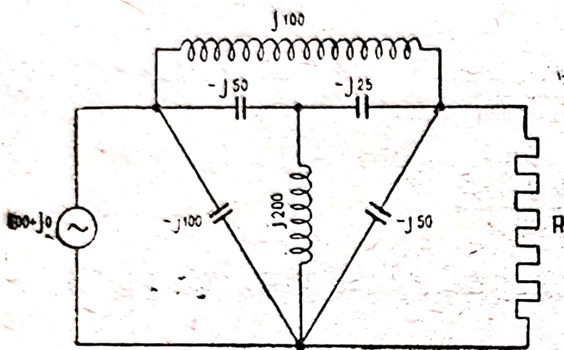


Fig. 4.25

4.26. Se dă circuitul din figura 4.26 în care X_L variază dela 0 la ∞. Să se determine:

a) Valoarea curentului I în cazul rezonanței.

b) I minim

c) I maxim

d) Valorile lui X_L corespunzătoare fiecărei valori ale lui I.

Se va folosi metoda analitică și cea grafică.

4.27. Pentru circuitul din figura 4.27 se cere să se determine valorile maxime și minime ale curentului I și factorul

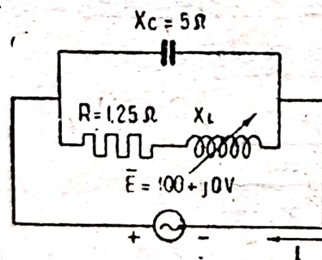


Fig. 4.26

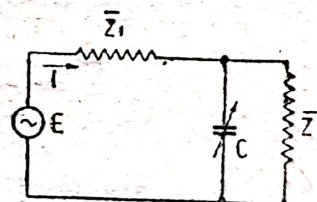


Fig. 4.27

de putere corespunzător la sursă, capacitatea C putând varia între 0 și ∞. Aplicație numerică: $\overline{Z}_1 = \frac{3}{2} + j\frac{2}{\sqrt{3}}\ \Omega$; $\overline{Z}_2 = 0{,}2 + j\,0{,}4\ \Omega$; $\overline{E} = 10 + j\,0$ V; $f = 50$ Hz.

4.28. In figura 4.28, M reprezintă un motor asincron de inducție absorbind o putere de 40 kW cu un factor de putere egal cu 0,8 inductiv; S reprezintă un motor sincron absorbind o putere de 40 kVA și al cărui factor de putere poate varia dela

0,1 inductiv la 0,1 capacitiv. Motorul asincron funcționează cu sarcina constantă în condițiile indicate mai sus. Motorul sincron funcționează în mod permanent absorbind aceeași putere aparentă dela rețea pentru orice factor de putere cuprins între limitele indicate.

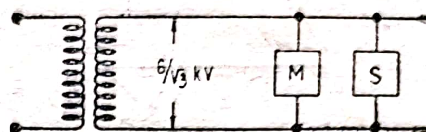


Fig. 4.28

Se cere să se traseze locul geometric al puterii aparente absorbită de grupul de mașini în funcție de factorul de puterе al ansamblului și să se indice pe diagramă :

a) Vectorul corespunzător puterii aparente maxime.
b) Vectorul corespunzător puterii active maxime.
c) Vectorul corespunzător factorului de putere unitate.
d) Vectorul corespunzător factorului de putere 0,9.

4.29. In figura 4.29 este dată schema unei punți pentru măsurarea inductanțelor. Luând tensiunea U_{ab} ca origine de fază, se cere să se construiască următoarele locuri geometrice :

(*a*) Locul geometric al tensiunii U_{ac} când variază R_S.
(*b*) Locul geometric al tensiunii U_{ad} când variază N.
(*c*) Ce concluzii se pot trage cu privire la comoditatea de echilibrare a punții ($U_{cd} = 0$) prin reglarea rezistențelor R_S și N? Se poate face o mai bună alegere de variabile?

4.30. O fabrică utilizând motoare asincrone, este alimentată cu energie electrică printr'o linie lungă simetrică.

Constantele liniei sunt $r_1 = 2{,}0\ \Omega$/fază și $a_1 = 5{,}0\ \Omega$/fază.

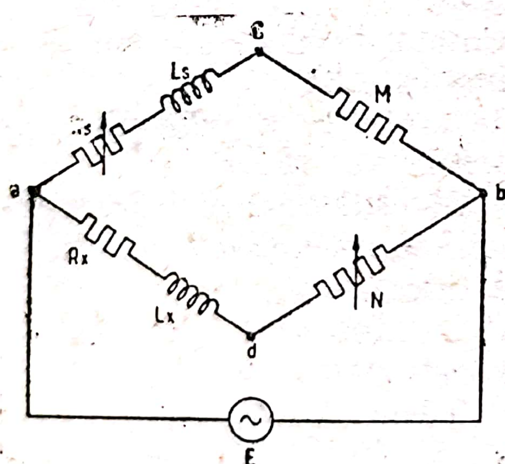


Fig. 4.29

Tensiunea de alimentare a liniei este $U_1 = 6$ kV.

Asimilând motoarele fabricei cu o admitanță, a cărei susceptanță este constantă și egală cu $b_2 = 0{,}05$ S/fază, iar conductanța g_2 este variabilă cu sarcina, se cere să se determine în funcție de încărcare :

1. Tensiunea U_2 la barele de distribuție a fabricii;
2. Curentul I absorbit de fabrică;
3. Puterea activă maximă absorbită de fabrică;
4. Randamentul global al instalației și valoarea lui maximă.
5. Factorul de putere global al instalației.

4.31. La proectarea aparatelor electrice de control este adesea necesar să se obțină o tensiune a cărei defazaj în raport

Scanned with OKEN Scanner

cu o sursă dată luată ca referință să fie continuu variabilă, mărimea sa rămânând totuși constantă. In cazul când prin bornele de ieșire nu se absoarbe un curent, pentru scopul urmărit se poate folosi o schemă în punte (fig. 4.31) la care se variază simultan, fie rezistențele R, fie capacitățile C, valorile celor două

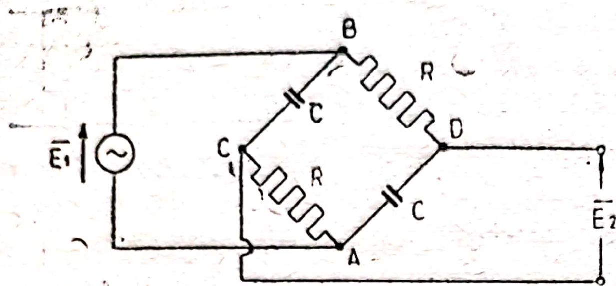


Fig. 4.31

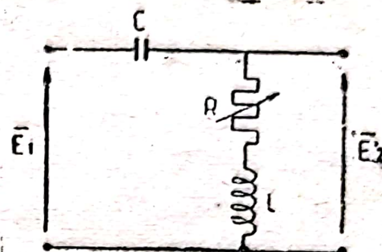


Fig. 4.32

rezistențe R sau ale capacităților C rămânând în permanență egale.

Se cere să se verifice că, în aceste condiții mărimea tensiunilor E_1 și E_2 rămâne mereu aceiași și circuitul răspunde scopului urmărit independent de frecvența sursei.

4.32. In scopul urmărit cu montajul din problema 4.31. se folosește și montajul din fig. 4.32. Tensiunea E_1 și parametrii L și C rămânând constante, tensiunea E_2 rămâne constantă ca amplitudine variind ca argument în funcție de valoarea rezistenței R.

Să se determine prin metoda inversiunii:

a) Relația dintre L, C și ω pentruca E_2 să aibă amplitudinea constantă și argumentul variabil.

b) Limitele de variație a argumentului; să se compare rezultatul cu acela obținut în problema 4.31.

c) Să se găsească o metodă de stabilire a mărimii amplitudinii constante E_2 la valori dorite.

d) Efectul variației frecvenței sursei asupra relației găsită la punctul (*a*).

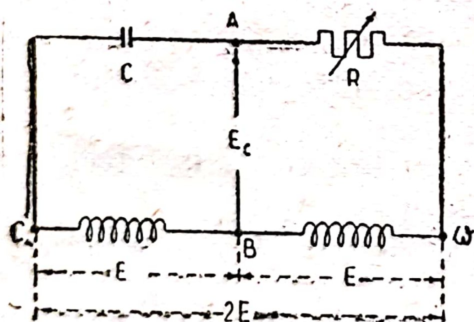


Fig. 4.33

4.33. Montajul din figura 4.33 servește pentru obținerea unei tensiuni variabile E_c între punctele A și B. Bobinele CB și BD reprezintă înfășurarea secundară a transformatorului de alimentare care poate fi socotit ca o sursă de curent alternativ, fără impedanță interioară, de tensiune $2E$. Punctul B de conectare a fost astfel ales încât fiecare din cele două înfășurări ale transformatorului să dea tensiuni E egale ca amplitudine și

având argumente identice. La bornele sursei este conectat circuitul format din condensatorul C şi rezistenţa variabilă R. Variaţia tensiunii la bornele AB se obţine variind fie rezistenţa R, fie capacitatea C.

Presupunând că curentul absorbit de utilizare este neglijabil, se cere să se arate între ce limite poate fi variată tensiunea E_0, atât ca amplitudine cât şi ca argument pentru toate valorile posibile ale lui R.

Aplicaţie numerică: $E = 230$ V, $f = 50$ Hz, $C = 0{,}005$ μF.

5. STUDIUL CIRCUITELOR CU AJUTORUL CANTITĂŢILOR COMPLEXE. DIPOLI. CUADRIPOLI. METODE DE CALCUL. CIRCUITE ECHIVALENTE

5.1. Se dă un circuit format din trei rezistenţe, respectiv de 5Ω, 10Ω şi 20Ω, legate în triunghi. Să se găsească rezistenţele echivalente corespunzătoare conectării în stea.

5.2. Impedanţele $\overline{Z}_{12} = 1 + j2\,\Omega$, $\overline{Z}_{23} = 2 + j3\,\Omega$ şi $\overline{Z}_{31} = 3 + j1\,\Omega$ sunt legate în triunghi. Să se găsească impedanţele circuitului echivalent în stea.

5.3. Să se transforme circuitul stea format din impedanţele $\overline{Z}_{10} = 1 - j2\,\Omega$, $\overline{Z}_{20} = 2 - j3\,\Omega$, $\overline{Z}_{30} = 3 - j1\,\Omega$ într'un circuit echivalent în triunghi.

5.4. Să se determine rezistenţa echivalentă a unei punţi Wheatstone desechilibrată, (fig. 5.4), alimentată cu tensiunea alternativă $\overline{U} = 10 + j0$.

(IPB 1950)

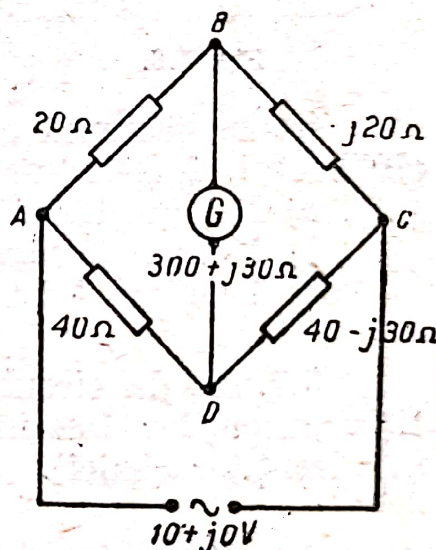


Fig. 5.4.

5.5. Se dă o reţea având configuraţia din fig. 5.5 şi impedanţele indicate pe aceasta. Intre punctele A şi C se aplică o tensiune

$$u = 100 \text{ V}.$$

Se cere să se calculeze distribuţia de curenţi între diversele ramuri ale reţelei aplicându-se metoda transfigurării. (IPB 1949)

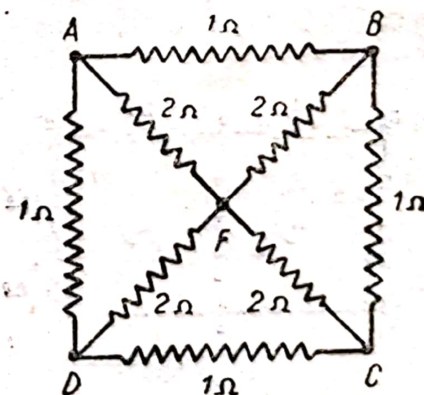


Fig. 5.5.

5.6. O punte Wheatstone (fig. 5.6) este alimentată cu curent alternativ dela o sursă de 4 V, având impedanța proprie neglijabilă. Ca instrument de zero se întrebuințează un galvanometru de rezonanță având o impedanță de 30 Ω.

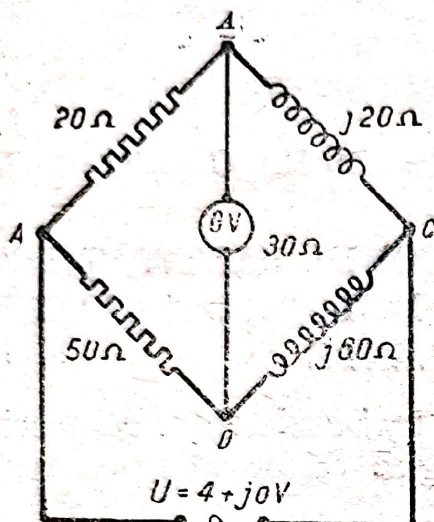


Fig. 5.6.

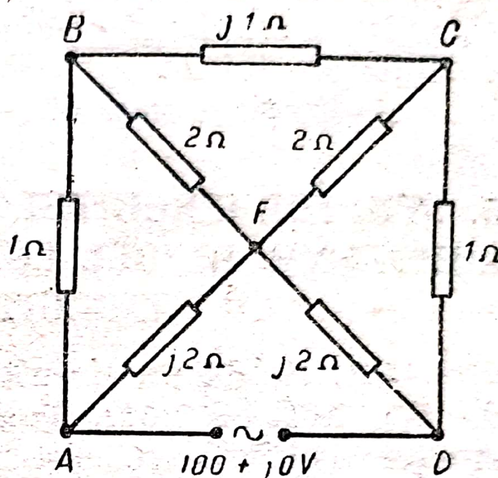


Fig. 5.7.

Să se găsească curentul în galvanometru în cazul desechilibrului, folosindu-se următoarele metode:

a) Metoda transfigurării,

b) Metoda curenților ciclici,

c) Teorema lui Thévenin.

(IPB 1950)

5.7. Se dă circuitul din fig. 5.7. Să se determine repartiția curenților folosindu-se metoda circuitelor independente (a curenților ciclici).

(IPB 1949)

5.8. Fiind dat circuitul din figura 5.8, se cere să se determine curenții din laturi si tensiunile la

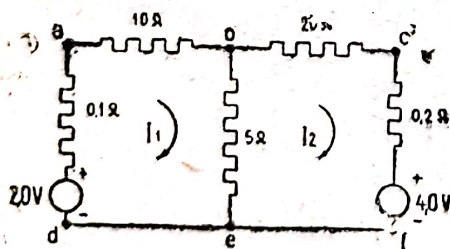


Fig. 5.8

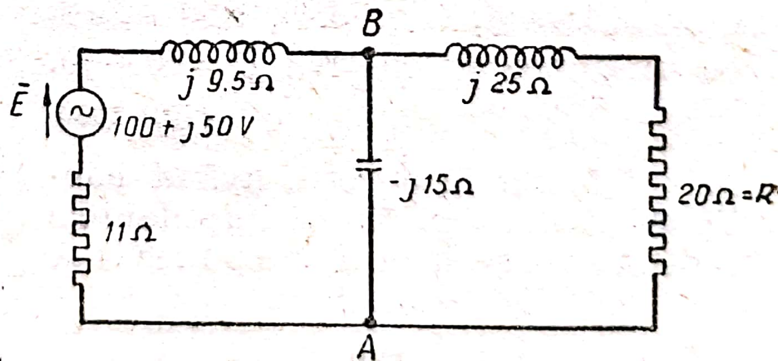


Fig. 5.9.

noduri aplicând (*a*) metoda directă; (*b*) principiul suprapunerii efectelor; (*c*) metoda perechilor de noduri.

5.9. Se dă rețeaua din fig. 5.8 și se cere să se determine distribuția de curenți folosind metoda curenților ciclici (a circuitelor independente).

5.10. Aceeași problemă pentru rețeaua din fig. 5.10.

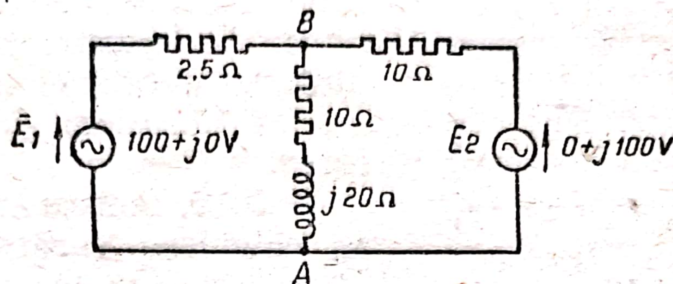


Fig. 5.10.

5.11. Aceeași problemă pentru rețeaua din fig. 5.11.

5.12. Fiind dat circuitul din figura 5.12., să se determine curenții din laturi și tensiunile la noduri prin metoda perechilor

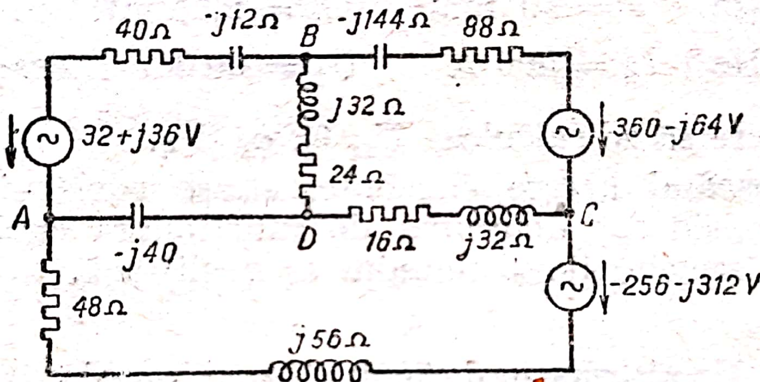


Fig. 5.11

de noduri independente aplicând (*a*) metoda directă; (*b*) metoda suprapunerii efectelor.

5.13. Se dă circuitul din fig. 5.13, format dintr'o capacitate C în paralel cu o inductanță L și totul în serie cu o

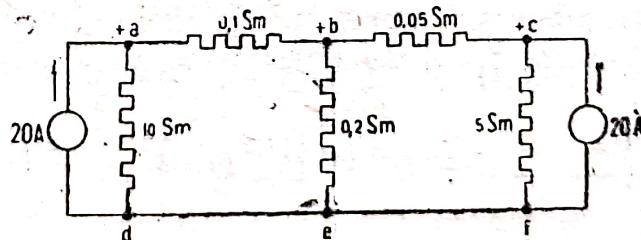


Fig. 5.12

rezistență neinductivă R, alimentat de o forță electromotoare alternativă $e = E \sin \omega t$. Se cere:

a) să se găsească cu ajutorul teoremei lui Thévenin curentul din inductanță;

b) să se verifice rezultatul printr'un calcul direct al circuitului;

c) care este valoarea curentului în cazul rezonanței?

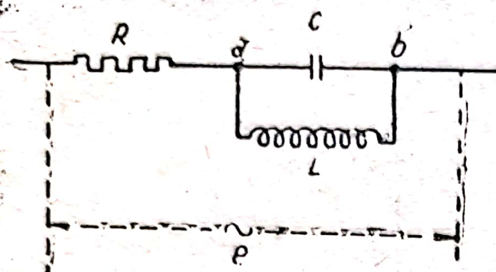


Fig. 5.13

5.14. Pentru circuitul din problema 5.9, să se determine curentul din rezistența $R = 20\ \Omega$ cu ajutorul teoremei lui Thévenin.

5.15. Idem pentru condensator.

5.16. Pentru același circuit să se calculeze curentul din rezistența $R = 20\ \Omega$ cu ajutorul teoremei reciprocității (a lui Maxwell).

5.17. Se dă o linie electrică trifazată, perfect simetrică și perfect izolată față de pământ, având următoarele caracteristici:

$l = 60$ km $\quad s = 50$ mm² $\quad L = 2{,}35$ mH/km

$f = 50$ Hz $\quad I_2 = 500$ A $\quad U_2 = 60$ kV $\quad \cos\varphi_2 = 0{,}9$ ind.

Se cere să se calculeze U_1, θ_1, φ_1 și η.

Cunoscând aceste elemente, să se construiască pentru punctul considerat diagrama de funcționare cu doi poli de tensiune. Capacitățile sistemului se neglijează.

(IPB 1950)

5.18. Un alternator de 5000 kVA cu impedanța de $1 + j10\ \Omega$ funcționează în paralel pe o bară de 10000 V și produce o f.e.m. de 11000 V. Să se găsească puterea maximă pe care o poate debita mașina și randamentul.

5.19. Un motor sincron trifazat de 1000 V, conectat în stea, având impedanța proprie (impedanța sincronă) de $0{,}2 + j2{,}2\ \Omega$ pe fază, absoarbe 250 kW și produce pe fază o f.e.m. de 720 V. Să se găsească curentul de linie și factorul de putere.

5.20. Fie cuadripolul $(ABCD)$ având parametrii:

$$\overline{A} = \sqrt{2}\,\underline{|-20^0}, \quad \overline{B} = 10\,\underline{|15^0}\,\Omega, \quad \overline{C} = \frac{1}{10}\,\underline{|-75^0}\ \text{S}$$

$$\overline{D} = \sqrt{1{,}5}\,\underline{|-10^0}.$$

Să se determine:

a) circuitul echivalent în Π;

b) impedanța caracteristică a acestui circuit.

(IPB 1950)

Scanned with OKEN Scanner

5.21. Pentru cuadripolul din problema precedentă să se determine circuitul echivalent în T.

5.22. Un cablu subteran de 3×150 mm² secţiune, având caracteristicile: $R = 0{,}121\,\Omega/\text{km}$, $L = 0{,}7$ mH/km şi $C = 0{,}32\,\mu\text{F/km}$ şi o lungime de 60 km, este închis pe impedanţa sa caracteristică. Se cere să se afle curentul la plecare, curentul la sosire, decalajele respective şi curentul de încărcare, cunoscând că acest cablu este alimentat cu o tensiune de 60 kV (50 Hz) între faze. Se neglijează conductanţa, iar L şi C sunt respectiv inductanţa şi capacitatea de serviciu a cablului.

5.23. O linie electrică aeriană trifazàtă are caracteristicile:

$l = 40$ km $\qquad R = 0{,}260\ \Omega$/km şi fază

$L = 1{,}35$ mH/km şi fază $\qquad C = 0{,}00085\ \mu$F/km şi fază.

Se consideră următoarea situaţie *la sosire*:

$U_2 = 60$ kV între faze $\qquad I_2 = 240$ A $\quad f = 50$ Hz

$\cos \varphi_2 = 0{,}8$ inductiv.

Se cere să se determine U_1, θ_1, I_1, φ_1, precum şi randamentul liniei.

5.24. Transmiterea de energie electrică din problema precedentă, se face printr'un cablu subteran, de aceeaşi secţiune ca şi linia aeriană, dar pentru care $L = 0{,}4$ mH/km şi fază şi $C = 0{,}21\ \mu$F/km şi fază. Pentru aceleaşi condiţii de funcţionare la sosire, se cere să se determine elementele la uzină.

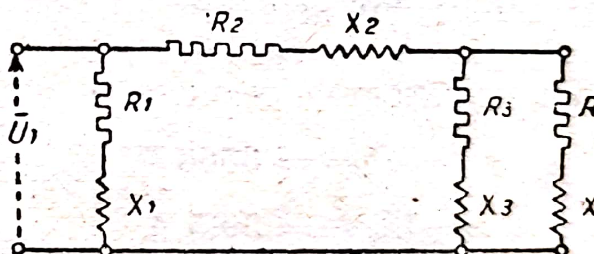


Fig. 5.25

5.25. Se dă un circuit Π având următoarele caracteristici (fig. 5.25).

$R_1 = 5\,\Omega \quad R_2 = 1\,\Omega \quad R_3 = 4 + \lambda\,\Omega \quad R = 3\,\Omega$

$X_1 = 0\,\Omega \quad X_2 = -2\,\Omega \quad X_3 = -2 + 3\lambda\,\Omega \quad X = 4\,\Omega$

în care λ este un număr ce poate lua orice valoare între $-\infty$ şi $+\infty$.

La intrare se aplică o tensiune sinusoidală alternativă

$$u_1 = 297 \cos(\omega t + 30^0).$$

Se cere:

a) Locul geometric al curentului I_1 absorbit de circuitul dat. Acest loc se va determina atât analitic, cât şi grafic prin inversiune arătându-se că rezultatele sunt identice prin determinarea erorii ce se face în calculul grafic faţă de calculul analitic.

b) Valoarea eficace şi decalajul curentului I_1 faţă de tensiune pentru $\lambda = 0$, 1 şi ∞.

c) Valoarea impedanţei, admitanţei, conductanţei şi susceptanţei pentru cele două ramuri în paralel.

d) Caracteristica $I_1 = f(\lambda)$ pentru λ cuprins între ± 5.

5.26. Probele de mers în gol şi scurtcircuit ale unui motor asincron de 190 kW, 750 rot/min, 578/1000 V, 222/129 A au dat următoarele rezultate:

$P_0 = 4080$ W	$P_{sc} = 7140$ W
$I_0 = 103{,}9$ A	$I_{sc} = 129$ A
$U_{0\Delta} = 578$ V	$U_{sc\curlywedge} = 136$ V
$U_{rot\curlywedge} = 370$ V	

Să se determine elementele circuitului echivalent.

(IPB 1949)

5.27. Să se determine elementele circuitului echivalent al motorului asincron de 100 kW, 1000 rot/min, 578/1000 V, 126,8/73 A, la care probele de mers în gol şi scurtcurcuit au dat următoarele rezultate:

$P_0 = 3560$ W	$P_{sc} = 5200$ W
$I_0 = 50{,}5$ A	$I_{sc} = 73$ A
$U_{0\Delta} = 578$ V	$U_{sc\curlywedge} = 137$ V
$U_{rot\curlywedge} = 300$ V	

(IPB 1949)

5.28. Un transformator trifazat de 10,5/110 kV, cu o putere de 31,5 MVA, are următoarele caracteristici:

Curentul de mers în gol	$I_0 = 4\% \, I_n$
Pierderile la mersul în gol	$P_0 = 75$ kW
Pierderile la mersul în scurtcircuit	$P_{sc} = 199{,}5$ kW
Tensiunea de scurtcircuit	$\varepsilon_{sc} = 10{,}5\%$

Se cere :

a) Să se determine cuadripolul în *T* echivalent acestui transformator ;

b) Să se determine constantele *ABCD* ale acestui cuadripol.

5.29. Se dă un cuadripol definit prin ecuațiile :

$$\overline{U}_1 = j\,50\,\overline{I}_1 - j\,40\,\overline{I}_2$$

$$\overline{U}_2 = j\,40\,\overline{I}_1 - (10 + j\,40)\,\overline{I}_2$$

Se cere :

1) să se determine cuadripolul echivalent în *T* ;

2) presupunând că acest cuadripol reprezintă circuitul echivalent al unui transformator perfect ($\overline{Y} = 0$) se cere să se determine tensiunea de alimentare, în gol și în sarcină, știind că $U_2 = 10$ kV, transformatorul debitând în sarcină un curent de 400 A la un factor de putere de 0,6 inductiv.

(IPB 1951)

5.30. Un transformator de 12000/2000 V, 50 Hz are rezistențele primarului și secundarului de 1,0, respectiv 0,04 Ω și reactanțele de 6,0, respectiv 0,15 Ω.

Se cere să se găsească :

1) Tensiunea necesară în partea de înaltă tensiune pentru ca în bobinajul părții de joasă tensiune, legat în scurtcircuit, să se producă un curent de 200 A.

Această tensiune se va exprima în procente din tensiunea nominală.

2) Factorul de putere la scurtcircuit.

3) Considerând curentul de magnetizare egal cu 6% din curentul nominal, iar factorul de putere la mersul în gol deducându-se din impedanțele respective ale transformatorului, se cere să se determine cuadripolul corespunzător acestui transformator, din care se vor deduce apoi elementele circuitului *T* corespunzător.

(IPB 1950)

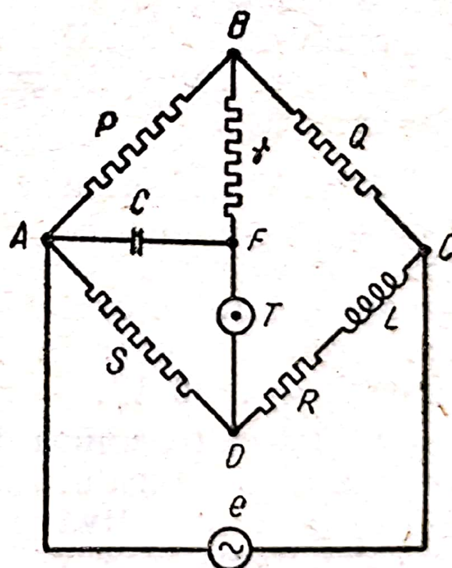


Fig. 5.31

5.31. Pentru măsurarea inductanței *L* și a rezistenței *R* a unei impedanțe necunoscute, se folosește un montaj în punte

(fig. 5.31). Puntea este în echilibru când prin aparatul de zero T nu trece niciun curent.

Se cere să se determine, aplicând metoda circuitelor independente, condiția de echilibru a punții, din care să se deducă apoi valorile lui L și R.

Aplicație: Să se determine L și R pentru cazul când echilibrul punții a fost obținut cu $P = Q = 1000\,\Omega$, $S = 500\,\Omega$, $r = 200\,\Omega$ și $C = 2\ \mu F$.

(IPB 1950

5.32. Pentru măsurarea inductanței bobinelor se folosește un montaj de punte (fig. 5.32), valoarea inductanței căutate fiind dedusă din valoarea parametrilor punții când aceasta este echilibrată.

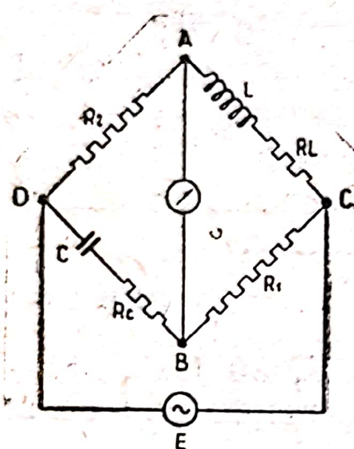


Fig. 5.32

Se cere să se determine expresia inducanței necunoscute L în funcție de parametrii C, R_c, R_1, R_2 și R_L a punții.

5.33. Doi transformatori trifazați perfecți T_1 și T_2 de 35/10 kV având puterile aparente egale, funcționează în paralel, debitând împreună 2000 kVA cu un factor de putere $\cos\varphi = 0{,}8$. Cei doi transformatori au tensiunile de scurt-circuit diferite și anume: transformatorul T_1 are $u_{sc1} = 14{,}3\%$, iar transformatorul T_2 are $u_{sc2} = 9{,}21\%$. Cei doi transformatori având aceeași cădere de tensiune ohmică $RI = 6\%$, au căderile de tensiune inductive diferite, și anume, $X_1I = 13\%$ și $X_2I = 7\%$, indicii raportându-se la cei doi transformatori.

Se cere să se determine repartiția sarcinii între cei doi transformatori.

(IPB 1951)

5.34. Un alternator trifazat, având o tensiune la borne de 6000 V, produce la plină sarcină un curent de 964 A, lucrând supraexcitat (forța electromotoare a alternatorului este mai mare decât tensiunea la borne și anume $E = 7200$ V).

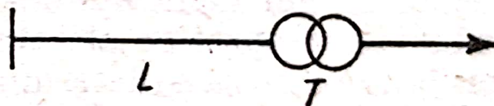


Fig. 5.35.

Știind că tensiunea de scurt-circuit a alternatorului este de 45%, se cere să se determine:

a) puterea activă produsă de alternator;

b) puterea reactivă produsă sau absorbită de alternator;

c) factorul de putere cu care funcționează alternatorul;

d) cu cât trebue redusă excitația, în %, pentru ca puterea reactivă să-și schimbe semnul?

Scanned with OKEN Scanner

Se neglijează rezistenţa alternatorului şi toate pierderile în fier, etc.

(IPB 1951)

5.35. Să se determine coeficienţii cuadripolului corespunzător unei scheme formate dintr'o linie şi un transformator (fig. 5.35). Coeficienţii cuadripolului echivalent al transformatorului sunt $\overline{A}_1 = \overline{D}_1 = 1$; $\overline{B}_1 = 2{,}23 + j51{,}25\ \Omega$; $\overline{C} = 12{,}1 - j91{,}91\ \mu S$; iar cei ai cuadripolului echivalent al liniei, $\overline{A}_2 = \overline{D}_2 = 0{,}9904 + j0{,}00345$; $\overline{B}_2 = 20 + j56{,}6\ \Omega$; $\overline{C}_2 = j345\ \mu S$.

5.36. Pentru compensarea parametrilor liniilor de transmitere a energiei electrice, se foloseşte uneori o compensare longitudinală centrală. Studiul unei astfel de compensări se face echivalând cele două porţiuni ale liniei cu două circuite în Π, legate între ele prin elementul de compensare (fig. 5.33). Considerând această schemă ca formată din trei cuadripoli având constantele $\overline{A}_1$, $\overline{B}_1$, $\overline{C}_1$, $\overline{D}_1$; $\overline{A}_2$, $\overline{B}_2$, $\overline{C}_2$, $\overline{D}_2$; $\overline{A}_3$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_3$, $\overline{D}_3$, se cere să se determine constantele cuadripolului rezultant.

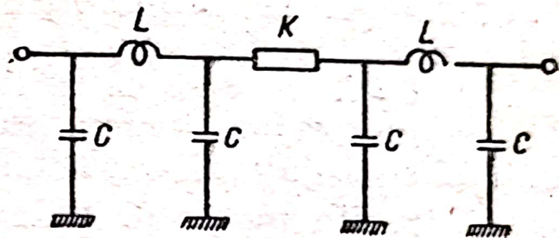


Fig. 5,36.

5.37. Să se determine coeficienţii cuadripolului echivalent unui sistem, format dintr'o linie de transport şi doi transformatori (fig. 5.37).

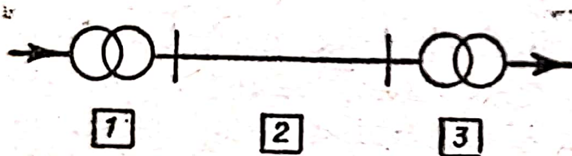


Fig. 5.37.

Coeficienţii cuadripolilor echivalenţi liniei şi transformatorilor sunt: *a*) pentru transformatori, $\overline{A}_1 = \overline{A}_3 = \overline{D}_1 = \overline{D}_3 = 1$; $\overline{B}_1 = 6{,}5 + j66\ \Omega$; $\overline{C}_1 = (4 - j40)\ 10^{-6}\ S$; $\overline{B}_3 = 5{,}9 + j60\Omega$; $\overline{C}_3 = (4{,}4 - j44)\ 10^{-6}\ S$; *b*) pentru linie, $\overline{A}_2 = \overline{D}_2 = 0{,}9940 + j\,0{,}0015$; $\overline{B}_2 = 10 + j57\ \Omega$; $\overline{C}_2 = j3{,}0.10^{-4}\ S$.

5.38. Circuitele echivalentele transformatorilor unei instalaţii de transmitere de energie electrică (circuite în Γ), au următoarele caracteristici: $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_3 = 5{,}4 + j\,103\ \Omega$ şi $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_3 = (3{,}8 - j59{,}0)10^{-6}\ S$ iar cel echivalent liniei: $\overline{Z}_2 = 23 + j\,100\ \Omega$ şi $\overline{Y}_2 = j\,8{,}5.10^{-4}\ S$.

Se cere să se determine coeficienţii cuadripolului echivalent.

5.39. Un alternator trifazat, având tensiunea la borne de 6 kV, alimentează un motor asincron printr'o linie a cărei impedanță totală pe fază este egală cu $3{,}2+j4{,}8\ \Omega$. Puterea dată de alternator este de 300 kW, cu un factor de putere 0,8. Se cere să se determine randamentul transmisiei.

5.40. Tensiunea la cele două extremități ale unei linii trifazate de transport de energie electrică are aceeași valoare eficace $U = 6$ kV, iar curentul pe linie este de 140 A. Impedanța totală a liniei este $Z = 1{,}8 + j2{,}4\ \Omega$. Care este randamentul transmiterii? Se presupune linia perfectă și se neglijează capacitatea.

5.41. Un motor sincron supraexcitat lucrează la extremitatea unei linii monofazate a cărei impedanță totală este $\overline{Z} = 3{,}2 + j4{,}8\ \Omega$. Tensiunea la barele uzinei este de 6000 V și motorul absoarbe o putere de 450 kW la un factor de putere egal cu 0,86. Se cere să se determine care este tensiunea la bornele motorului sincron. Se presupune linia fără conductanță și se neglijează capacitatea ei.

5.42. Un motor de inducție (asincron) și un motor sincron supraexcitat sunt legate în paralel la o rețea de 380/220 V, 50 Hz. Puterea motorului sincron este de 60 kVA, iar motorul asincron absoarbe o putere de 49,5 kW la un factor de putere egal cu 0,86. Excitația motorului sincron trebue astfel aranjată încât factorul de putere al întregului sistem să fie egal cu 1.

Se cere să se determine care este cel mai mic factor de putere pe care îl poate compensa motorul sincron.

5.43. La extremitatea unei linii electrice perfecte, trifazate, a cărei impedanță totală pe fază este $\overline{Z} = 0{,}1 + j0{,}2\ \Omega$, se conectează un motor asincron și o sarcină neinductivă ce absoarbe 100 A pe fază. La pornire, motorul absoarbe 30 kW la un factor de putere egal cu 0,4. Tensiunea la utilizare trebue să fie de 380/220 V. Se cere să se determine cât trebue să fie tensiunea la plecare în momentul pornirii motorului.

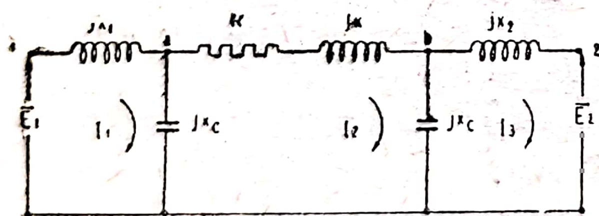


Fig. 5.44

5.44. Cuadripolul din figura 5.44. reprezintă circuitul echivalent al unei linii de transport de energie electrică. Se cere să se determine. :

(*a*) Circuitul echivalent în *T*.
(*b*) Circuitul echivalent în π.
(*c*) Constantele generale ale cuadripolului.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicație numerică. $R = 5{,}66\ \Omega$; $X = 81{,}8\ \Omega$; $X_1 = X_2 = 240\ \Omega$; $X_c = -3790\ \Omega$.

5. 45. Un potențiometru, ca cel reprezentat în figura 5.45, poate fi asimilat cu un cuadripol. Rezistența totală a potențiometrului este R. Rezistența între punctele a și b este nR. Să se determine variația coeficienților cuadripolului în funcție de n.

5.46. Să se determine coeficienții cuadripolului din figura 5.46 în care: $R_1 = 400\ \Omega$, $R_2 = 500\ \Omega$; $R_3 = 1000\ \Omega$ și $R_4 = 4000\ \Omega$.

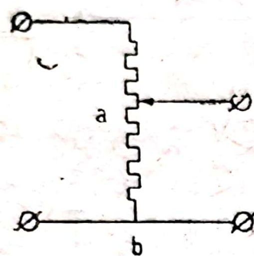


Fig. 5.45

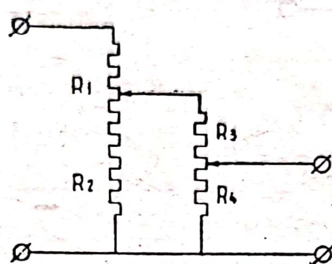


Fig. 5.46

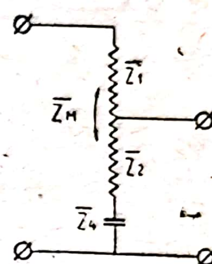


Fig. 5.47

5.47. In tehnica telecomunicațiilor, în punctele unde se leagă linii aeriene cu cabluri subterane se utilizează un montaj format din autotransformatori în serie cu un condensator (fig. 5.47). Să se găsească coeficienții cuadripolului echivalent.

Aplicație numerică: $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = 10 + j\,60\ \Omega$; $\overline{Z}_m = j\,30\ \Omega$; $Z_2 = -j\,90\ \Omega$.

5.48. Pentru determinarea coeficienților A. B, C și D ai schemei echivalente a unei linii simetrice de transport s'au făcut probele de mers în gol și de scurtcircuit.

Incercarea de mers în gol a dat:

$U_{10} = 30\ \text{kV}$; $I_{10} = 6\ \text{A}$; $P_{10} = 27\ \text{kW}$; $\varphi_{10} < 0$.

Incercarea de scurtcircuit:

$U_{1K} = 4{,}5\ \text{kV}$; $I_{1K} = 30\ \text{A}$; $P_{1K} = 69\ \text{kW}$ $\varphi_{1K} > 0$.

Să se determine coeficienții schemei echivalente.

5.49. Doi cuadripoli sunt conectați după schema indicată în figura 5.49 (conectare în serie).

Coeficienții primului cuadripol sunt A_1 B_1 C_1 D_1, iar al celui de al doilea A_2, B_2, C_2, D_2.

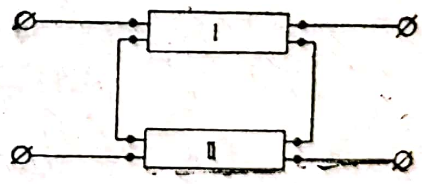
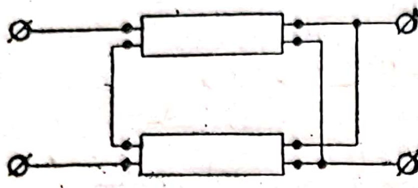


Fig. 5.49

Să se găsească coeficienții cuadripolului echivalent. Ce devin valorile acestor coeficienți dacă $A_1 = A_2 = A$; $B_1 = B_2 = B$; $C_1 = C_2 = C$; $D_1 = D_2 = D$?

5.50. Doi cuadripoli sunt legați în serie – paralel (fig. 5.50). Să se determine coeficienții cuadripolului echivalent dacă se cunosc coeficienții fiecărui cuadripol în parte, A_1 B_1 C_1 D_1 și A_2 B_2 C_2 D_2.

Ce devin acești coeficienți dacă cuadripolii sunt identici?


Fig. 5.50

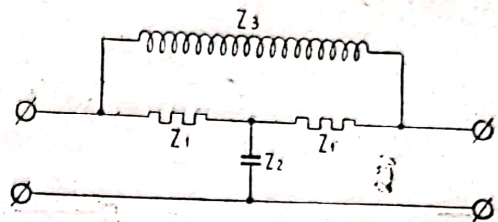


Fig. 5.52

5.51. Care este puterea dată unui consumator, alimentat printr'un sistem de transport, coeficienții cuadripolului echivalent al schemei de transport fiind $\overline{A} = 1{,}02 + j\,0{,}002$; $\overline{B} = 0{,}06 + j\,0{,}08\ \Omega$; $\overline{C} = -j\ 0{,}025$ S; $\overline{D} = 0{,}98 - j\,0{,}0034$ dacă tensiunea la sursă este $U_1 = 220$ V, puterea consumată de întreg sistemul $S_1 = 17{,}6$ kW iar $\cos\varphi_2 = 0{,}8$, $\varphi_1 > 0$.

5.52. Să se determine elementele circuitului în Π echivalent cuadripolului de tip punte din fig. 5.52 în care $Z_1 = 20\ \Omega$; $\overline{Z}_2 = -j\,20\ \Omega$ și $\overline{Z}_3 = j\,20\ \Omega$.

5.53. Printr'o linie cu dublu circuit se transportă energie la un consumator. Tensiunea receptorului este $U_2 = 10$ kV, puterea consumată de receptor $P_2 = 500$ kW pentru $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ $(\varphi_2 < 0)$. Reprezentând linia sub forma unui cuadripol echivalent (fig. 5.53) ai cărui parametri sunt $r = 20\ \Omega$; $x = 40\ \Omega$; $x_0 = -200\ \Omega$; să se determine tensiunea U_1 dela generator, curentul I_1 și puterea P_1.

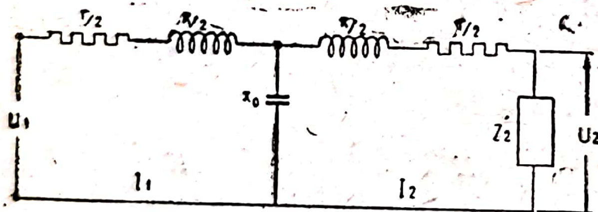


Fig. 5.53

5.54. O linie de transport de energie, reprezentată printr'un cuadripol echivalent, se caracterizează prin coeficientul de propagare $\gamma = 0{,}13 + j\ 0{,}18$ și impedanța caracteristică $\overline{Z} = 480 - j\ 30\ \Omega$. Curentul I_1, puterea P_1 și tensiunea U_1 la bornele generatoare, sunt respectiv $I_1 = 160\ A$; $P_1 = 170 \cdot 10^3$ kW, $U_1 = 115$ kV $(\varphi_1 > 0)$. Să se calculeze curentul I_2, tensiunea U_2, puterea P_2 la capătul receptor, randamentul liniei η și $\cos\varphi_2$ al receptorului.

5.55. Montajul reprezentat în figura 5.55 permite să se ia din linia de transport de înaltă tensiunea o putere oarecare,

prin intermediul unui potențiometru capacitiv. Parametrii circuitului sunt: $C = 0{,}05\mu F$, $C_1 = 0{,}5\mu F$, bobina de inductanță are caracteristicele $L = 17$ H și $r = 500\ \Omega$. Tensiunea pe fază a liniei este $U = \frac{100}{\sqrt{3}}$ kV, frecvența $f = 50$ Hz.

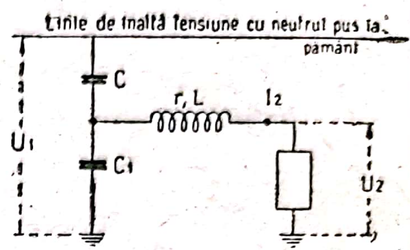


Fig. 5.55

Să se calculeze curentul de sarcină I_2, tensiunea la utilizare U_2, puterea P_2 consumată în receptor, randamentul η și cos φ al întregei instalații, dacă $\overline{Z}_2 = 600 + j\,550\ \Omega$. Să se construiască diagrama vectorială a curenților și tensiunilor.

5.56. La bornele de intrare ale unui cuadripol Q oarecare este legat în lanț un cuadripol în T format din rezistențe egale cu $2\ \Omega$ fiecare (fig. 5.56). Cuadripolul este caracterizat prin următoarele elemente:

Bornele 3 și 4 de ieșire fiind deschise,

$$\frac{E_1}{E_2'} = \frac{E_2'}{I_1} = 2 \text{ numeric};$$

Bornele 3 și 4 de ieșire fiind legate în scurtcircuit

$$\frac{I_1}{I_2} = 2.$$

Se cere să se determine:

(*a*) Constantele generale ale cuadripolului Q.

(*b*) Circuitul T echivalent al cuadripolului Q.

(*c*) Circuitul echivalent în T și în Π al sistemului de cuadripoli în lanț.

(*d*) Constantele generale ale cuadripolului rezultant.

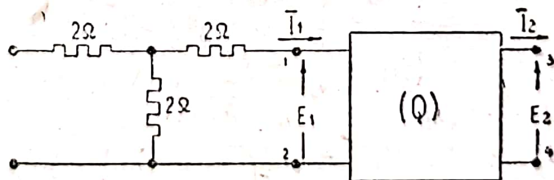


Fig. 5.56

5.57. Fie un sistem de transmitere a energiei electrice reprezentat printr'un cuadripol general Q. Să se arate, prin aplicarea teoremei lui Thévenin acestui circuit, că, sistemul de transmitere poate fi reprezentat prin circuitul echivalent dat

în figura 5.57, dacă, pentru orice valoare a sarcinii $\overline{Z}_s$, raportul tensiunilor este dat de relația

$$\frac{\overline{E}_1}{\overline{E}_2'} = \overline{A} + \frac{\overline{B}}{\overline{Z}_s}$$

5.58. Un sistem de transmitere a energiei electrice este reprezentat printr'un cuadripol având constantele $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$. Să se arate că sistemul poate fi reprezentat prin circuitele echivalente din figura 5.58. Transformatoarele din scheme sunt fără pierderi.

5.59. O linie trifazată de transport de energie electrică de 60 km, are următoarele caracteristice electrice : $U_2 = 35$ kV, $R = 0{,}26$ Ω/km și fază ;

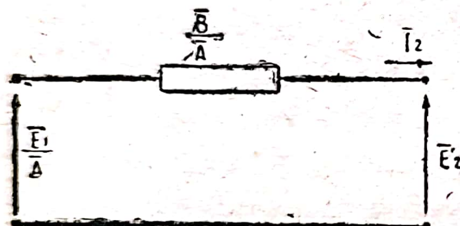


Fig. 5.57

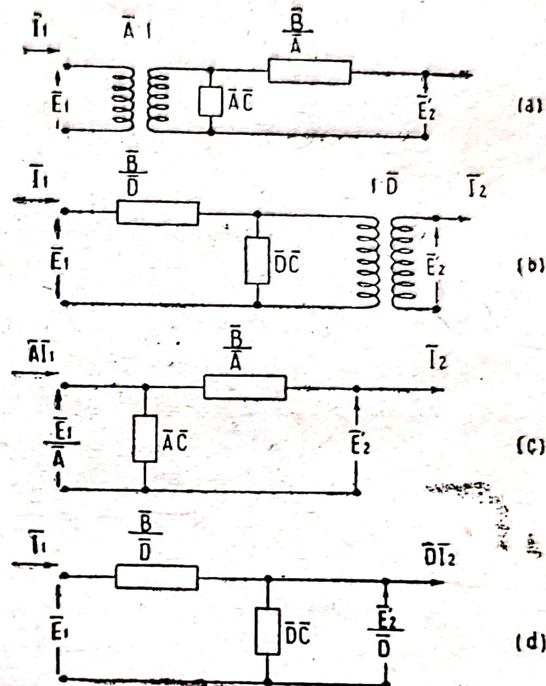


Fig. 5.58

$X = 0{,}4$ Ω/km și fază. Linia fiind perfect simetrică și izolată, alimentează o regiune care absoarbe puterea cu un factor de putere egal cu 0,707. In aceste condiții tensiunea de alimentare a liniei este numai cu 20% mai mare decât tensiunea de sosire.

Se cere :

(*a*) Puterea activă transmisă de linie.
(*b*) Puterea reactivă transmisă de linie.
(*c*) Randamentul liniei.
(*d*) Factorul de putere la plecare.
(*e*) Pierderile de putere activă și reactivă pe linie.
(*f*) Variația randamentului liniei când factorul de putere la sosire variază între 1 și 0.

(IPB 1951)

5.60. Circuitul echivalent simplificat al unei faze a unei linii de transport a energiei electrice de înaltă tensiune este reprezentat prin schema din figura 5.60. Această linie leagă

centrala generatoare E cu o stație de alimentare a unui centru Z_s și de un mare combinat industrial Z_u. Factorul de putere al întregului sistem este îmbunătățit în stație cu ajutorul unui motor sincron, reprezentat în schemă prin admitanța R_G, C_0.

Se cere să se determine puterea dată de centrala generatoare și factorul de putere corespunzător.

Aplicație numerică. $E = 60/\sqrt{3}$ kV; $f = 50$ Hz; $R_1 = 8{,}2\ \Omega$; $L_1 = 65$ mH; $C_L = 0{,}5\mu F$; $\overline{Z}_u = 705 + j\,232\ \Omega$; $R_2 = 23{,}4\ \Omega$; $L_2 = 68$ mH; $C_0 = 10\mu F$; $R_c = 12\,500\ \Omega$; $\overline{Z}_s = 165 + j\,103\ \Omega$.

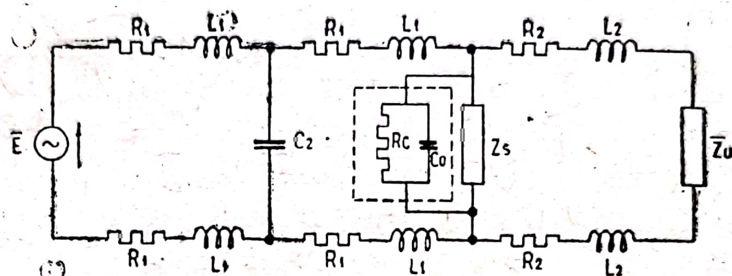


Fig. 5.60

5.61. Doi generatori sincroni alimenteaz un receptor compus din 2 ramuri legate în triunghi (fig. 5.61)

$$\overline{Z}_{12} = (4 + j4)\,;\ \overline{Z}_{13} = \overline{Z}_{23} = (29 + j\,38).$$

Forța electromotoare a generatorilor și impedanțele lor interioare sunt respectiv $\overline{E}_1 = 200$ V; $\overline{E}_2 = 200\ \varepsilon^{j\frac{\pi}{3}}$ V;
$\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = (1 + j\,2)\ \Omega$;

Să se calculeze curenții I_1, I_{12}, I_{23}, I_{31}, I_2 și puterea dată de fiecare generator rețelei.

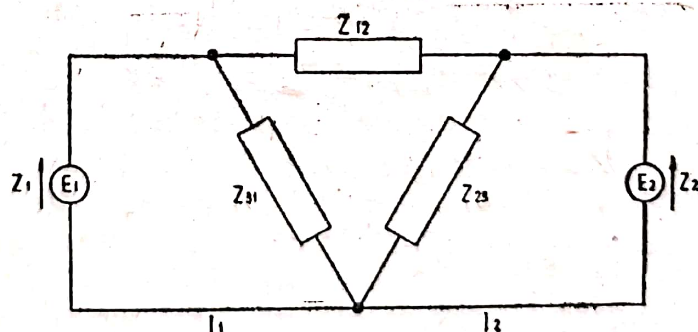


Fig. 5.6

5.62. Un sistem format din două mașini sincrone co ec tate între ele pri tr'un cablu poate fi reprezentat prin circuitul

echivalent din figura 5.62. Astfel, o mașină sincronă, funcționând în regim permanent, poate fi reprezentată printr'o forță electromotoare complexă $\overline{E}$ în serie cu o reactanță X_s. O mașină sincronă funcționează ca motor dacă vectorul tensiunii la borne $\overline{U_t}$ este decalat înaintea vectorului forței electromotoare $\overline{E}$; ea funcționează ca generator în cazul contrariu. In circuitul din figura 5.62. mașina 1 funcționează ca generator producând energie electrică iar mașina 2 ca motor, absorbind energia produsă de prima mașină. In acest caz $\overline{E_1}$ este înaintea tensiunii $\overline{E}_2$.

Se cere să se determine:

(*a*) Ecuațiile de funcționare ale sistemului.

(*b*) Puterea la bornele de intrare și de eșire ale circuitului echivalent în funcție de unghiul de defazaj $\theta = \Psi_1 - \Psi_2$ al celor două forțe electromotoare $\overline{E}_1$ și $\overline{E}_2$.

(*c*) Valoarea minimă a unghiului θ pentru ca sistemul să funcționeze în condițiile enunțului.

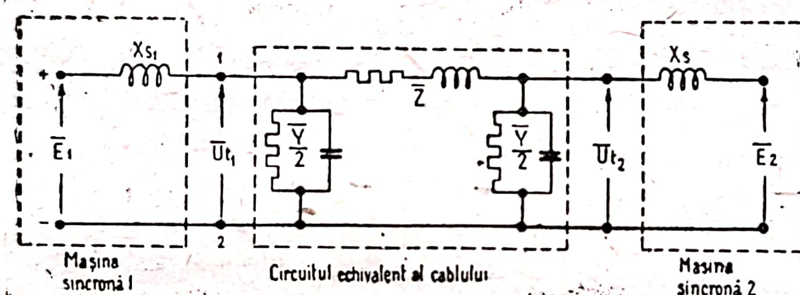


Fig. 5.62

Ce se întâmplă dacă unghiul Ψ_1 este mult mai mare decît Ψ_2, adică dacă unghiul θ este mult mai mare decât valoarea minimă necesară? Mașina 1 funcționează ca generator sau ca motor?

De rezolvat această problemă prin metoda perechilor de noduri.

5.63. Pentru transformarea unei distribuții de energie electrică din distribuție cu tensiune constantă în distribuție cu curent constant, se utilizează un montaj în punte (fig. 5.63). In acest montaj, alimentându-se una din diagonale cu o tensiune constantă, se obține în cealaltă un curent constant, și invers. Rezistența R a bobinei de inducție se face cât mai mică posibil. Dacă la bornele 2—2' este conectată o sarcină de impedență $\overline{Z}_s$, se cere:

(*a*) Expresia admitanței de transfer $\overline{Y}_{12} = \frac{\overline{I}_2}{\overline{E}_1}$ între sursa $\overline{E}$ și sarcina $\overline{Z}_s$.

Scanned with OKEN Scanner

(*b*) Să se arate că, în cazul când $R = 0$, curentul prin impedanță $\overline{Z}_s$ este independent de valoarea acestei impedanțe.

(*c*) In cazul când $R = 0$, să se arate că dacă se alimentează sistemul la bornele 1—1' cu un curent constant, la bornele 2—2' apare o tensiune constantă.

(*d*) Să se determine admitanța aparentă la bornele de alimentare 1—1', bornele de utilizare fiind scurtcircuitate.

(*e*) In aceleași condiții să se determine admitanța de transfer a montajului.

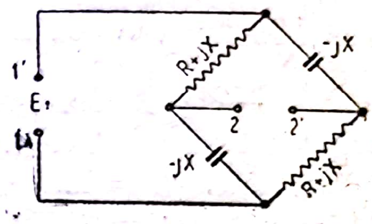


Fig. 5.63

5.64. Un cuptor electric cu arc are pe fiecare fază rezistența $R_{fază} = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\,\Omega$ și este alimentat dela un transformator prin trei conductori de cupru $\left(\rho = \frac{1}{57 \cdot 10^4}\ \Omega\,\text{cm}\right)$ având secțiunea de 50000 mm², diametrul 300 mm și lungimea 10 m. Distanța între faze 3 m. Tensiunea la bornele transformatorului este de 500 V; transformatorul are conexiunea stea. Neglijând impedanțele transformatorului, să se găsească curenții în electrozii cuptorului și sarcina (puterea activă) pe fiecare fază a transformatorului.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA II

STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

6. STUDIUL UNDELOR COMPLEXE

— Să se transforme funcțiile ce urmează în funcții sinusoidale cu amplitudine pozitivă și defazaj mai mic ca 180⁰ :

6.1. $y = 120 \sin(\omega t - 610^0)$

6.2. $y = -100 \sin(\omega t - 30^0)$

6.3. $y = -150 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$

6.4. $y = 220 \cos(\omega t - 20^0)$

6.5. $y = -380 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

— Să se determine decalajul dintre funcțiile :

6.6. $y_1 = 100 \sin(\omega t - 38^0)$ $y_2 = 120 \sin(\omega t - 25^0)$

6.7. $y_1 = 5 \cos(\omega t - 15^0)$ $y_2 = 120 \sin(\omega t - 120^0)$

6.8. $u = 120 \sin(\omega t - 120^0)$ $i = 5 \cos \omega t$

6.9. $y_1 = 100 \sin(\omega t + 150)$ $y_2 = 120 \sin(\omega t - 120^0)$

6.10. $y_1 = 6 \sin(\omega t - 120^0)$ $y_2 = -10 \sin(\omega t - 30^0)$

— Să se determine decalajul față de origină a armonicelor :

6.11. $y_3 = 5 \sin(3\omega t - 33^0)$

6.12. $y_5 = 2 \cos(5\omega t - 20^0)$

6.13. $y_4 = -3 \cos(4\omega t - 30^0)$

6.14. $y_{17} = -1{,}2 \sin(17\omega t - 86^0 30')$

— Să se transforme armonicele :

6.15. $y_3 = 12 \sin 3(\omega t - 70^0)$

6.16. $y_7 = 100 \sin(7\omega t + 212^0)$

6.17. $y_{11} = 5 \sin 11(\omega t - 25^0)$

6.18. $y_5 = 2 \cos 5(\omega t + 30^0)$

— Să se determine decalajul dintre armonicele :

6.19. $y_3 = 12 \sin 3(\omega t - 42^0)$ $y_5 = 10 \sin(5\omega t - 5^0)$

6.20. $y_2 = 2 \sin 2\omega t$ $y_3 = 3 \sin 3(\omega t + 18^0)$

6.21. $y_{11} = 22 \sin 11(\omega t - 3^0)$ $y_{13} = 18 \sin 13(\omega t - 43^0)$

— Să se compună armonicele

6.22. $y_3' = 3 \sin(3\omega t + 15^0)$ cu $y_3'' = 5 \sin 3(\omega t + 8^0)$

6.23. $y_1' = 120 \cos(\omega t + 10^0)$ cu $y_1'' = 128 \sin(\omega t - 15^0)$

Scanned with OKEN Scanner

6.24. $y_5' = 2\cos 5(\omega t - 1^0)$ cu $y_5'' = 3\sin(5\omega t + 7^0)$
6.25. $e = 120\sin\omega t + 3\sin 17\,\omega t + 3\sin(19\,\omega t + 180^0)$
6.26. $e = 220\sin\omega t + 2\sin 17\,\omega t + 2\sin 19\,\omega t$.
6.27. $i = 5\sin\omega t + 2\sin(11\,\omega t + 16^0) + 2\sin(13\omega t + 6^0)$
6.28. $e = E_n\sin n\,\omega t + E_n\sin(n + 4)\,\omega t$
6.29. $i = 2\sin 2\,\omega t + 3\sin 4\,\omega t$
6.30. $i = 3\sin 4\,\omega t + 2\sin(6\,\omega t - 180^0)$
6.31. $e = 15\sin(3\,\omega t + 45^0) + 10\sin(5\,\omega t + 135^0)$
6.32. $i = 2\sin(2\,\omega t + 30^0) + 3\sin(4\,\omega t - 30^0)$
6.33. $i = 5 + 2\sin(2\,\omega t + 30^0) + \sin(4\,\omega t - 15^0)$

— Să se construiască diagrama polară a următoarelor funcții:

6.34. $e = 100\sin\omega t + 20\sin 3(\omega t + \alpha)$ pentru $\alpha = 0^0, 30^0, 60^0, 90^0$ și 120^0.

6.35. $e = 100\sin\omega t + 20\sin 5(\omega t + \beta)$ pentru $\beta = 0^0, 18^0, 36^0, 54^0$ și 72^0

6.36. Să se construiască curba polară a unei unde dreptunghiulare.

6.37. Idem pentru unda triunghiulară.

6.38. Idem pentru unda trapezoidală.

6.39. Să se studieze forma curbei

$$e = 100\sin\omega t + 50\sin(2\,\omega t - \varphi)$$

pentru diferite valori ale unghiului φ cuprinse între 0 și 2

6.40. Aceiași chestiune pentru curba

$$i = 75 + 100\sin\omega t + 50\sin 3\,\omega(t + \theta),$$

θ variind între 0 și T.

7. ANALIZA ARMONICĂ

7.1. Să se descompună în armonice funcția formată dintr'un segment de dreapta AB între 0 și 2π (fig. 21), de ecuație

$$y = -\frac{25}{\pi}x + 100$$

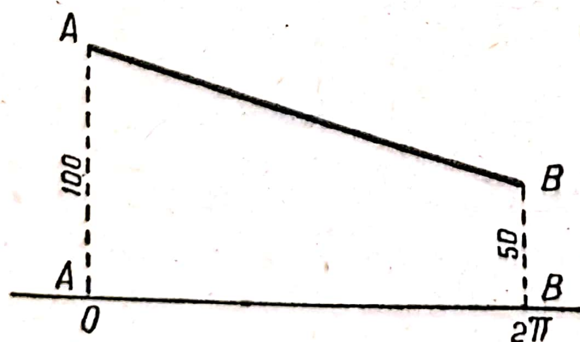


Fig. 7.1

7.2. O funcție nesinusoidală este formată dintr'un arc unic de parabolă între θ și 2π, având ecuația

$$y = \frac{Y}{\pi^2}x(2\pi - x).$$

Să se descompună în armonice.

7.3. Să se descompună în armonice funcţia din figura 7,3 formată din două drepte: între 0 şi $\frac{\pi}{2}$ dreapta AB de ecuaţia $y = \frac{2Y}{\pi} x$ şi între $\frac{\pi}{2}$ şi 2π dreapta $B'C$ de ecuaţie $y = 0$.

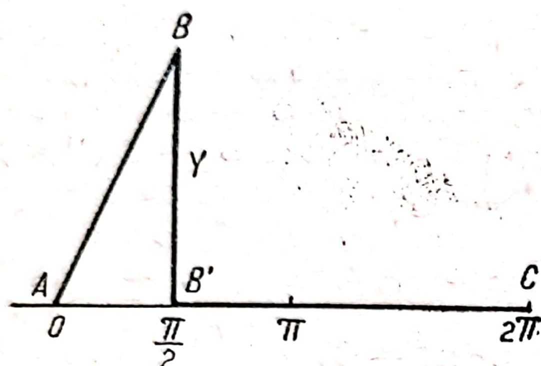


Fig. 7.3

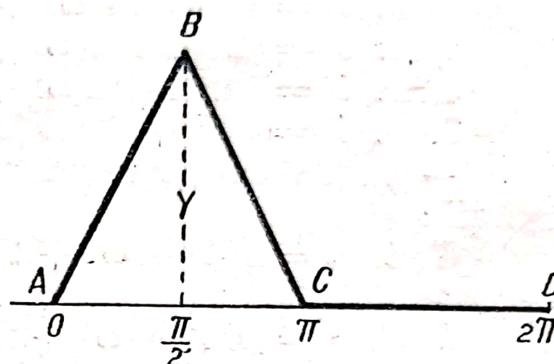


Fig. 7.4

7.4. Să se descompună în armonice funcţia formată între 0 şi π de un triunghi isoscel ABC de înălţime Y şi între π şi 2π de dreapta CD având ecuaţia $y = 0$ (fig. 7.4).

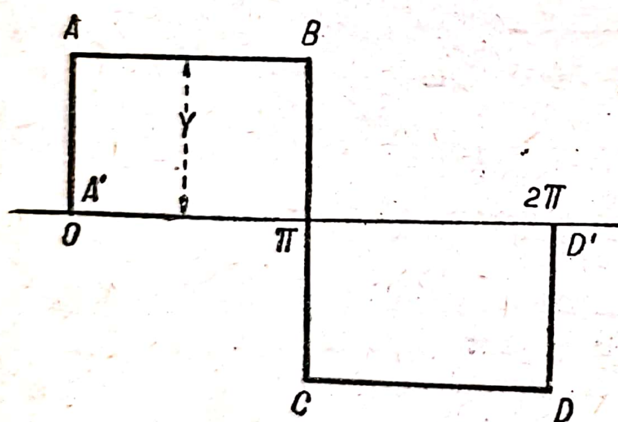


Fig. 7.5

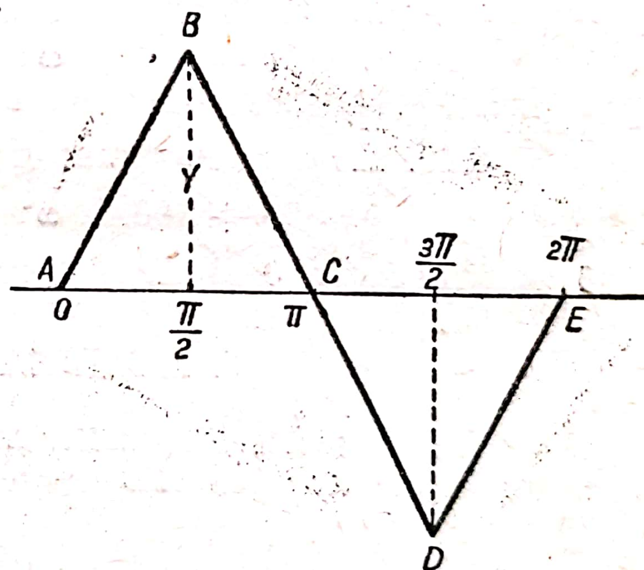


Fig. 7.6

7.5. Se dă funcţia formată din două drepte şi anume, între 0 şi π de dreapta AB de ecuaţia $y = Y$ şi între π şi 2π de dreapta CD de ecuaţie $y = -Y$. Se cere să se descompună în armonice (fig. 7.5).

7.6. Să se descompună în armonice funcţia nesinusoidală formată din triunghiuri isoscele de înălţime Y. (fig. 7.6).

Scanned with OKEN Scanner

7.7. Să se descompună în armonice funcția nesinusoidală formată din trapeze (fig. 7.7).

7.8. Se dă funcția nesinusoidală formată din două parabole, și anume, între 0 și π, de parabola având ecuația

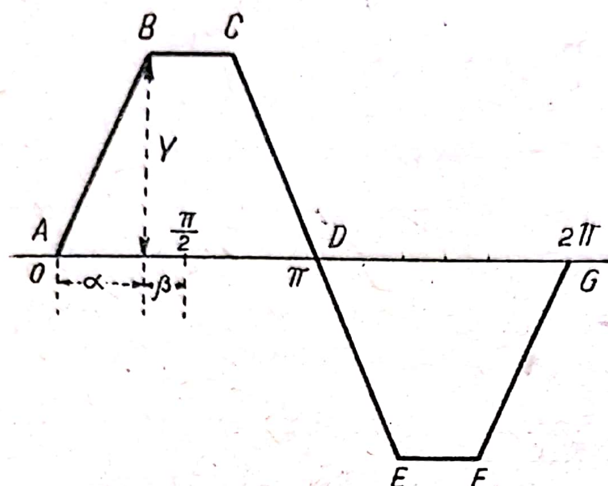


Fig. 7.7

$$y = \frac{4Y}{\pi^2} x (\pi - x)$$

iar între π și 2π, de parabola având ecuația

$$y = -\frac{4Y}{\pi^2} x (\pi - x)$$

Se cere să se descompună în armonice.

7.9. Tensiunea dată de un redresor monofazic simplu este formată între 0 și π de o sinusoidă de ecuație $y = Y \sin x$, iar între π și 2π de dreapta de ecuație $y = 0$. Se cere să se descompună în armonice această curbă de tensiune.

7.10. Aceeași problemă pentru curba de tensiune a unui redresor monofazat care redresează ambele semiperioade, și care e formată din două sinusoide identice.

7.11. Să se verifice prin metoda grafică a lui Krug că o curbă electrotehnică nu are decât armonice impare.

7.12. Unda de tensiune a unui alternator este nesinusoidală și are forma unui dreptunghi de bază $T/2$ și înălțimea U, având suprapus un triunghi isoscel. Tensiunea maximă a undei fiind $U_1 = 2U$, se cere

a) descompunerea în serie Fourier;

b) valoarea eficace;

c) rezidiul deformant;

d) coeficientul de distorsiune.

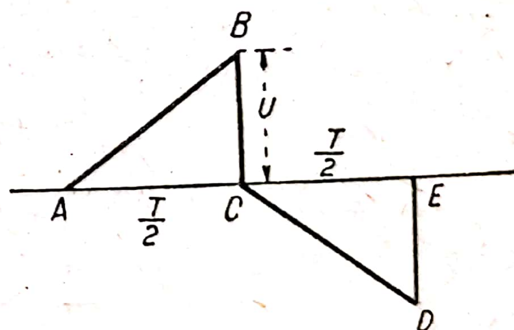


Fig. 7.13

7.13. Aceeași problemă pentru unda unui alternator care este formată din două triunghiuri dreptunghice cu o catetă egală cu $T/2$ și cealaltă catetă egală cu U (fig. 7.13).

7.14. Se dă oscilograma din fig. 7.14, şi se cere:

a) Să se facă analiza armonică a acesteia folosind metoda ordonatelor echidistante şi cu ajutorul cartoanelor ajurate.

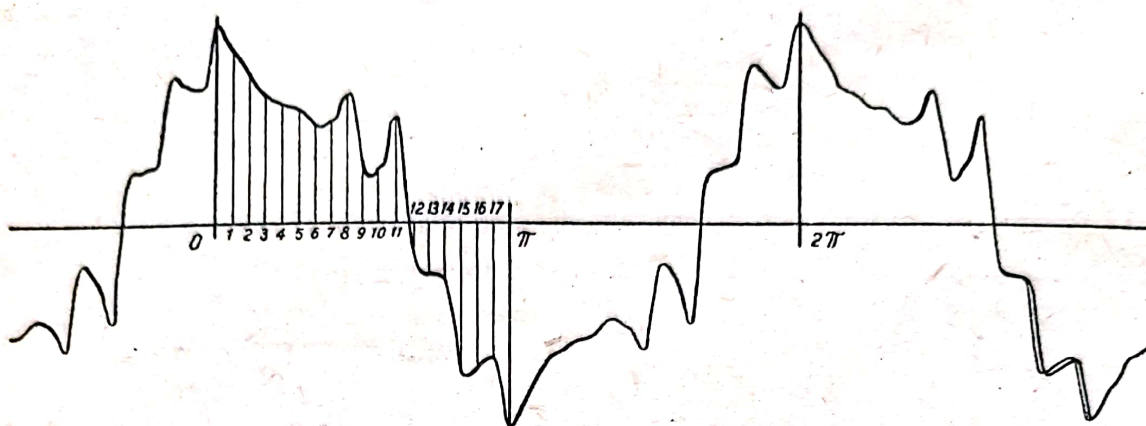


Fig. 7.14

Perioada se va împărţi în 36 părţi egale. Scara oscilogramei este 2 A = 1 mm.

b) Reprezentarea grafică a rezultatului analizei armonice, care se va pune sub forma

$$i = \sum C_n \sin (n\,\omega t - \varphi_n),$$

figurându-se pe desen decalajele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

c) Curba rezultantă, care se va obţine prin sumarea armonicelor dela punctul precedent şi care se va compara cu curba analizată, în care scop aceasta se va trasa pe aceeaşi diagramă.

d) Calculul analitic şi grafic al intensităţii eficace.

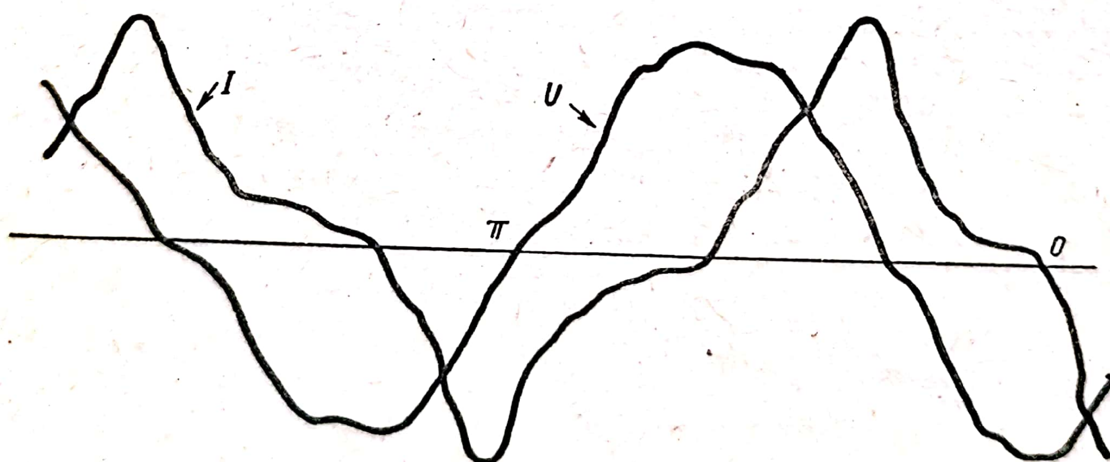


Fig. 7.15

7.15. Un regim deformant are ambele curbe, de tensiune şi de curent, deformate, aşa după cum se vede în oscilograma din fig. 7.15 [illegible] $U_{ef} = 150$ V [illegible] i $I_{ef} = 5$A.

Se cere:

a) analiza armonică a curbelor de tensiune şi curent, utilizându-se metoda ordonatelor echidistante şi folosind ca metodă de calcul tabelele de calcul;

b) să se determine din analiza armonică efectuată:

— valoarea eficace;
— rezidiul deformant;
— coeficientul de distorsiune;

c) să se calculeze, din analiza armonică:

— puterea activă;
— puterea reactivă;
— puterea deformantă;
— puterea aparentă;
— eroarea de determinare a puterii aparente în raport cu cea măsurată direct cu aparatele de măsură;

d) să se determine valoarea eficace prin metoda grafică şi să se compare cu aceea obţinută prin calcul.

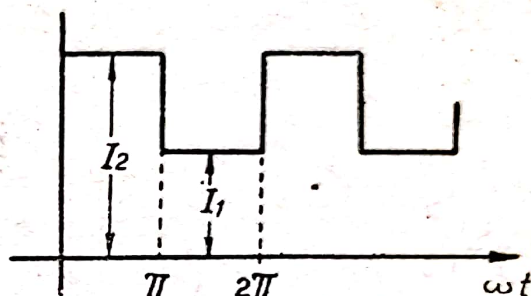


Fig. 7.16

7.16. Se cere să se descompună în serie Fourier curba semnalelor telegrafice (fig. 7.16) în cazul semnalizării periodice de puncte.

7.17. Aceeaşi problemă pentru curba curentului din fig. 7.17 şi să se calculeze valoarea eficace: *a*) folosind seria obţinută; *b*) fără a folosi seria obţinută.

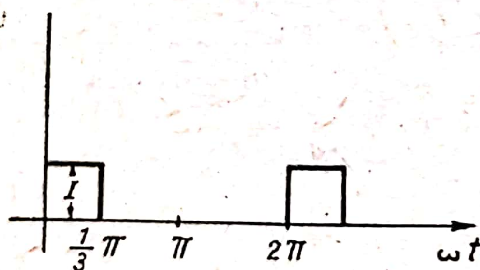


Fig. 7.17

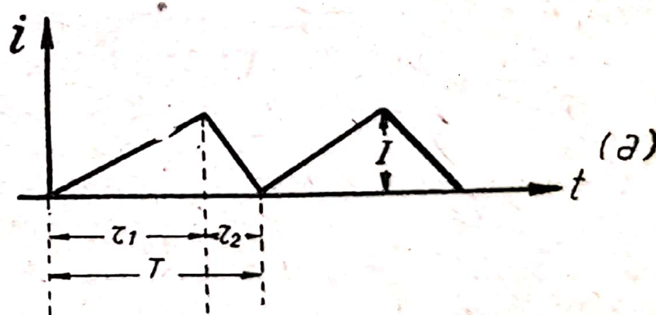


Fig. 7.18

7.18. Un circuit format dintr'o rezistenţă R în serie cu o inductanţă L, este străbătut de un curent alternativ a cărui curbă este dată în fig. 7.18.

Fără a descompune această curbă în armonice, să se determine curba tensiunii aplicate circuitului.

7.19. Să se descompună în armonice curba tensiunii a cărei oscilogramă este formată dintr'o jumătate de sinusoidă trunchiată (fig. 7.19).

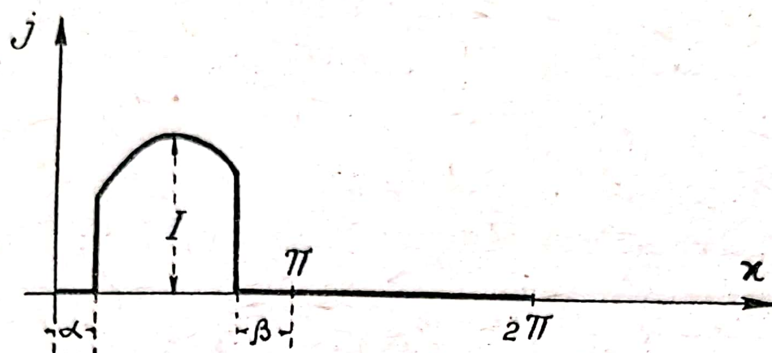


Fig. 7.19

7.20. Să se determine grafic prima, a treia şi a cincea armonică a unei curbe de curent, simetrică faţă de de axa timpurilor, definită prin amplitudinile măsurate din 15^0 în 15^0, prima fiind la $t = 0$ şi ultima la $t = 180^0$, $i = 0$, 15, 20, 18, 15, 32, 45, 50, 45, 50, 45, 37, 21 mA.

7.21. Oscilograma tensiunii unui redresor, care redresează ambele alternanţe, este formată din două sinusoide trunchiate şi se obţine din figura 7.19. construind şi în intervalul $\pi - 2\pi$ o curbă identică cu aceea din intervalul $0 - \pi$. Se cere să se descompună în serie armonică această curbă de tensiune.

7.22. Curba de tensiune a unui alternator la care bobinajul este aşezat în crestături are forma unei scări cu trei trepte şi cu regiune de ordonată nulă. Lăţimea şi înălţimea diverselor trepte sunt: treapta de ordonată nulă 2α; treapta întâia β şi X; treapta doua γ şi Z; treapta treia 2δ şi W. Amplitudinea maximă a curbei este $X + Z + W = Y$. Primul sfert de perioade se găseşte la absciza $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$. Se cere să se deseneze curba şi să se descompună în serie Fourier.

7.23. Curba de tensiune a unui alternator cu indusul fără crestături, la care lăţimea unei bobine este mai mare decât pasul polar are forma unei linii trapezoidale frânte, fără regiune de ordonată nulă. Pornind din origină, primul segment de dreaptă este ipotenuza unui triunghi dreptunghic având catetele α (pe axa abscizelor) şi X (în ordonată); al doilea segment la fel, catetele fiind β şi Z; al treilea segment este orizontal de lungime 2γ. Ordonata maximă este $Y = X + Z$. Se cere să se deseneze curba şi să se descompună în serie armonică.

Scanned with OKEN Scanner

7.24. Din rezultatele obținute în problema precedentă, să se deducă termenul general al curbelor în trapez, în dreptunghi și în triunghi isoscel.

7.25. Să se descompună în serie Fourier curba curentului redresat de un redresor trifazat care redresează numai o alternanță.

8. STUDIUL REGIMULUI DEFORMANT

— Să se determine valoarea eficace, reziduul deformant, sinusoida echivalentă, factorul de formă și coeficientul de distorsiune la următoarele funcții nesinusoidale:

8.1. $i = 8{,}46 \sin(\omega t - 15^0) + 2{,}82 \sin 3\omega t + 2{,}11 \sin 5(\omega t - 5^0)$.

8.2. $u = 120\sqrt{2} \sin(\omega t - 10^0) + 15\sqrt{2} \sin(3\omega t - 15^0) + 8\sqrt{2} \sin(5\omega t - 5^0) + 1{,}4\sqrt{2} \sin 7\omega t + 2{,}7\sqrt{2} \sin(9\omega t - 18^0)$.

8.3. $u = 100 + 100 \sin(\omega t + 55^0) + 10 \sin(3\omega t - 100^0) + \sin 5\omega t$.

8.4. $i = 5 + 5 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t + \sin 5\omega t + 1{,}4 \sin 7\omega t$.

8.5. $i = 7{,}05 \sin(\omega t - 60^0) + 1{,}41 \sin(2\omega t - 25^0) + 4{,}23 \sin 3\omega t + 2{,}82 \sin(4\omega t + 45^0) + 5{,}64 \sin 5\omega t$.

8.6. Unda de tensiune a unui alternator are forma unui dreptunghi cu bază $T/2$ și înălțimea U, având suprapus un triunghi isoscel. Tensiunea maximă a undei este $U_M = 2U$. Descompunerea în armonice a acestei unde a dat ca termen general

$$A_n = \frac{4U}{(2n+1)\pi}\left[1 + \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Se cere să se calculeze:

a) valoarea eficace;
b) reziduul deformant;
c) coeficientul de distorsiune. (IPB 1950)

8.7. Analiza armonică a unui regim deformant a dat următoarele unde de tensiune și curent:

$$u = 141 \sin(\omega t - 120^0) + 14{,}1 \sin(3\omega t - 250^0)$$
$$i = 7{,}05 \sin(\omega t - 150^0) + 1{,}41 \sin(3\omega t - 310^0)$$

Să se calculeze factorul de putere al regimului și factorii reactiv și deformant. (IPB 1949)

8.8. Un regim deformant este format din următoarele unde:

$$u = 141 \sin(\omega t - 30^0) + 0{,}141 \sin(3\omega t + 200^0) + $$
$$+ 0{,}0141 \sin(5\omega t - 150^0) \text{ V}.$$
$$i = 7{,}05 \sin(\omega t - 60^0) + 1{,}41 \sin(2\omega t - 25^0) +$$
$$4{,}23 \sin(3\omega t + 260^0) + 2{,}82 \sin(4\omega t + 45^0) + 5{,}64 \sin(5\omega t + 255^0) \text{ A}.$$

Să se determine factorul de putere, factorul reactiv şi factorul deformant al regimului.

Pentru calculul puterii deformante se va folosi o relaţie aproximativă, justificându-se aceasta.

(IPB 1949)

8.9. Se dă tensiunea

$$u = 169 \sin(\omega t + 12^0) + 16{,}9 \sin(3\omega t - 100^0) +$$
$$+ 1{,}69 \sin(5\omega t - 85^0) \text{ V}.$$

şi curentul

$$i = 7{,}06 \sin(\omega t - 86^0) + 4{,}25 \sin(3\omega t - 168^0) +$$
$$+ 2{,}12 \sin(5\omega t - 123^0) \text{ A}.$$

Se cere să se calculeze puterea deformantă cu ajutorul formulei exacte.

Se va arăta care este eroarea ce se comite utilizându-se formula care presupune tensiunea sinusoidală.

(IPB 1949)

8.10. Se dau undele nesinusoidale

$$u = 100 + 100 \sin(\omega t + 55^0) + 10 \sin(3\omega t - 100^0) + \sin(5\omega t + 50^0) \text{V}$$
$$i = 5 + 5 \cos(\omega t - 65^0) + 2 \cos(3\omega t - 235^0) +$$
$$+ \cos(5\omega t - 100^0) \text{ A}.$$

Să se calculeze factorul de putere al acestui circuit.

(IPB 1950)

8.11. Să se calculeze factorul reactiv, factorul deformant şi factorul de putere al regimului deformant, caracterizat prin undele:

$$u = 100 + 100 \sin \omega t + 10 \sin 2\omega t + \sin 3\omega t \text{ V}.$$
$$i = 5 + 5 \sin(\omega t - 30^0) + 3 \sin(2\omega t - 45^0) +$$
$$+ \sin(3\omega t - 60^0) \text{ A}.$$

(IPB 1950)

8.12. Unui circuit format dintr'o reactanţă inductivă $L\omega = 25\ \Omega$ în serie cu o reactanţă capacitivă $1/C\omega = 125\ \Omega$ i se aplică tessiunea nesinusoidală

$$u = \sin \omega t + 50 \sin(5\omega t - 30^0).$$

Se cere să se determine expresia curentului din circuit. Ce va indica un voltmetru așezat la bornele inductanței?

8.13. Rezistența $R = 6\,\Omega$ și reactanțele $L\omega = 2\,\Omega$ și $\frac{1}{C\omega} = 18\,\Omega$ sunt legate în paralel și la bornele comune este aplicată tensiunea:

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin (3\omega t + 20^0).$$

Se cere să se determine expresia curenților din fiecare element și curentul total dat de sursă.

8.14. Impedanțele $\overline{Z}_1 = R_1 - j\frac{1}{C\omega}$ și $\overline{Z}_2 = R_2 + jL\omega$ sunt legate în paralel și circuitul astfel format este alimentat de tensiunea

$$u = 200 \sin 50t + 100 \sin 100t + 40 \sin 150t.$$

Știind că $L = 1$ H, $C = 100\,\mu$F și $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, se cere să se arate ce va indica un ampermetru electrodinamic montat în serie cu sursa.

8.15. Reactanțele $\overline{Z}_1 = 2 + j\,2\,\Omega$ și $\overline{Z}_2 = 2 - j\,2\,\Omega$ sunt legate în paralel și alimentate cu tensiunea nesinusoidală

$$u = 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t \text{ V}$$

Se cere să se determine: (*a*) valorile instantanee ale curenților din impedanțe și curentului total debitat de sursă; (*b*) Valorile eficace ale acelorași curenți și a tensiunii aplicate; (*c*) factorul de formă, factorul de vârf și reziduul deformant al tensiunii și curenților; (*d*) puterea totală consumată de receptor.

8.16. Unui circuit serie format dintr'o rezistență neinductivă de $3\,\Omega$, o reactanță inductivă de $8\,\Omega$ și o reactanță capacitivă de $12\,\Omega$, i se aplică tensiunea nesinusoidală:

$$u = 282 \sin \omega t + 4{,}25 \sin 3\omega t + 3{,}54 \sin 5\,\omega t \text{ V}.$$

Se cere să se afle:

a) curentul care ia naștere în circuit;
b) reziduul deformant;
c) coeficientul de distorsiune;
d) puterea activă, reactivă, deformantă și aparentă;
e) factorul de putere.

(IPB 1950)

8.17. Fiind date undele de curent şi de tensiune:

$$i = 50\sqrt{2}\sin(\omega t - 10^0) + 15\sqrt{2}\sin(3\omega t - 15^0) + $$
$$+ 115\sqrt{2}\sin 5(\omega t - 5^0) + 10\sqrt{2}\sin 7\,\omega t \quad \text{A}$$
$$u = 10\sqrt{2}\cos(\omega t - 70^0) + 2\sqrt{2}\cos(5\omega t - 130^0) +$$
$$+ 10\sqrt{2}\cos(7\omega t - 150^0) \quad \text{V}$$

să se calculeze:

a) puterea activă;
b) puterea reactivă;
c) puterea deformantă;
d) puterea complimentară;
e) puterea aparentă.

8.18. Unei reactanțe inductive $X_L = \omega L$ i se aplică tensiunea nesinusoidală $u = \sum U_k\sqrt{2}\sin k\omega t$. Să se determine reactanța aparentă corespunzătoare.

8.19. Cu cât crește reactanța inductivă a unui circuit dacă tensiunea aplicată conține armonicele 3 şi 5 având amplitudinile respectiv 25% şi 15% din unda fundamentală?

8.20. Unui circuit format dintr'o rezistență de 80 Ω şi o reactanță inductivă de 60 Ω i se aplică o tensiune nesinusoidală conținând numai armonica 3 a cărei amplitudine este de 20% din unda fundamentală.

Să se determine impedanța aparentă echivalentă, reactanța aparentă echivalentă precum şi creşterea procentuală a acestora.

8.21. Aceeaşi chestiune ca în problema 8.18 însă în ipoteza că se cunoaşte forma curentului nesinusoidal care o străbate şi care este $i = \sum I_k\sqrt{2}\sin k\omega t$.

8.22. Tensiunea $u = \sum U_k\sqrt{2}\sin k\omega t$ se aplică unei reactanțe capacitive $X_c = \dfrac{1}{\omega C}$.

Se cere să se afle admitanța aparentă corespunzătoare.

8.23. Cu cât scade reactanța capacitivă a unui circuit fără rezistență dacă i se aplică o tensiune nesinusoidală conținând numai armonica 7 cu o amplitudine de 10% față de amplitudinea fundamentalei?

8.24. Aceeaşi problemă ca 8.20, însă considerându-se reactanța capacitivă.

8.25. Aceeaşi chestiune ca în problema 8.22 însă în ipoteza că se cunoaşte curentul nesinusoidal care o străbate şi care este $i = \sum I_k\sqrt{2}\sin k\omega t$.

8.26. Să se calculeze impedanța aparentă a circuitului din problema 8.16.

8.27. Unui circuit format dintr'o reactanță inductivă $X_L = 100\ \Omega$ în paralel cu o reactanță capacitivă $X_C = 100\ \Omega$ i se aplică tensiunea nesinusoidală

$$u = 100\sqrt{2}\sin\omega t + 20\sqrt{2}\sin 3\omega t + 10\sqrt{2}\sin 5\,\omega t \quad \text{V}.$$

Se cere să se determine curentul total și curenții din cele două ramuri.

8.28. Pentru a se analiza la oscilograf unda de tensiune

$$u = 282\sin\omega t + 70{,}5\sin 3\omega t + 42{,}3\sin 5\omega t$$

se formează un circuit serie, compus dintr'o rezistență de $100\,\Omega$, un condensator de 31,8 μF și o inductanță variabilă.

Se cere să se determine L pentru separarea fiecăreia din armonicele undei de tensiune, făcându-se în acest scop ca circuitul să intre în rezonanță.

Să se traseze oscilograma corespunzătoare a curentului.

8.29. Un cablu subteran de 30 kV, având o capacitate de 0,31 μF/km și o lungime de 6 km, formează un circuit având la extremități câte un transformator identic de 10 MVA putere. Tensiunea de scurtcircuit a acestor transformatoare fiind de 7%, se întreabă, pentru care armonică circuitul poate intra în rezonanță.

8.30. La bornele unui condensator de capacitate C se aplică tensiunea triunghiulară

$$u = \frac{8U}{\pi^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\sin\,(2\,k+1)\frac{\pi}{2}\sin\,(2k+1)\,\omega t.$$

Să se determine forma curentului și să se calculeze coeficienții de distorsiune ai ambelor curbe. Ce concluzii se pot trage din examinarea acestor coeficienți de distorsiune?

8.31. Aceeași problemă în cazul când tensiunea dată se aplică la bornele unei inductanțe L.


Scanned with OKEN Scanner

8.32. Se dă circuitul din figura 8.32. căruia i se aplică la bornele AB tensiunea

$$u = 100 \sin \omega t + 10 \sin 3\omega t + \sin 5\omega t \text{ V}$$

în care $f = 50$ Hz.

Dacă $C = 101{,}5\ \mu F$, se cere să se determine L, astfel ca unda fundamentală să nu treacă prin acest circuit. Să se determine deasemenea impedanța Z astfel ca amplitudinea armonicei 5 să fie 5% din amplitudinea armonicei 3.

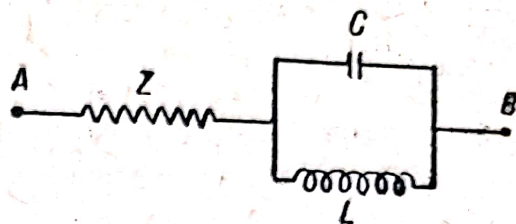


Fig. 8.32

Să se scrie apoi expresia curentului care trece prin circuit și să i se calculeze coeficientul de distorsiune.

(IPB 1950)

8.33. Se dă circuitul din fig. 8.33 în care

$R_1 = 20\ \Omega$ $R_2 = 70\ \Omega$ $R_3 = 30\ \Omega$

$L = 0{,}28$ H $C = 106\ \mu F$ $f = 50$ Hz

și care este alimentat cu tensiunea nesinusoidală

$$u = 141 \sin\omega t + 70{,}5 \sin 3\omega t \text{ V}.$$

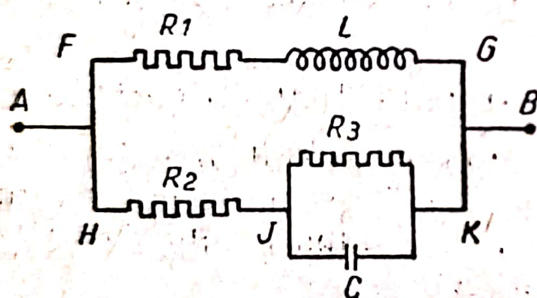


Fig. 8.33

Se cere să se determine curentul total debitat de sursă și să se calculeze coeficienții de distorsiune ai ambelor curbe. Ce concluzii se pot trage?

(IPB 1950)

8.34. Intr'un regim deformant se întâlnesc următoarele puteri:

$P = 750$ kW $Q = 180$ kVAR $D = 242$ kVAD

Presupunând că în acest regim tensiunea este practic sinusoidală și are $U_{ef} = 5{,}2$ kV iar curentul nesinusoidal are valoarea maximă a undei fundamentale $I_1 = 122{,}85$ A, se cere să se calculeze:

a) sporul de putere aparentă față de puterea aparentă a undei fundamentale;

b) sporul de pierderi ohmice față de regimul nedeformant.

8.35. Să se determine aceleași mărimi ca în problema precedentă în cazul circuitului din problema 8.16.

Scanned with OKEN Scanner

8.36. Care este raportul dintre tensiunea între faze şi tensiunea pe fază într'un sistem trifazat care conţine armonica 3 a cărei amplitudine este $k\%$ din amplitudinea undei fundamentale, k variind între 0 şi 100?

8.37. Intr'un regim deformant trifazat, simetric şi echilibrat, se măsoară factorul de putere prin metoda celor două wattmetre. Regimul deformant are numai armonica 5. Să se calculeze eroarea ce se comite la determinarea factorului de putere prin această metodă.

8.38. Aceeaşi problemă în cazul când regimul deformant conţine numai armonica 7. In care caz este mai mare eroarea?

8.39. Intre fazele unui alternator simetric trifazat, dar a cărei forţă electromotoare pe fază nu este sinusoidală şi are expresia:

$$e = 220\sqrt{2} \sin \omega t + 40\sqrt{2} \sin 3\omega t + 20\sqrt{2} \sin 5\omega t \ \text{V},$$

se leagă impedanţa $80 + j60\ \Omega$.

Să se determine impedanţa aparentă echivalentă, reactanţa aparentă şi creşterea procentuală a acestora.

Să se calculeze apoi factorul de putere al circuitului şi să se deducă puterile activă, reactivă şi aparentă.

(IPB 1951)

8.40. Un alternator trifazat simetric şi echilibrat, având forţa electromotoare pe fază

$$e_1 = 180 \sin \omega t + 70{,}8 \sin (3\omega t - 30^0) \ \text{V}$$

alimentează trei sarcini montate în stea şi anume $Z_1 = 30\ \Omega$, $Z_2 = j\,30\ \Omega$ şi $Z_3 = -j\,30\ \Omega$,

Se cere să se determine curenţii debitaţi de alternator pe fiecare fază şi curentul care circulă în firul neutru.

(IPB 1951)

8.41. Să se generalizeze problema 8.6, în sensul că valoarea maximă a undei este $U_m = \gamma U$. Să se determine termenul general al desvoltării în serie Fourier al acestei unde, precum şi valoarea eficace, reziduul deformant şi coeficientul de distorsiune.

8.42. Se dă un circuit, format dintr'o rezistenţă $R = 184\ \Omega$ în serie cu un condensator $C = 10\ \mu\text{F}$, căruia i se aplică tensiunea nesinusoidală

$$u = 4879 \sin \omega t + 488 \sin 3\omega t \ \text{V}$$

în care $f = 50$ Hz

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine
a) curentul care ia naştere în circuit;
b) puterea activă, reactivă, deformantă şi aparentă;
c) factorul de putere, acesta din urmă calculându-se atât direct cât şi cu ajutorul factorilor reactiv şi deformant.

(IPB 1951)

8.43. Aceeaşi problemă ca mai sus înlocuindu-se însă în circuit condensatorul cu o inductanţă $L = 338{,}5$ mH.

(IPB 1952)

8.44. Circuitelor din fig. 8.44 li se aplică o tensiune nesinusoidală având valoarea eficace a armonicei 1 egală cu 100 V, a armonicei 2 egală cu 25 V şi a armonicei 3 egală cu 10 V.

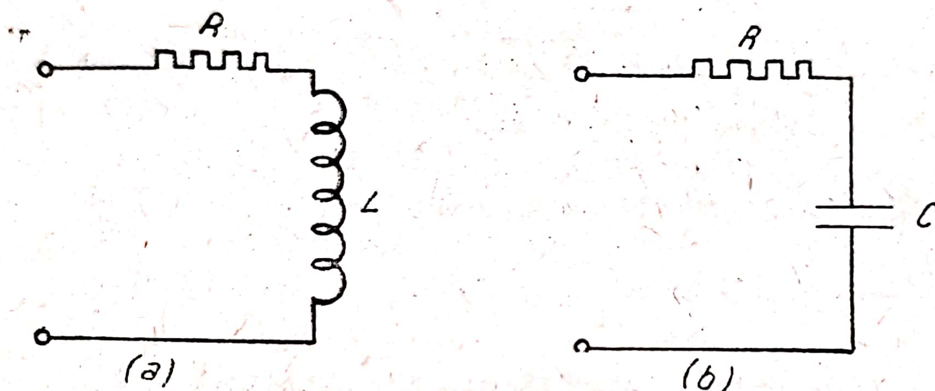


Fig. 8.44

Se cere să se determine valoarea eficace a curentului, puterea absorbită în circuit şi factorul de putere, în cazul când $R = 20\ \Omega$, $L = 63{,}7$ mH, $C = 265\ \mu$F, frecvenţa undei fundamentală fiind 50 Hz.

8.45. Unui circuit format dintr'o rezistenţă $R = 8\ \Omega$ în serie cu o inductanţă $L = 15$ mH i se aplică o tensiune nesinusoidală, formată din armonice impare şi având valoarea eficace 220 V.

Ştiind că frecvenţa undei fundamentale este $f = 50$ Hz şi că $U_3 = 0{,}4\, U_1$, $U_5 = 0{,}2\, U_1$, $U_7 = 0{,}05\, U_1$, se cere să se determine valoarea eficace a curentului şi factorul de putere al circuitului.

8.46. Un circuit serie este format din rezistenţa $R = 2\ \Omega$, reactanţa capacitivă $X_C = 9\ \Omega$ şi o reactanţă inductivă X_L, variabilă. La bornele acestui circuit se aplică tensiunea

$$u = 100 \sin \omega t + 40 \sin 3\omega t \quad \text{V}$$

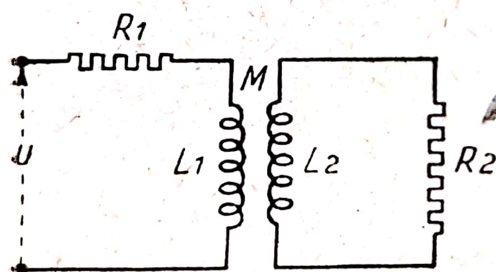
Să se studieze variația valorii eficace a curentului absorbit de circuit și a factorului de putere corespunzător când reactanța inductivă X_L variază.

Să se determine valoarea acestor mărimi pentru $X_L = 1\ \Omega$, $3\ \Omega$ și $9\ \Omega$.

8.47. Aplicând o tensiune sinusoidală, $U = 100$ V, la bornele unei bobine (fără pierdere), curentul în bobină este $I = 10$ A. Atunci când în curba de tensiune există și armonica trei, pentru aceiași valoare eficace a tensiunii $U = 100$ V, se obține curentul $I = 8$ A. Să se determine raportul $\beta = \frac{U_3}{U_1}$ între armonica trei și fundamentala curbei de tensiune.

8.48. Tensiunea aplicată la bornele circuitului din fig. 8.48 fiind $u = 100 + 70{,}7 \sin \omega t$ V se cere să se determine expresia curenților i_1 și i_2.

Aplicație : $R_1 = 40\Omega$; $R_2 = 60\Omega$; $\omega L_1 = 30\ \Omega$; $\omega L_2 = 60\Omega$; $\omega M = 20\Omega$



Zig. 8.48

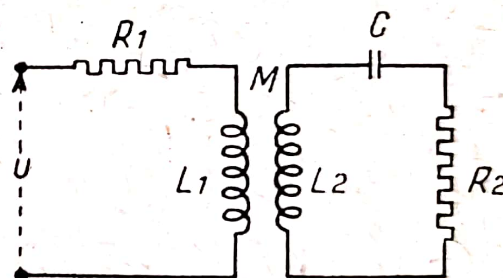


Fig. 8.49

8.49. Aceeași problemă pentru circuitul din fig. 8.49, căruia i se aplică tensiunea $u = 20 \sin \omega t + 5 \sin 3\omega t$, valorile numerice ale constantelor circuitului fiind: $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 3\Omega$; $\omega L_1 = \omega L_2 = 4\Omega$; $\omega M = 1\Omega$; $1/C\omega = 6\Omega$.

8.50. Un circuit electric este constituit din o rezistență a cărei valoare variază invers proporțional cu rădăcina pătrată a curentului care o străbate putând fi reprezentată prin relația $r = R/\sqrt{i}$, în care R este o constantă și i valoarea instantanee a curentului. Acestui circuit i se aplică o tensiune perfect sinusoidală. Să se determine forma curentului și valoarea sa eficace.

Scanned with OKEN Scanner

8.51. Impedanțele

$$\overline{Z}_a = -j\,12\,\Omega, \qquad \overline{Z}_b = j\,12\,\Omega, \qquad \overline{Z}_c = 12\,\Omega,$$

sunt legate în stea și alimentate de un sistem trifazat, simetric și echilibrat având tensiunea pe fază

$$u = 310 \sin \omega t + 93 \sin 3\omega t \quad \text{V}.$$

Sistemul fiind cu neutrul *izolat*, se cere să se calculeze puterile activă, reactivă și deformantă absorbite de impedanțe.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA III

STUDIUL REGIMULUI DESECHILIBRAT

9. DEPLASAREA PUNCTULUI NEUTRU. CALCUL DIRECT DE REŢELE

9.1. Să se facă reprezentarea topografică a tensiunilor

$$\overline{U}_1 = 5 + j2\text{ V}; \quad \overline{U}_2 = -3 + j6\text{ V}; \quad \overline{U}_3 = -5 - j7\text{ V}$$

a) faţă de punctul de concurenţă al acestor trei vectori;
b) faţă de centrul de greutate al triunghiului format de vârfurile vectorilor.

Se va determina modulul tuturor tensiunilor din această diagramă.

9.2. Să se construiască diagrama topografică a tensiunilor unei încărcări, căreia i se aplică o tensiune simetrică trifazată $\overline{U}_d$, şi care este formată din impedanţele

$$\overline{Z}_B = \overline{Z}_A \quad \text{şi} \quad \overline{Z}_C = 2\overline{Z}_A.$$

9.3. Să se studieze deplasarea punctului neutru al unui sistem de sarcini trifazat, format din impedanţele

$$\overline{Z}_A = \overline{Z}_B = R \qquad \overline{Z}_C = \alpha R$$

R fiind o rezistenţă ohmică şi α un număr pozitiv oarecare.

Sistemul este alimentat de un sistem stelat de tensiuni simetric şi echilibrat.

9.4. Aceeaşi chestiune pentru sistemul format din impedanţele

$$\overline{Z}_A = jL\omega \qquad \overline{Z}_B = \frac{-j}{C\omega} \qquad \overline{Z}_C = \alpha\, R,$$

R fiind o rezistenţă ohmică şi α un număr pozitiv oarecare.

9.5. Se dă sistemul de impedanţe legate în stea

$$Z_1 = R/\alpha \qquad Z_2 = -j\,R \qquad Z_3 = j\,R$$

alimentate de un sistem simetric şi echilibrat de tensiuni E.

Se cere să se studieze variaţia curenţilor pe cele trei linii în funcţie de parametrul α, α fiind un număr real şi pozitiv.

Scanned with OKEN Scanner

9.6. Un sistem stelat trifazat de tensiuni, perfect simetric și echilibrat, având modulul $E = 120$ V, alimentează un sistem stelat de impedanțe format din impedanțele

$$\overline{Z}_A = 10\Omega \qquad \overline{Z}_B = 4\,\Omega \qquad \overline{Z}_C = 25\,\Omega$$

Știind că impedanța firului neutru este

$$\overline{Z}_0 = 3 + j4\ \Omega,$$

se cere să se calculeze curenții pe faze și în firul neutru, precum și tensiunile pe faze.

9.7. Aceeași chestiune în cazul când sistemul de tensiuni alimentează impedanțele

$$\overline{Z}_A = 40\ \Omega \qquad \overline{Z}_B = 10\ \Omega \qquad \overline{Z}_C = 20\ \Omega$$

sistemul neavând fir de nul.

9.8. Să se determine grafic și analitic tensiunile pe faze și deplasarea punctului neutru al sistemului

$$\overline{Y}_1 = 0{,}2 + j0{,}15\ \text{S}$$
$$\overline{Y}_2 = 0{,}1 + j0{,}15\ \text{S}$$
$$\overline{Y}_3 = 0 \quad + j0{,}10\ \text{S}$$
$$\overline{Y}_0 = 0 \quad + j0{,}45\ \text{S}$$

căruia i se aplică sistemul de tensiuni

$$\overline{E}_1 = 100\,\underline{|0}\ \text{V}, \quad \overline{E}_2 = 100\,\underline{|-120^0}\ \text{V}, \quad \overline{E}_3 = 100\,\underline{|120^0}\ \text{V}.$$

9.9. Aceeași chestiune pentru sistemul

$$\overline{Y}_1 = 0{,}15 - j0{,}2\ \text{S}$$
$$\overline{Y}_2 = 0{,}15 - j0{,}1\ \text{S}$$
$$\overline{Y}_3 = 0{,}10 - j0 \quad \text{S}$$
$$\overline{Y}_0 = 0{,}45 - j0 \quad \text{S}$$

9.10. Sistemul de impedanțe legate în stea

$$\overline{Z}_1 = 25\,\underline{|30^0}\ \Omega, \quad \overline{Z}_2 = 20\,\underline{|-45^0}\ \Omega, \quad \overline{Z}_3 = 40\,\underline{|0}\ \Omega$$

este alimentat de tensiunile pe fază

$$\overline{E}_1 = 120\,\underline{|0}\ \text{V}, \quad \overline{E}_2 = 120\,\underline{|-120^0}\ \text{V}, \quad \overline{E}_3 = 120\,\underline{|120^0}\ \text{V}.$$

Se cere să se determine curenții din impedanțele $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$, utilizându-se calculul direct, fără coordonate simetrice, aplicându-se o metodă grafică sau analitică.

(IPB 1949)

9.11. Un sistem de sarcini egale, având fiecare valoarea $\bar{Z} = 100 + j\,173\ \Omega$ este legat în stea și alimentat cu un sistem simetric și echilibrat de tensiuni de 380 V între faze. Se leagă între bornele 1 și 2 ale sarcinii impedanța $\bar{Z}_1 = 173 - j\,100\ \Omega$. Se cere să se determine curenții debitați de sursă pe linie și curenții absorbiți de diversele impedanțe.

9.12. Un sistem de trei impedanțe în stea este alimentat de un alternator trifazat, simetric, echilibrat, cu tensiunea pe fază de 100 V. Impedanțele fiind

$$\bar{Z}_A = 5 - j\,8{,}65\ \Omega$$

$$\bar{Z}_B = 8{,}65 + j\,5\ \Omega$$

$$\bar{Z}_C = 0 - j\,20\ \Omega$$

se cere

— deplasarea punctului neutru;

— valoarea curenților.

9.13. Un sistem nesimetric de tensiuni între faze, având modulele

$$U_{AB} = 140\ \text{V}, \qquad U_{BC} = 120\ \text{V}, \qquad U_{CA} = 100\ \text{V}$$

se aplică unui sistem de rezistențe egale, $R = 10\ \Omega$, legate în stea.

Se cere să se determine tensiunile pe fază și curenții respectivi.

9.14. Trei grupuri de lămpi, dintre care primul are 55 lămpi identice, al doilea 44 lămpi identice și al treilea 22 lămpi identice, sunt legate în stea. Rezistența unei lămpi este de 220 Ω, iar tensiunea aplicată sistemului este de 127 V pe fază.

Se cere să se determine tensiunea la bornele lămpilor când:

a) sistemul funcționează fără fir neutru;

b) sistemul funcționează cu un fir neutru având o rezistență de 0,5 Ω.

9.15. Intr'un sistem trifazat perfect simetric și echilibrat având tensiunea pe fază $U = 120$ V, se montează între fazele 1 și 2 o lampă de 60 W, iar între fazele 2 și 3 o lampă de 75 W.

Se cere să se determine curenții în cele trei faze, utilizându-se o metodă grafică.

9.16. Un alternator, legat în stea, perfect simetric şi echilibrat, cu tensiunea pe fază $E = 100$ V, alimentează o sarcină formată din două rezistenţe egale, $R = 10\ \Omega$, montate între fazele 1—2 şi 2—3.

Se cere:

a) Să se determine valoarea curenţilor pe fiecare fază.

b) Să se arate cum poate fi eliminat regimul desechilibrat.

9.17. Aceeaşi chestiune însă, în locul rezistenţelor R se găsesc impedanţele egale:

$$\overline{Z} = 8 + j\,6\ \Omega.$$

9.18. Aceeaşi chestiune, însă cele două impedanţe nu sunt egale şi au valorile:

$$\overline{Z}_{12} = 8 + j\,6\ \Omega, \quad \overline{Z}_{23} = 6 + j\,8\ \Omega.$$

9.19. Pentru a se determina sensul de rotire al câmpului învârtitor într'o reţea trifazată, se realizează montajul din figură, format dintr'un condensator montat pe una din faze şi din două lămpi incandescente identice montate pe celelalte două faze, în serie cu câte o rezistenţă R. Rezistenţele sunt egale.

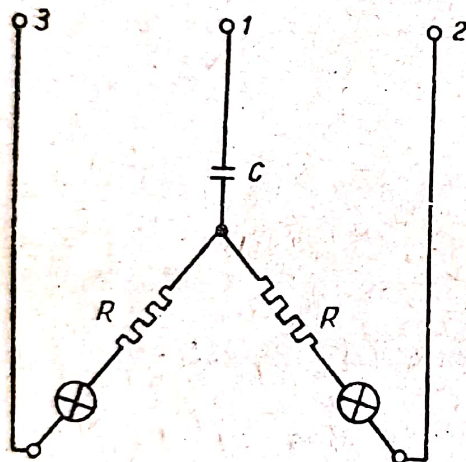


Fig. 9.19

Se alimentează circuitul cu o tensiune E între faze, perfect simetrică şi echilibrată.

Cele două lămpi se vor aprinde una sau cealaltă, după cum sensul câmpului este cel direct sau cel invers.

Să se determine relaţia dintre C şi R astfel ca, în cazul sensului direct să se aprindă lampa din dreapta şi să fie stinsă lampa din stânga.

(IPB 1949)

9.20. Un aparat ca cel din problema precedentă se conectează cu borna din mijloc la faza 3, borna din dreapta la faza 1 şi borna din stânga la faza 2 a unei reţele trifazate simetrice, având o tensiune între faze de 127 V, $f = 50$ Hz, sistemul de tensiuni fiind direct. Elementele constructive ale aparatului sunt:

$$R = 1250\ \Omega \qquad C = 4{,}78\ \mu\text{F}.$$

Se cere să se arate care lampă se va aprinde.

(IPB 1950)

9.21. Aceeași chestiune ca în cazul precedent însă folosindu-se un aparat la care capacitatea C este înlocuită cu o inductanță L. Aparatul se conectează la o rețea trifazată simetrică având o tensiune de 66 V între faze, sistem de succesiune *inversă*, $f = 50$ Hz. Elementele constructive ale aparatului sunt

$$R = 1250\ \Omega \qquad L = 2{,}12\ \text{H}.$$

(IPB 1950)

9.22. O linie trifazată, simetrică și echilibrată, are capacitatea între fiecare fază și pământ egal cu C F. La un moment dat faza 3 se pune la pământ prin rezistența R Ω. Știind că tensiunea fiecărei faze față de pământ, la funcționarea normală este U V, se cere:

— tensiunea fiecărei faze după punerea la pământ a fazei 3;

— curentul ce se scurge prin rezistența R;

— ce inductanță trebue să aibă o bobină de stingere, pentru ca să nu avem curent de punere la pământ?

Aplicație. $U = 17{,}3$ kV, $C = 3{,}18$ μF, $R = 1000\ \Omega$, $f = 50$ Hz.

9.23. Impedanțele

$$\bar{Z}_{AB} = 12 + j\,16\ \Omega$$
$$\bar{Z}_{BC} = 12 + j\,0\ \ \Omega$$
$$\bar{Z}_{CA} = 8 + j\,6\ \ \Omega$$

sunt legate în triunghi. La bornele lor se aplică o tensiune trifazată simetrică și echilibrată, de 220 V între faze.

Se cere să se determine curenții pe fază și pe linie.

9.24. Un sistem de trei rezistențe $Z_{AB} = 10\ \Omega$, $Z_{BC} = 20\ \Omega$ și $Z_{CA} = 20\ \Omega$, legate în triunghi, sunt alimentate dela o rețea trifazată, perfect simetrică și echilibrată, având tensiunea între faze de 208 V, prin trei conductori având fiecare o rezistență de 1 Ω. Se cere să se determine curenții din fiecare impedanță, precum și curenții debitați de sursă. Ce se întâmplă dacă $Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA}$?

9.25. Se dă sistemul de impedanțe legate în triunghi

$$\bar{Z}_{12} = R/\alpha \qquad \bar{Z}_{23} = -jR \qquad \bar{Z}_{31} = jR$$

alimentate de un sistem de tensiuni perfect simetric și echilibrat U.

Se cere să se studieze variația curenților pe cele trei linii de alimentare în funcție de variația parametrului α, α fiind un număr real și pozitiv.

Se vor calcula acești curenți pentru cazul $\alpha = 2\sqrt{3}$, $R = 10\ \Omega$ și $U = 380$ V.

(IPB 1951)

9.26. Trei impedanțe identice $\overline{Z}$ sunt legate în triunghi și alimentate cu un sistem trifazat de tensiuni, simetric și echilibrat. Trei ampermetre montate pe linie indică toate la fel, 10 A. Cât va indica fiecare ampermetru dacă se întrerupe una din impedanțe?

9.27. Se cere să se arate ce curent va indica ampermetrul montat ca în schema din fig. 9.27, în care $L\omega = \frac{1}{C\omega} = R = 10\ \Omega$ și $Z_A = 0{,}2\ \Omega$, tensiunea între faze fiind $U = 380$ V.

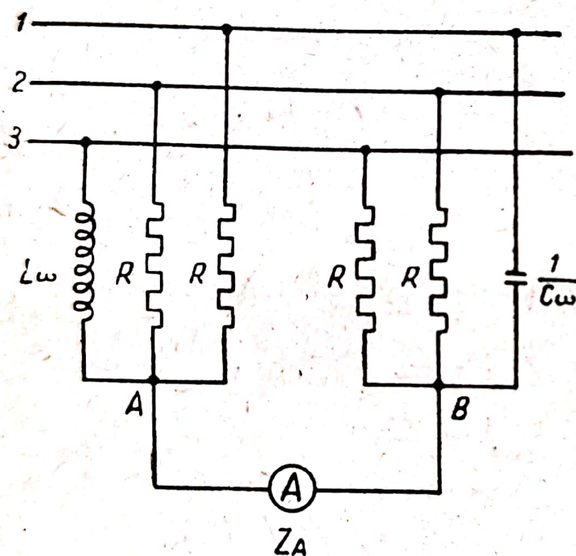


Fig. 9.27

9.28. Un cuptor electric este alimentat cu un sistem de tensiuni trifazat, nesimetric, având următoarele valori între faze

$$\overline{U}_1 = 100\ \underline{|20^\circ}\ \text{V}$$

$$\overline{U}_2 = 80\ \underline{|-123^\circ}\ \text{V}$$

$$\overline{U}_3 = 60\ \underline{|147^\circ}\ \text{V}$$

Sarcina cuptorului poate fi reprezentată prin trei rezistențe ohmice legate în stea. La un moment dat această sarcină este $R_1 = R_2 = 0{,}1\ \Omega$, $R_3 = 0{,}01\ \Omega$.

Se cere să se determine pentru acest moment de funcționare curenții absorbiți de cei trei electrozi.

Problema se va rezolva printr'o metodă directă, analitică sau grafică, fără a se utiliza coordonatele simetrice.

(IPB 1951)

9.29. Fie un sistem trifazat de tensiuni simetric și echilibrat, fără fir neutru. Intre fazele A și C se montează reactanța jX_L, iar între fazele B și C se montează reactanța $-jX_C$. Știind că $X_L = X_C = X$, se cere să se calculeze puterea totală aparentă absorbită de circuit și să se deducă apoi valoarea puterii active și a puterii reactive absorbită de circuit.

9.30. Sistemul de sarcini din figura 9.30 este alimentat cu un sistem trifazat de tensiuni simetric și echilibrat de 220 V între faze. Se cere să se determine:

(a) Curenții din linie pe fiecare fază;

(b) Indicația wattmetrului;

(c) Măsurând puterea prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele A și B, care sunt indicațiile acestor wattmetre?

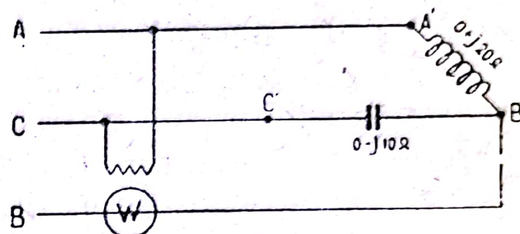


Fig. 9,30

9.31. La bornele de contact, A, B, C, ale unui tablou de distribuție, alimentate cu un sistem direct de tensiuni, simetric și echilibrat, de 220 V între faze, se leagă patru impedanțe, având celelalte extremități legate la două borne M și N izolate între ele. Impedanțele respective au valorile

$$\bar{Z}_{AM} = 8{,}66 + j\,5{,}00 \quad \Omega$$
$$\bar{Z}_{MC} = 0{,}00 - j\,10{,}00 \quad \Omega$$
$$\bar{Z}_{AN} = 8{,}66 - j\,5{,}00 \quad \Omega$$
$$\bar{Z}_{NB} = 0{,}00 + j\,10{,}00 \quad \Omega$$

Se cere să se determine

(a) Curentul care intră prin borna A.

(b) Tensiunea între bornele M și N, luându-se ca origină de fază tensiunea V_{AB}.

9.32. Trei impedanțe de $200 + j\,0$, $100 - j\,100$ și $100 + j\,100\ \Omega$ sunt legate respectiv îtnre fazele AB, BC și CA ale unui sistem trifazat, tensiunile între fazele corespunzătoare fiind 200, 141 și 141 V. Sistemul de tensiuni este direct.

Se cere să se determine

(a) Puterea absorbită de fiecare impedanță.

(b) Puterea totală absorbită de sistem.

(c) Dacă măsurarea puterii absorbită se face prin metoda celor două wattmetre, care sunt indicațiile wattmetrelor, montarea acestora făcându-se în toate modurile posibile.

9.33. Un sistem direct de tensiuni în triunghi, având tensiunile între faze $U_{AB} = U_{BC} = 220$ V și $U_{CA} = 240$ V alimentează un sistem de sarcini legat deasemenea în triunghi. Sarcina montată între fazele A și B absoarbe o putere de 10 kW cu un factor de putere de 0,8 inductiv; cea dintre fazele B și C, 15 kW cu un factor de putere de 0,70 inductiv; și cea dintre fazele C și A, 10 kW cu factorul de putere unitate. Pu-

Scanned with OKEN Scanner

terea totală absorbită de sistem este măsurată prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele A şi C, faza B fiind luată ca fază de referinţă.

Se cere să se arate ce indică fiecare wattmetru.

9.34. Un sistem trifazat de tensiuni, simetric şi echilibrat, având 380 V între faze, alimentează un motor asincron trifazat de 10 kW, funcţionând la plină sarcină cu un factor de putere de 0,8 inductiv şi cu un randament de 90% şi un motor monofazat, montat între fazele B şi C, de 5 kW, funcţionând la plină sarcină cu un factor de putere de 0,85 inductiv şi cu un randament de 83%,

Se cere să se determine:

(*a*) Curentul pe linie în fiecare fază.

(*b*) Puterea activă totală absorbită de maşini.

Ce indică fiecare wattmetru, dacă măsurarea puterii active se face prin metoda celor două wattmetre, montate pe fazele A şi C.

(*c*) Puterea reactivă totală absorbită de maşini.

9.35. O linie de distribuţie minieră, de înaltă tensiune străbate mai multe abataje, distribuind energie electrică dela o staţie S (fig. 9.35). Cea mai mare parte dintre sarcini sunt monofazate şi sunt preluate dela transformatoare, astfel conectate la linia de distribuţie încât, în condiţii normale de funcţionare, sarcina dealungul liniei, între S şi W, este echilibrată.

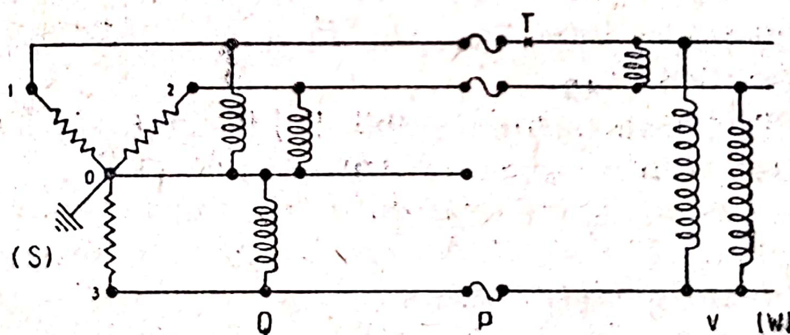


Fig. 9.35.

Puterea staţiei se consideră practic infinită. In punctul P este instalat un separator trifazat prevăzut cu siguranţe fuzibile monofazate, care se topesc în cazul unui defect între P şi W. Pe porţiunea de linie SP, mai veche, transformatoarele sunt conectate în stea, înfăşurarea primară fiind legată între o fază şi neutru, la tensiunea de $4/\sqrt{3}$ kV. Pe porţiunea PW, corespunzând unei extinderi ulterioare, transformatoarele sunt conectate la reţea în triunghi, înfăşurarea primară fiind legată între faze, la tensiunea de 4 kV.

Scanned with OKEN Scanner

In condițiile normale de funcționare, s'a măsurat în punctul P tensiunea între faze, găsindu-se 4 kV, și puterea absorbită de porțiunea de linie PW, găsindu-se 150 kW cu un factor de putere de 0,9 inductiv.

Sarcina între S și P poate fi reprezentată printr'o sarcină echilibrată în stea de 135 kW, cu un factor de putere de 0,85 inductiv, concentrată în P.

Impedanța fiecărui conductor al liniei între S și P este $\overline{Z} = 5{,}10 + j\,2{,}60\ \Omega$, iar impedanța firului neutru este $\overline{Z}_N = 12{,}0 + j\,3{,}0\ \Omega$.

Se cere:

(*a*) Să se determine puterea cerută dela stație, factorul de putere la stație și căderea de tensiune în linie în cazul funcționării sistemului echilibrat.

(*b*) Din cauza unui defect, fuzibilul corespunzător liniei 1 a fost topit. Se cere să se determine tensiunile între fiecare fază și firul neutru în punctul P, presupunându-se că tensiunea în S se menține constantă și aceiași corespunzătoare cazului (*a*).

(c) Să se construiască topograma tensiunilor corespunzătoare cazului (*b*).

(*d*) Să se discute situația fizică rezultând din ruperea conductorului (1).

(*e*) Să se determine puterea aparentă absorbită dela stație în cazul funcționării desechilibrate. Dacă măsurarea puterilor activă și reactivă se face prin metoda celor 3 wattmetre, respectiv varmetre, ce indică fiecare aparat?

10. TEORIA COORDONATELOR SIMETRICE

10.1. Cunoscând valoarea operatorului $a = 1\underline{\left|\frac{2\pi}{3}\right.} = -\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^{j\,120^\circ}$, să se calculeze expresiile:
$(1-a)(1-a^2)$; $(a-a^2)(a^2-1)$; $(1-a)/(1-a^2)$; $(a-a^2)/(a^2-1)$;
$(1+a)^2$; $(1+a)\ (1+a^2)$; $(1-a)/(1+a)$; $(1+a^2)/(1-a)$.

10.2. Să se calculeze cele șase valori ale expresiei $\sqrt[6]{1}$.

10.3. Se dau curenții: $\overline{I}_a = 8-j6\text{A}$; $\overline{I}_b = -13-j\,10\ \text{A}$; $\overline{I}_c = 2 + j\,10\ \text{A}$. Să se calculeze componentele simetrice ale acestor curenți, și să se verifice rezultatul.

10.4. Aceeași chestiune pentru sistemul de tensiuni $\overline{E}_a = 150{,}4\underline{|0}\ \text{V}$; $\overline{E}_b = 220\underline{|250^\circ}\ \text{V}$; $\overline{E}_c = 220\underline{|-110^\circ}\ \text{V}$.

10.5. Aceeaşi chestiune pentru sistemul de curenţi: $\overline{I}_a = 0 + j20$ A; $\overline{I}_b = 20 + j0$ A; $\overline{I}_c = 0 + j0$ A.

10.6. Idem pentru curenţii $\overline{I}_a = 0 + j\,100$ A; $\overline{I}_b = -86{,}6 - j\,50$ A; $\overline{I}_c = +86{,}6 - j\,50$ A.

10.7. Un sistem stelat nesimetric de tensiuni are componentele $U_A = U_B = 220$ V, $U_C = 180$ V. Unghiurile dintre diverşii vectori sunt $\alpha = 150^0$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 120^0$, aceste unghiuri fiind socotite în sensul direct al sistemului. Se cere să se descompună sistemul în coordonatele sale simetrice.

10.8. Fiind dat sistemul de vectori $\overline{I}_A = 3\,\underline{|90^0}$ A, $\overline{I}_B = 4\,\underline{|180^0}$ A, $\overline{I}_C = 5\,\underline{|143^008}$, se cere să se determine componentele sale simetrice.

10.9. Intr'un sistem trifazat, dacă faza 1 este întreruptă, atunci în celelalte două faze circulă curenţii $I_2 = I$ şi $I_3 = -I$. Să se determine componentele simetrice ale acestui sistem de curenţi.

10.10. Aceeaşi chestiune ca în problema precedentă, faza întreruptă fiind însă faza 2. Să se compare rezultatele.

10.11. Să se descompună într'un sistem trifazat de coordonate simetrice sistemul de tensiuni bifazat simetric

$$\overline{E}_a = 100\,\underline{|0}\ \text{V şi}\ \overline{E}_b = 100\,\underline{|180^0}\ \text{V}.$$

10.12. Aceiaşi chestiune pentru sistemul tetrafazat nesimetric $\overline{E}_a = 100\,\underline{|0}$ V; $\overline{E}_b = 100\,\underline{|90^0}$ V; $\overline{E}_c = \overline{E}_d = 0$.

10.13. Intr'un sistem trifazat simetric şi direct, curentul pe faza 1 are intensitatea $I_1 = 100$ A. Pe fazele 2 şi 3, curenţii au aceeaşi intensitate $I_2 = I_3 = -50$ A. Să se arate care este ordinul sistemului şi să se calculeze componentele sale simetrice.

10.14. Tensiunile între faze ale unui sistem trifazat sunt 100, 150 şi 200 V. Să se găsească componentele simetrice ale sistemului; *a*) pentru sistemul cu conectarea în triunghi; *b*) pentru sistemul cu conectarea în stea.

10.15. Vectorii principali ai unui sistem de coordonate simetrice sunt $\overline{V}_h = 20\,\underline{|-60^0}$; $\overline{V}_d = 100\,\underline{|0}$; $\overline{V}_i = 30\,\underline{|-45^0}$. Cărui sistem trifazat nesimetric aparţin aceste coordonate?

10.16. Un motor de inducţie, cu înfăşurarea statorului conectată în stea, este alimentat dela o reţea a căror tensiuni formează un sistem simetric direct. Infăşurarea motorului a fost conectată din eroare cu o bobină inversată. Se cere să se determine gradul de disimetrie a fluxurilor.

10.17. Un sistem trifazat, cu conectarea în stea, are neutrul legat la pământ. Componenta directă a tensiunii este

Scanned with OKEN Scanner

E_{1d}. Să se arate că, dacă se leagă la pământ una din faze, în locul neutrului, componenta directă a tensiunii rămâne neschimbată.

10.18. Un sistem trifazat, conectat în triunghi, cu tensiunea între faze de 15000 V, este pus la pământ pe una din faze. Să se determine componenta homopolară a sistemului de tensiuni obținut între conductorii de fază și pământ.

10.19. Se dă un sistem de tensiuni simetric și echilibrat de 35000 V între faze. Faza B este pusă la pământ. Se cere să se calculeze componentele simetrice ale sistemului de tensiuni obținut între conductorii fazelor sănătoase și pământ.

(IPB 1950)

10.20. Fie vectorii : $\bar{V}_1 = 20 \underline{|0}$; $\bar{V}_2 = 60 \underline{\left|\frac{\pi}{6}\right.}$; $\bar{V}_3 = 35 \underline{\left|-\frac{\pi}{3}\right.}$.

Să se determine componentele simetrice prin calcul și folosindu-se două metode grafice diferite. Să se verifice rezultatul.

10.21. Tensiunile între faze ale unui sistem trifazat conectat în triunghi sunt $U_{AB} = 75$ V; $U_{BC} = 65$ V; $U_{CA} = 40$ V. Să se determine componentele simetrice, directă și inversă, printr'o metodă grafică.

10.22. Cu ajutorul rezultatelor din problema precedentă să se determine componentele simetrice ale sistemului în stea și factorii de disimetrie și asimetrie ai sistemului.

10.23. Se dau tensiunile : $\bar{E}_a = 25 + j2{,}0$ V ; $\bar{E}_b = -13 + j2{,}0$ V ; $\bar{E}_c = 0 + j15$ V. Să se determine componentele simetrice cu ajutorul unei metode grafice.

10.24. Fie trei vectori $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$, care formează un triunghi oarecare ABC (fig. 10.24).

Se duce mediana AD. Din punctul D se duce perpendiculara DF iar din punctul A se duce dreapta AF făcând 30° cu AD. Se unește punctul F astfel obținut cu C și cu B. Să se arate că vectorii $\overline{CF}$ și $\overline{FB}$ reprezintă respectiv, în direcție și în mărime, vectorii principali ai componentelor directă și inversă a sistemului.

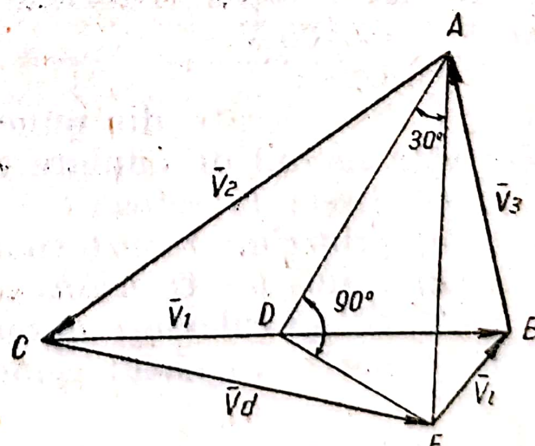


Fig. 10.24

10.25. Să se arate că dacă $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ sunt curenții din cele trei faze ale unui sistem trifazat, $\bar{I}_h$, $\bar{I}_d$, $\bar{I}_i$ vectorii prin-

Scanned with OKEN Scanner

cipali ai componentelor simetrice ale acestor curenţi şi R rezistenţa fiecărei faze, pierderea de putere prin efect Joule în sistem este dată de una din relaţiile:

$$R\,(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2) \equiv 3\,R\,(I_h + I_d^2 + I_i^2).$$

10.26. Un sistem trifazat, a cărui tensiune între faze este de 380 V, perfect simetric şi echilibrat, este încărcat cu impedanţele între faze:

$$\overline{Z}_{AB} = 20 + j3 \quad \Omega$$
$$\overline{Z}_{BC} = 5 - j\,20\ \Omega$$
$$\overline{Z}_{CA} = 10 + j\,20\ \Omega$$

Să se determine puterile aparente $\overline{S}_d$, $\overline{S}_i$ şi $\overline{S}_{TOTAL}$.

10.27. Se dau sistemele trifazate pe fază:

$$\overline{V}_1 = 0 \quad + j\,120 \quad V \qquad \overline{I}_1 = 6 + j\,6 \quad A$$
$$\overline{V}_2 = 120 - j\,120 \quad V \qquad \overline{I}_2 = 0 - j\,6 \quad A$$
$$\overline{V}_3 = -120 + j\,0 \quad V \qquad \overline{I}_3 = -6 - j\,6 \quad A$$

Se cere să se calculeze puterile *activă, reactivă* şi *aparentă* folosindu-se componentele simetrice ale acestor sisteme.

Se va verifica rezultatul printr'un calcul direct.

Determinarea componentelor simetrice se va face grafic, elementele necesare calculului luându-se direct din diagramele vectoriale.

(IPB 1950)

10.28. Un transformator de sudură monofazat, absorbind la funcţionarea normală un curent $I = 520$ A, trebue racordat la o reţea trifazată simetrică având tensiunea între faze $U = 400$ V.

Se cere:

1⁰ Să se arate, din punct de vedere al disimetriei produse, care este modul de cuplare cel mai bun

a) direct la reţea;

b) printr'un transformator stea-triunghi cu raportul 1;

c) printr'un transformator triunghi-stea cu raportul 1.

2⁰ Să se calculeze curenţii absorbiţi dela reţea, pe fiecare fază în parte, în cazul celor trei conectări indicate mai sus.

(IPB 1950)

10.29. O reţea trifazată alimentează o sarcină formată din trei impedanţe legate în stea. Se măsoară tensiunea la bornele fiecărei impedanţe găsindu-se $V_A = 133$ V, $V_B = 133$ V, $V_C = 119{,}5$ V. Tensiunea între fazele AB şi BC fiind respectiv $U_{AB} = 200$ V şi $U_{BC} = 230$ V, se cere să se determine

tensiunea între fazele CA, precum şi componentele simetrice ale ambelor sisteme de tensiuni.

10.30. Un generator trifazat, ale cărui tensiuni pe fază sunt $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$, $\overline{V}_C$, alimentează, printr'o linie de transport, un receptor trifazat simetric, conectat în stea având impedanța pe fază egală cu $\overline{Z}$. Impedanța pe fază a liniei de transport este $\overline{Z}_1$, iar a firului neutru $\overline{Z}_N$; impedanța mutuală între două faze oarecare ale liniei de transport este $\overline{M}$, iar între oricare din faze şi firul neutru este $\overline{M}_N$; impedanțele generatorului sunt $\overline{Z}_o$, $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$.

Se cere să se determine expresiile $\overline{Z}_h$, $\overline{Z}_d$, $\overline{Z}_i$, ale sistemelor de impedanțe homopolară, directă şi inversă.

11. MĂSURAREA COMPONENTELOR SIMETRICE

11.1. Pentru măsurarea componentelor simetrice de curent, directă şi inversă, se foloseşte montajul din fig. 11.1, în care A_1 şi A_2 sunt ampermetre care măsoară direct aceste componente. Dacă M este impedanța aparatelor de măsură (presupuse identice), să se găsească relația între R şi Z astfel ca ampermetrul A_1 să măsoare componenta directă I_d, şi A_2 să măsoare componenta inversă I_i. (IPB 1950)

11.2. Pentru măsurarea componentei directă de tensiune se foloseşte montajul din fig. 11.2. Dacă M este impedanța aparatului de măsură, să se determine Z şi R, astfel ca aparatul să măsoare această componentă.

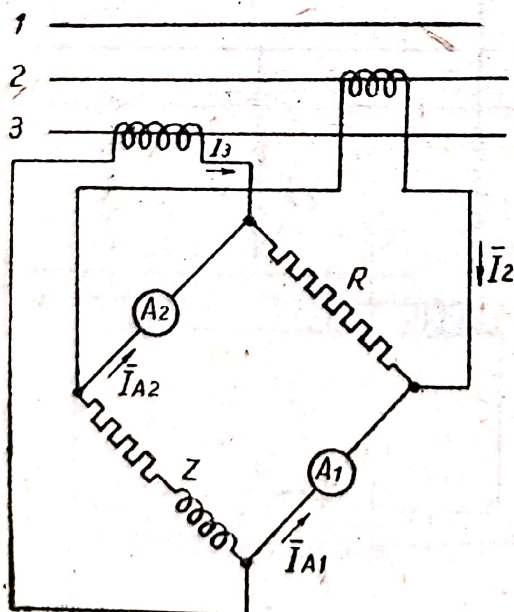


Fig. 11.1

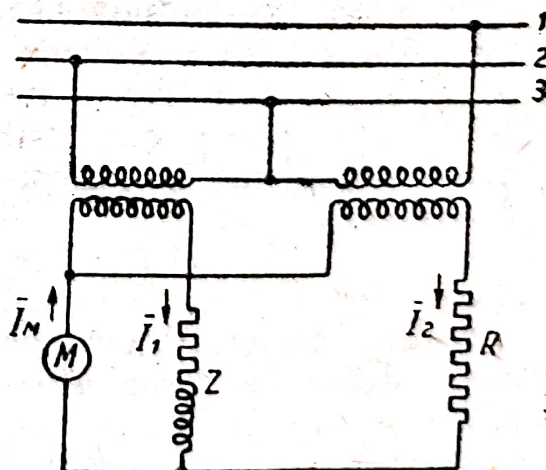


Fig. 11.2

Cum trebue modificat montajul pentru ca aparatul să măsoare componenta inversă?

11.3. Un montaj pentru măsurarea componentei directă de tensiune, ca cel din problema precedentă, are următoarele caracteristici : $M = 500\ \Omega$ şi $R = 2000\ \Omega$. Se aplică o tensiune de 100% din tensiune nominală numai la bornele unuia din cei doi transformatori. Ce va indica voltmetrul în cele două cazuri?

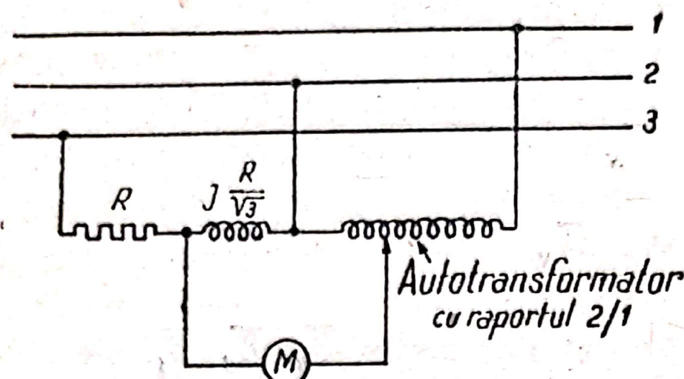


Fig. 11.4

11. 4. Să se arate că, cu ajutorul montajului din fig. 11.4 se măsoară componenta directă de tensiune.

11.5. Un voltmetru pentru măsurarea componentei directă de tensiune, având schema corespunzătoare figurii din problema 11.2, are impedanţa proprie $M = 400 + j\,80\ \Omega$ şi în montaj $R = 5000\ \Omega$. In urma unui defect, aparatul a fost rebobinat cu o sârmă mai subţire, astfel că impedanţa sa a devenit $M = 2530 + j1810\ \Omega$. Să se calculeze rezistenţa R_1 ce trebue pusă în circuit pentru ca etalonarea voltmetrului să nu se schimbe.

11.6. Ce măsoară voltmetrul din problema precedentă, înainte şi după rebobinare, dacă i se aplică o tensiune inversă de 50 V?

11.7. Să se determine elementele constructive ale voltmetrului de inducţie, montat conform fig. 11.7, pentru a măsura componenta directă de tensiune. Voltmetrul se leagă la o reţea de 380 V între faze; curentul maxim, admis într'o înfăşurare este de 5 mA.

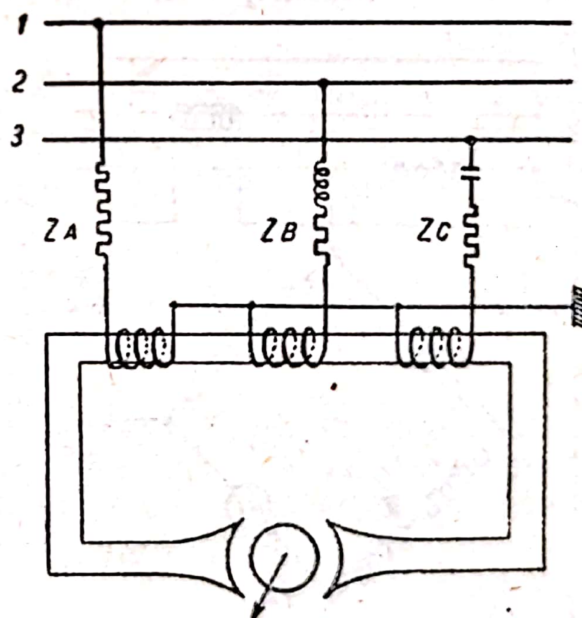


Fig. 11.7

11.8. Un alternator, având o forţă electromotoare constantă, funcţionează pe diverse defecte a căror rezistenţă este neglijabilă. Astfel, în diversele cazuri, curentul pe defect este :

a) la un defect trifazat, 1000 A;
b) la un defect între 2 faze, 1400 A;
c) la un defect între o fază şi pământ, 2220 A.

Componenta simetrică directă a tensiunii simple este 2000 V. Care sunt impedanțele directă, inversă și homopolară ale circuitului? (IPB 1950)

11.9. Pentru măsurarea impedanței de nul a unui alternator se leagă în scurtcircuit fazele b cu c și neutrul alternatorului, montându-se un voltmetru la bornele fazei libere și un ampermetru pe firul de nul. Să se arate că impedanța de nul a alternatorului este dată de relația

$$Z_0 = \frac{E_a}{I_n}$$

în care E_a și I_n sunt tensiunea și curentul măsurat de aparate.

Să se rezolve problema prin metoda coordonatelor simetrice. (IPB 1952)

11.10. Pentru măsurarea componentei directe a tensiunilor între faze se efectuează montajul din figura 11.10, în care V este un voltmetru având rezistența interioară $R_0 = 1260\ \Omega$. Se cere să se determine valoarea rezistenței R, a inductanței L și a capacității C, frecvența rețelei fiind $f = 50$ Hz.

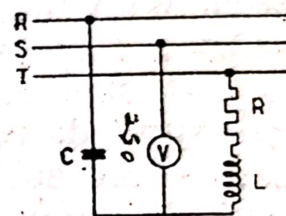


Fig. 11.10.

11.11. Să se arate că, folosind montajul din figura 11.11, în care $\overline{Z} = -a^2 R$, componentele directe ale curenților din linia

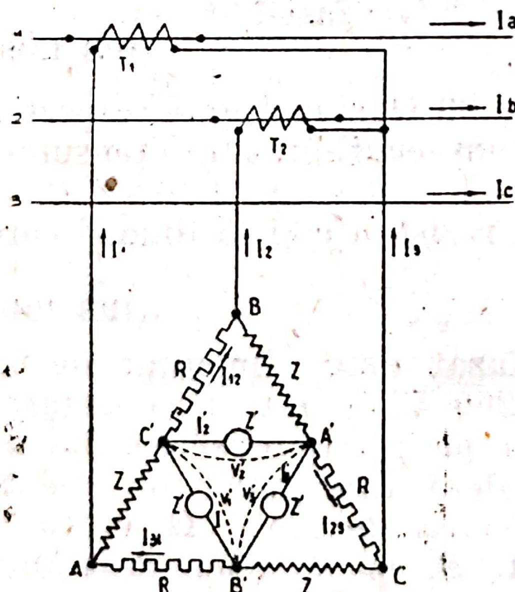


Fig. 11.11.

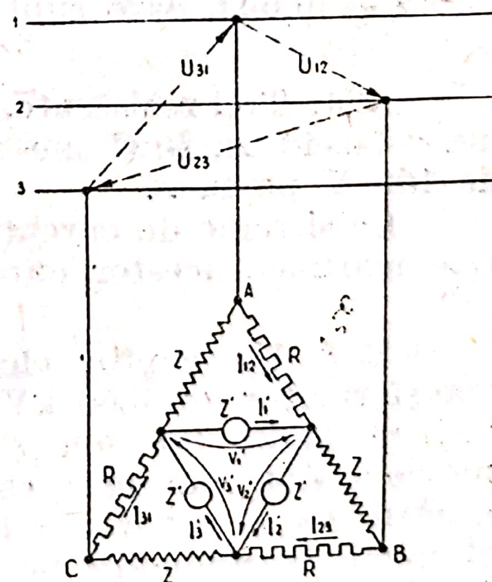


Fig. 11.12.

trifazată pot fi măsurate fie cu voltmetre montate între punctele $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, fie cu ampermetre montate între aceleași puncte.

Scanned with OKEN Scanner

11.12. Montajul din figura 11.12, realizat în aceleaş condiţii ca precedentul, permite să se măsoare fie cu ajutorul unor voltmetre, fie cu ajutorul unor ampermetre, componentele inverse ale tensiunilor între faze ale sistemului trifazat dat.

12. CALCULUL CIRCUITELOR TRIFAZATE DESECHILIBRATE. CALCULE DE SCURTCIRCUIT

12.1. Un transformator monofazat de 525 kVA, 2300/110 V, are o reactanţă de 3%. Să se determine reactanţa în ohmi, la ambele bare, de înaltă şi de joasă tensiune.

12.2. Un grup de transformatoare, având o putere totală de 20 MVA, este conectat la un sistem de 132 kV. Reactanţa totală a transformatoarelor este de 9%. Se cere:

— să se recalculeze această reactanţă, în procente, pentru o tensiune de referinţă, de 100 kV;

— să se calculeze reactanţa grupului de transformatoare, în ohmi, pentru tensiunile de 132 kV şi 220 kV.

12.3. Un alternator având o forţă electromotoare de 7000 V pe fază, alimentează o sarcină desechilibrată formată dintr'o impedanţă legată între fazele 2 şi 3. Neglijând rezistenţa alternatorului faţă de reactanţele sale, care sunt $\overline{Z}_s = j1,0\ \Omega$ şi $\overline{Z}_a = j0,15\ \Omega$, dacă impedanţa sarcinii este $\overline{Z} = 0,8 + j0,6\ \Omega$, care sunt tensiunile între faze?

(IPB 1949)

12.4. Trei rezistenţe, de 5,10 şi 20 Ω, sunt legate respectiv între fazele *A*, *B*, *C* ale unui sistem echilibrat de tensiune, de 100 V pe fază.

Ce sisteme de curenţi apar în rezistenţe şi în linie şi care este mărimea acestor curenţi?

(IPB 1949)

12.5. Un cuptor electric trifazat este alimentat de un transformator de 3500 kVA, 2200/200 V, 50 Hz, cu conectarea stea pe înaltă tensiune şi triunghi pe joasă tensiune. La un moment dat, cuptorul este echivalent din punct de vedere electric cu 3 rezistenţe legate în stea de 0,010 Ω, 0,010 Ω şi 0,001 Ω, respectiv pe fazele *A*, *B*, şi *C*. Dacă reactanţa transformatorului este de 30%, care este intensitatea curentului în cei 3 electrozi, neglijându-se rezistenţele transformatorului şi impedanţele conductorilor?

Care este puterea absorbită de cuptor în momentul considerat?

(IPB 1950)

12.6. Un generator simetric trifazat ($E_a = E_b = E_c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 400 V) conectat în stea, alimentează printr'o linie de transport cu impedanța $\overline{Z}_e = 0{,}5 + j1\ \Omega$ / fază un receptor, conectat tot în stea. Impedanțele fazelor receptorului sunt $\overline{Z}_A = 4{,}5 + j\,2\ \Omega$, $\overline{Z}_B = 9{,}0 + j\ \Omega$; $\overline{Z}_C = 1{,}5 - j\,3\ \Omega$.

Impedanța firului neutru este $Z_0 = 1 + j\,2\ \Omega$. Reactanțele generatorului $X_s = 2\ \Omega$, $X_a = 0{,}5\ \Omega$, $X_0 = 0{,}2\ \Omega$.

Se cere să se determine curenții din conductorii liniei, folosind metoda coordonatelor simetrice.

12.7. Ce relație trebue să existe între impedanțele $\overline{Z}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{Z}_C$, ale unei sarcini trifazate, conectate în stea, pentruca aplicându-se un sistem de tensiuni *între faze* nesimetric $\overline{U}_{AB}$, $\overline{U}_{BC}$, $\overline{U}_{CA}$, componenta homopolară a sistemului de tensiune *pe fază* să fie zero. Se pot alege impedanțele $\overline{Z}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{Z}_C$ astfel încât sistemul tensiunilor pe fază să fie direct sau invers?

12.8. Unei sarcini formate din trei impedanțe egale $\overline{Z} = 10 + j\,10\ \Omega$ legate în stea i se aplică sistemul de tensiuni desechilibrat $U_{AB} = U_{CA} = 141{,}4$ V, $U_{BC} = 200$ V. Se cere să se determine:

(*a*) Componentele simetrice ale tensiunilor.

(*b*) Componentele simetrice ale curenților din linii.

(*c*) Puterea directă, puterea inversă și puterea totală absorbită de sarcină.

12.9. Un motor asincron trifazat, conectat în stea, are impedanțele pe fază

$$\overline{Z}_s = 43{,}3 + j\,25{,}0\ \Omega$$
$$\overline{Z}_a = 5{,}0 + j\,8{,}66\ \Omega$$

Motorul este alimentat printr'o linie trifazată, având impedanța pe fază

$$\overline{Z}_L = 0{,}5 + j\,0{,}866\ \Omega$$

Sistemul nu are fir neutru.

Tensiunea la bornele de alimentare a liniei este

$$E_{AB} = 2000 \text{ V}; \qquad E_{BC} = 2300 \text{ V}; \qquad E_{CA} = 2300$$

Se cere să se determine:

(*a*) Compenentele directă și inversă a curentului;

(*b*) Mărimea componentelor simetrice ale tensiunilor la bornele motorului în raport cu mărimea componentelor simetrice ale tensiunii la bornele sursei.

(*c*) Puterea absorbită de motor.

12.10. Pentru sistemul din figura 12.10 se cere să se determine:

(*a*) Curenții I_A, I_B, I_C;

(*b*) tensiunile la bornele sarcinii;

(*c*) Indicațiile wattmetrelor W_A și W_B și puterea absorbită de sarcină.

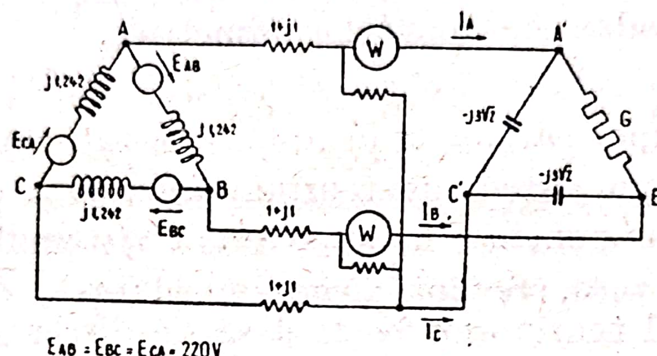


Fig. 12.10.

12.11. Un alternator simetric și echilibrat alimentează printr'o linie, a cărei reactanță este 0,3 Ω/fază, o sarcină desechilibrată formată din rezistențele

$$R_{12} = 11 \ \Omega$$
$$R_{23} = 33 \ \Omega$$
$$R_{31} = 16{,}5 \ \Omega$$

legate respectiv între fazele 1—2, 2—3, 3—1.

Dacă reactanțele mașinii sunt $X_s = 1\ \Omega$ și $X_a = 0{,}5\ \Omega$ pe fază și dacă forța electromotoare a alternatorului este de 1500 V pe fază, care sunt tensiunile la bornele alternatorului?

12.12. Un dispozitiv pentru determinarea sensului câmpului învârtitor este format din două lămpi și o inductanță, legate în stea pe cele trei faze ale unui sistem trifazat. Lămpile sunt conectate la fazele *A* și *C*, iar inductanța la faza *B*. Presupunând că tensiunea între faze este de 110 V și impedanțele fiecărei lămpi și a inductanței sunt respectiv $10 + j\,0\ \Omega$ și $0 + j\,10\ \Omega$, să se determine curentul prin lămpi când se aplică dispozitivului *a*) o tensiune directă; *b*) o tensiune inversă.

12.13. Un alternator trifazat simetric are următoarele constante: $\overline{Z}_s = j\,100\%$, $\overline{Z}_a = j\,30\%$ și $\overline{Z}_0 = j\,5\%$. El este

încărcat între faza a şi neutru cu impedanţa $\overline{Z}_1 = 100 + j0\%$, între faza b şi neutru cu impedanţa $\overline{Z}_2 = 0 + j\,100\%$ şi între faza c şi neutru cu impedanţa $\overline{Z}_3 = 100 + j\,100\%$. Excitaţia este de 120% faţă de excitaţia de mers în gol. Să se determine tensiunile între fază şi nul şi între faze.

12.14. Un alternator de 5000 kVA, 2200 V şi cu un factor de putere de 0,8 este conectat la o linie a cărei reactanţă este de 0,2 Ω/fază. Alternatorul este încărcat cu o rezistenţă de 4 Ω între fazele 2 şi 3, chiar la bornele sale, şi cu rezistenţe egale, de 5 Ω fiecare, între fazele 2 şi 3 şi 3 şi 1 la capătul liniei. Dacă reactanţele maşinii sunt $X_s = 1{,}0\ \Omega$ şi $X_a = 0{,}5\ \Omega$ pe fază, şi dacă forţa electromotoare a alternatorului este de 1500 V pe fază, care sunt tensiunile între faze la bornele maşinii şi la capătul liniei?

12.15. Un alternator trifazat cu conectarea stea şi cu nulul legat la pământ este cuplat direct cu un transformator cu conectarea stea-stea, având nulul legat la pământ pe ambele părţi. Tensiunea la bornele alternatorului este $U = 6$ kV, iar raportul de transformare al transformatorului este 6/30 kV.

Prin măsurători s'a determinat că, la curentul nominal de excitaţie, avem

$$E = 6250 \text{ V între faze}$$

$$\overline{I}_1 = 1100 - j\,2630\ A$$

$$\overline{I}_2 = 1050 - j\,2200\ \text{A}$$

$$\overline{I}_3 = 1200 - j\,1300\ \text{A}$$

iar pentru transformator, privite dinspre partea de înaltă tensiune,

$$\overline{Z}_d = 5 + j\,35\ \Omega$$

$$\overline{Z}_h = 10 + j\,15\ \Omega$$

Să se determine curentul de scurtcircuit la care va fi solicitat alternatorul în cazul unui scurtcircuit pe faza 3 la pământ, la bornele transformatorului.

Impedanţa cablului de legătură se neglijează.

(IPB 1949)

12.16. Un alternator trifazat cu conectarea în stea, cu nulul legat la pământ, este cuplat direct cu un transformator cu conectarea triunghi-stea, cu nulul legat la pământ. Tensiunea la bornele alternatorului este de 6 kV, iar raportul de transformare al transformatorului este 6/30 kV.

Scanned with OKEN Scanner

Cunoscând că impedanțele alternatorului sunt

$$\overline{Z}_s = j\,10\,\Omega \qquad \overline{Z}_a = j\,8\,\Omega \qquad \overline{Z}_0 = 10 + j\,12\,\Omega$$

iar ale transformatorului, pe partea de joasă tensiune

$$Z_d = 10 + j\,30\,\Omega \qquad \overline{Z}_h = 20 + j\,55\,\Omega$$

să se determine curenții de scurtcircuit la care va fi solicitat alternatorul în cazul unui scurtcircuit între fazele 1 și 3 ale transformatorului, pe partea de înaltă tensiune, și la pământ.

Se neglijează impedanța cablului de legătură.

(IPB 1949)

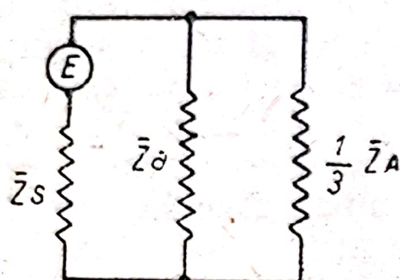


Fig. 12.17

12.17. Fie un generator la care fazele 2 și 3 sunt în scurtcircuit și legate printr'o impedanță Z_A cu faza 1 (scurtcircuit trifazat cu arc pe o fază).

Impedanțele alternatorului sunt $\overline{Z}_s$ și $\overline{Z}_a$, și forța sa electromotoare este $\overline{E}$. Să se arate că circuitul echivalent al acestui defect este cel dat în fig. 12.17 și să se calculeze curenții debitați de alternator.

Aplicație: $E_A = 5400$ V $\qquad \overline{Z}_s = 0 + j\,2{,}62\,\Omega$

$\overline{Z}_a = 1{,}4 + j\,2{,}3\,\Omega \qquad \overline{Z}_A = 2{,}4 + j\,0{,}6\,\Omega$

(IPB 1950)

12.18. Un alternator având tensiunea pe fază de 7000 V, alimentează o sarcină monofazată legată între fazele A și B.

Impedanțele alternatorului sunt $\overline{Z}_s = j\,1{,}0\,\Omega$, $\overline{Z}_a = j\,0{,}15\,\Omega$ iar impedanța sarcinii este $\overline{Z} = 0{,}8 + j\,0{,}6\,\Omega$.

Care sunt tensiunile între faze la utilizare?

(IPB 1950)

12.19. Un alternator trifazat simetric de 15 MVA și 5,4 kV este cuplat direct cu un transformator de 10 MVA, 5,4/30 kV, cu conexiunea triunghi-stea. La bornele transformatorului, pe partea de înaltă tensiune, între fazele 2 și 3, se produce un defect a cărui impedanță este de $3 + j\,0\,\Omega$.

Se cere puterea pe care o debitează alternatorul pe defect.

Impedanțele caracteristice ale alternatorului sunt $\varepsilon_s = 9\%$ și $\varepsilon_a = 7{,}5\%$; iar a transformatorului $\varepsilon_T = 10\%$.

(IPB 1950)

Scanned with OKEN Scanner

12.20. Un alternator având o forță electromotoare $E = 6350$ V pe fază, are fazele legate în stea cu nulul pus la pământ printr'o reactanță de $j10\ \Omega$. Impedanțele sale caracteristice sunt:

$$\overline{Z}_s = 0 + j\,1{,}45\ \Omega \qquad \overline{Z}_a = 0{,}07 + j\,0{,}17\ \Omega$$
$$\overline{Z}_0 = 0 + j\,0{,}12\ \Omega$$

Se cere să se calculeze puterea pe care o va debita alternatorul în cazul unui scurtcircuit la bornele sale, între două faze și la pământ, cu un arc având o rezistență de 10 Ω.

(IPB 1950)

12.21. Un alternator simetric, având impedanțele $\overline{Z}_0$, $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$, alimentează o sarcină echilibrată în triunghi, impedanța fiecărei faze fiind $\overline{Z}$. Dacă la un moment dat se produce un defect între două faze printr'o impedanță $\overline{Z}_A$, se cere să se determine curenții în fiecare element și tensiunile la bornele respective în timpul defectului.

12.22. O linie trifazată are reactanța de 1,2 Ω/fază și rezistența neglijabilă, iar între linii o reactanță mutuală egală cu 0,4 Ω. Centrala, care alimentează linia, are o putere infinită (tensiunea la bare nu variază la orice regim de funcționare dela mersul în gol până la mersul în scurt circuit). Tensiunea de alimentare a liniei este de 6,6 kV. Sistemul are neutrul pus direct la pământ. La un momest dat, fazele B și C se pun simultan la pământ.

Se cere să se arate ce vor indica aparatele de măsură din centrală (ampermetrele pe faze și pe neutru și voltmetrele dintre faze și nul). Se presupune că voltmetrele au o impedanță infinită.

12.23. Se dă o rețea ca cea din fig. 12.23, în care elementele caracteristice sunt indicate pe schemă. Producându-se un

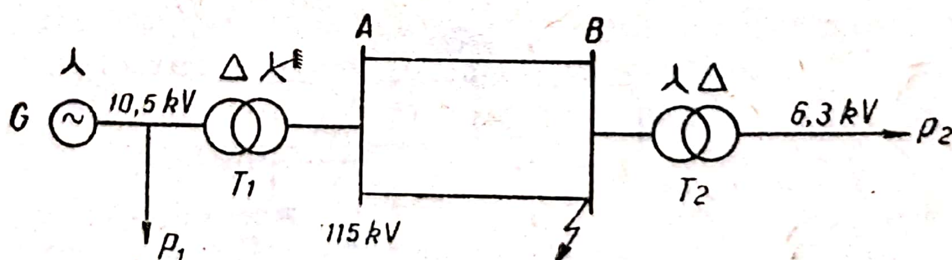


Fig. 12.23

scurtcircuit la bara B, se cere să se determine curenții de scurtcircuit la locul defectului în următoarele cazuri: *a)* scurtcircuit al unei faze la pământ, fără arc; *b)* scurtcircuit între

două faze şi la pământ fără arc; c) scurtcircuit între două faze, izolat de pământ; d) scurtcircuit trifazat.

$G \equiv 120$ MVA ; $U = 10{,}5$ kV ; $\varepsilon_1 = 12\%$; $\varepsilon_2 = 15\%$
$T_1 \equiv 60$ MVA ; 10,5/115 kV ; $\varepsilon_{T_1} = 10{,}5\%$
$T_2 \equiv 60$ MVA ; 115/6,3 kV ; $\varepsilon_{T_2} = 10{,}5\%$
$L \equiv l = 105$ km ; două circuite în paralel ; $x_1 = 0{,}4$ Ω/km

$$x_0 = 3\,x_1$$

$P_1 = 60$ MVA ⅄ $\varepsilon_k = 10{,}5\%$
$P_2 = 40$ MVA ⅄ $\varepsilon_k = 10{,}5\%$

12.24. Aceeaşi problemă pentru circuitul din fig. 12.24. Pe schemă sunt trecute toate elementele caracteristice ale reţelei.

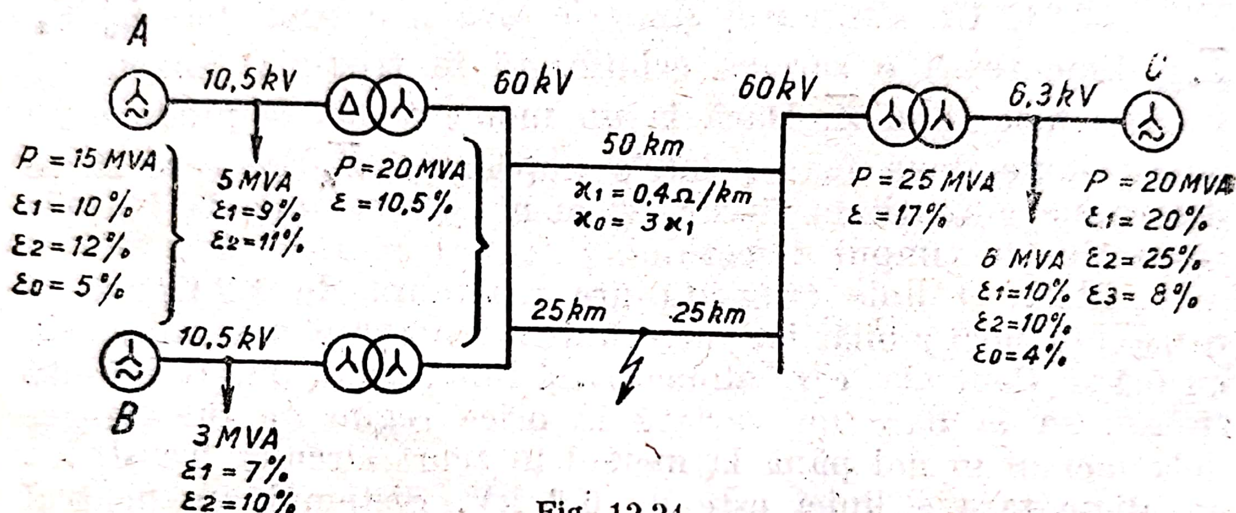


Fig. 12.24

Să se facă şi repartiţia curenţilor în întreaga reţea.

12.25. Pentru reţeaua din figura 12.25. se cere să se calculeze curenţii de scurtcircuit la locul defectului pentru: (a) scurtcircuit monofazat; (b) scurtcircuit bifazat şi la pământ; (c) scurtcircuit bifazat izolat de pământ.

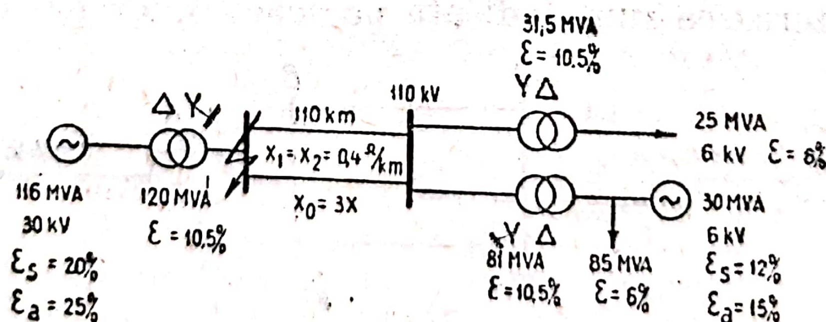


Fig. 12.25

Să se determine deasemenea şi tensiunea la bara opusă defectului în cazul (b).

12.26. Aceiaşi chestiune pentru circuitul din fig. 12.26.

12.27. La unul din consumatorii unei reţele trifazate echilibrate se proectează instalarea unui cuptor monofazat. Ştiind că puterea de scurt circuit trifazat la barele consumatorului este de 40 MVA iar puterea cuptorului este de 2500 kVA,

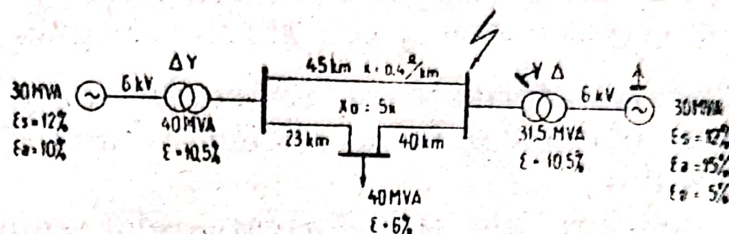


Fig. 12.26

se cere să se determine gradul de desimetrie a tensiunilor la consumator.

12.28. Se consideră un alternator trifazat, simetric şi echilibrat, având neutrul pus la pământ, şi cu faza A legată la pământ printr'o impedanţă $\overline{Z}_L$.

Să se demonstreze că puterea aparentă totală cu care alternatorul alimentează defectul este dată de relaţia:

$$\overline{S} = \overline{S}_h + S_d + \overline{S}_i = 9\,\overline{Z}_L \left(\frac{E}{Z}\right)^2.$$

In relaţia de mai sus: E este tensiunea pe fază a alternatorului, $\overline{S}_h$, $\overline{S}_d$, $\overline{S}_i$ sunt puterile aparente datorite componentelor simetrice şi

$$\overline{Z} = \overline{Z}_0 + \overline{Z}_s + \overline{Z}_a + 3\overline{Z}_L,$$

$\overline{Z}_0$, $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$ fiind impedanţele alternatorului.

(IPB 1952)

12.29. Pentru sudarea carcasei unui alternator se foloseşte o maşină de sudură trifazată la care una din faze este legată printr'o impedanţă $\overline{Z}_1 = 6 + j\,3\,\Omega$ direct la masă.

Dacă impedanţele arcului sunt $\overline{Z}_2 = 3 + \sqrt{3}\,\Omega$ şi $\overline{Z}_3 = 3 - \sqrt{3}\,\Omega$, se cere să se determine curenţii debitaţi de alternator pe fiecare fază şi tensiunile la bornele alternatorului.

Alternatorul este perfect simetric şi echilibrat, cu conexiunea în stea, având o tensiune de 380/220 V şi o putere de 10 kVA. Reactanţele alternatorului sunt $\varepsilon_s = 13{,}85\ \%$ şi $\varepsilon_a = 20{,}80\%$.

(IPB 1951)

12.30. Doi alternatori identici având neutrul pus la pământ sunt legați în paralel numai prin faza a. Impedanțele mașinilor sunt $\overline{Z}_S = j\,1{,}0\ \Omega$, $\overline{Z}_a = j\,0{,}30\ \Omega$ și $\overline{Z}_0 = j\,0{,}05\ \Omega$. Dacă componenta directă a tensiunii este decalată în urmă cu 30^0, care este diferența de potențial între bornele b și c ale celor două mașini? Se va presupune că forța electromotoare a alternatorilor este simetrică, echilibrată și egală cu 1.

12.31. Trei transformatoare, având fiecare o impedanță diferită, primesc energia dela un sistem trifazat echilibrat cu tensiune constantă.

Bornele de eșire ale transformatoarelor sunt legate în triunghi, tensiunea de mers în gol la bornele de eșire fiind de 220 V. Fiecare transformator poate fi considerat ca un generator monofazat având în serie impedanțele

$$\overline{Z}_{AB} = 0{,}5 + j\,0{,}866\ \Omega$$
$$\overline{Z}_{BC} = 0{,}1 + j\,0{,}173\ \Omega$$
$$\overline{Z}_{CA} = 0{,}5 + j\,0{,}866\ \Omega$$

Ce tensiune apare la bornele transformatorului dacă acesta debitează pe o sarcină trifazată formată din trei impedanțe egale, $\overline{Z} = 1, + j\,1{,}73\ \Omega$ legate în stea?

Observație. **Valoarea impedanțelor interne indicate mai sus sunt mult mai mari decât acelea din practică.**

12.32. Trei rezistențe egale de 45 Ω fiecare sunt legate în triunghi și alimentate prin trei conductori identici, având fiecare o rezistență de 5 Ω, de la un sistem de tensiuni monofazate legate în V, și egale cu $\overline{E}_{BA} = \overline{E}_{BC} = 120\,\underline{|\,0^0}$ V. Se cere să se determine:

(*a*) Componentele simetrice ale curenților din linii.

(*b*) Curenții din linii.

(*c*) Tensiunile la bornele sarcinii.

(*d*) Puterea totală disipată în rezistențele care formează sarcina.

12.33. Trei sarcini inductive sunt conectate în triunghi și alimentate cu un sistem simetric de tensiuni de 220 V între faze. Prima sarcină absoarbe un curent de 100 A cu un factor de putere de 0,707; a doua absoarbe un curent de 150 A cu un factor de putere de 0,8 și a treia absoarbe o putere de 27,2 kW cu un factor de putere de 0,5.

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine:

(*a*) Componentele simetrice ale curenților din impedanțe și din linii.

(*b*) Intensitatea curenților din linii.

(*c*) Ce putere se măsoară prin metoda celor două wattmetre și ce indică fiecare wattmetru dacă bobinele de curent sunt montate în liniile *A* și *B*?

12.34. Un cuptor electric pentru scopuri ceramice este format din două grupuri de câte trei rezistențe a 45 Ω fiecare legate în paralel și alimentate în V de două transformatoare monofazate, având fiecare tensiune de 220 V. Alimentarea

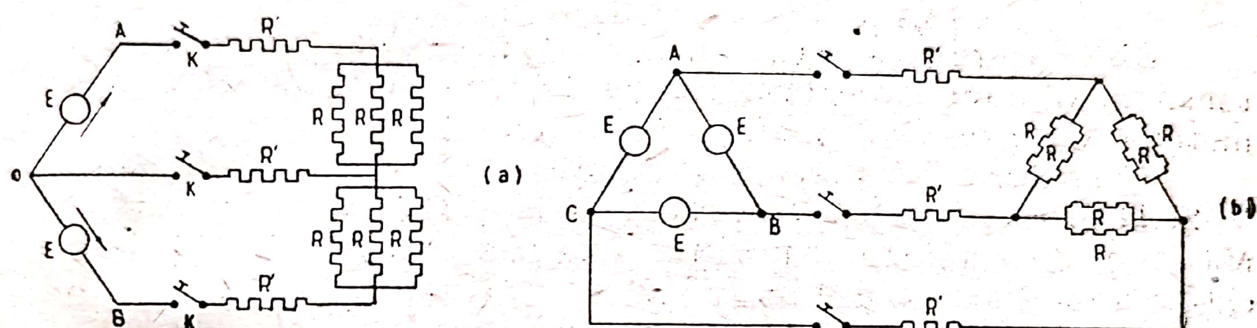


Fig. 12.34

cuptorului se face prin conductori având fiecare o rezistență de 0,5 Ω (fig. 12.34 ***a***). Un dispozitiv automat acționează asupra contactorului *K* astfel ca temperatura în cuptor să se mențină constantă. In timpul unei luni de lucru, utilizarea puterii utile este de 200 ore. Puterea și energia sunt măsurate la bornele contactoarelor și reprezintă lunar următoarele cote:

Cererea de putere: 5 lei/kW

Energia consumată: 0,1 lei/kWh

Contorul măsoară puterea cu o eroare mai mică de 0,1 kW pentru putere și mai mică de 10 kWh pentru energie.

Cât costă alimentarea cu electricitate a instalației?



Pentru echilibrarea rețelei, se transformă instalația precedentă, făcând să funcționeze într'un sistem trifazat (fig. 12.34 ***b***) cu conectarea în triunghi atât pentru transformatoare, cât și pentru rezistențe. Tensiunea aplicată rezistențelor este aceiași.

Care este utilizarea lunară a puterii utile în acest caz?

Cât costă în acest caz alimentarea cu electricitate a instalației?

PARTEA IV

REGIMUL TRANZITORIU

13. STUDIUL DIRECT AL REGIMULUI TRANZITORIU

13.1. Dorim să măsurăm rezistența înfășurării de înaltă tensiune a unui transformator de 25000/400 V, 50 Hz, prin metoda voltmetrului și ampermetrului.

Cunoscând că această înfășurare are o rezistență $R = 20\ \Omega$ și că reactanța sa este $X = 46,1\ \Omega$, se întreabă după cât timp dela aplicarea unei tensiuni continui pot fi citite indicațiile aparatelor astfel încât valoarea instantanee a curentului măsurat să difere cu 0,1% față de valoarea teoretică de regim.

(IPB 1949)

13.2. Pentru măsurarea rezistenței înfășurării de înaltă tensiune a unui transformator se folosește metoda voltmetrului și ampermetrului.

Știind că această înfășurare are o rezistență de circa 19 Ω și o reactanță de circa 42 Ω la 50 Hz, se întreabă după cât timp dela aplicarea unei tensiuni V vor putea fi citite indicațiile aparatelor.

Se va admite regimul stabilit atunci când curentul va diferi cu mai puțin de 10^{-2} din valoarea lui de regim.

(IPB 1949)

13.3. Să se determine curentul de încărcare al unui cablu de înaltă frecvență de 20 km lungime, având o capacitate de 2 μF/km și o rezistență de 0,650 Ω/km. Tensiunea aplicată sistemului este:

$$e = 1500 \cos(\omega t + \psi) + 150 \cos(3\omega t + \psi)$$

în care $f = 1000$ Hz.

(IPB 1949)

13.4. Se leagă un cablu, având o capacitate de 0,23 μF/km și o rezistență de 0,51 Ω/km, la o rețea de curent alternativ având o tensiune de 30 kV și o frecvență de 42 Hz.

Scanned with OKEN Scanner

Lungimea cablului fiind $l = 4$ km, se cere să se determine lovitura de curent în momentul închiderii întrerupătorului, ştiind că această închidere are loc în momentul în care $\psi = \frac{\pi}{6}$.

Care este raportul dintre acest curent şi curentul normal de încărcare?

(IPB 1949)

13.5. Se dă un circuit format dintr'o rezistenţă $R = 100\ \Omega$ în serie cu o inductanţă $L_1 = 0{,}318$ H şi alimentat cu tensiunea alternativă

$$e = 1000 \sin \omega t.$$

La un moment dat inductanţa creşte brusc la valoarea $L_2 = 0{,}551$ H. Frecvenţa tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului din circuit şi să se traseze curba reprezentativă între limitele $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$ şi $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ faţă de momentul producerii variaţiei inductanţei.

13.6. Se dă un circuit format dintr'o rezistenţă $R_1 = 356\ \Omega$ în serie cu o inductanţă $L = 0{,}638$ H şi alimentat cu tensiunea

$$e = 3200 \cos \omega t.$$

La un moment dat, rezistenţa scade brusc la $R_2 = 200\ \Omega$. Frecvenţa tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al curentului şi să se traseze curba reprezentativă între limitele $t_1 = -\frac{2\pi}{\omega}$ şi $t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$, faţă de momentul producerii variaţiei rezistenţei.

(IPB 1950)

13.7. Se cere să se stabilească regimul tranzitoriu al tensiunii la bornele condensatorului C, a cărui capacitate este de 1,06 μF, condensatorul fiind legat în serie cu o rezistenţă $R_1 = 1732\ \Omega$ şi alimentat cu o tensiune alternativă a cărei valoare eficace este de 2000 V, când rezistenţa creşte brusc la 3000 Ω. Frecvenţa tensiunii alternative este 50 Hz. Să se traseze curba reprezentativă a tensiunii la bornele condensatorului.

(IPB 1950)

13.8. O linie electrică trifazată aeriană perfect izolată și simetrică, are următoarele caracteristici:

$$l = 50 \text{ km} \qquad U = 60 \text{ kV} \qquad s = 50 \text{ mm}^2$$
$$L = 0{,}003 \text{ H} \qquad f = 50 \text{ Hz}.$$

Linia este legată la ambele capete la transformatoare cu conexiune ⅄⅄ cu nulul legat la pământ, fiecare transformator având o rezistență de 12 Ω și o reactanță de 42 Ω.

Inchizându-se linia în gol, se cere lovitura de curent la închidere. După cât timp curentul liber va fi de numai 1/100 din valoarea lui inițială?

(IPB 1950)

13.9. Se dă circuitul format dintr'o rezistență $R_1 = 100$ Ω în serie cu o inductanță $L = 0{,}318$ H și alimentat de tensiunea alternativă $e = 1000 \sin(\omega t + \psi)$. La un moment dat R crește brusc la valoarea $R_2 = 200$ Ω. Frecvența tensiunii alternative fiind $f = 50$ Hz, se cere:

1) regimul tranzitoriu al curentului;

2) pentru care valoare a lui ψ tensiunea la bornele inductanței este maximă?

3) să se reprezinte grafic curba tensiunii la bornele inductanței, înainte și după variația sarcinii.

13.10. O rezistență R este legată în serie cu o inductanță L, circuitul fiind alimentat cu o forță electromotoare sinusoidală de forma:

$$e = E \sin(\omega t + \psi).$$

La un moment dat, se comutează brusc circuitul pe o forță electromotoare continuă E.

Se cere regimul tranzitoriu al curentului din circuit.

13.11. Aceeași chestiune ca mai sus, însă în cazul în care comutarea se face dela curentul continuu la curentul alternativ.

13.12. Un circuit este format dintr'o rezistență R_1 în serie cu o inductanță L_1, totul în paralel cu o rezistență R_2. Acest circuit se leagă la o sursă constantă de curent. Se cere să se determine regimul tranzitoriu de stabilire a curenților în acest circuit.

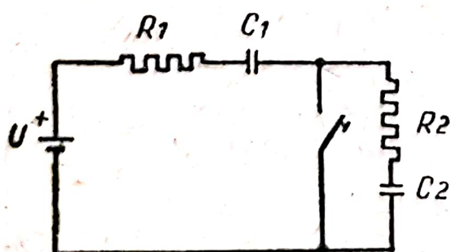


Fig. 13.13

13.13. Se dă circuitul din figura 13.13. Inchizându-se întrerupătorul, se cere să se determine regimul de încărcare al condensatorului C_1 și de descărcare al condensatorului C_2.

Aplicație numerică. $C_1=50\,\mu F$, $C_2=200\,\mu F$, $R_1=5000\,\Omega$, $R_2=1000\,\Omega$ și $U=3$ kV.

(IPB 1952)

13.14. Se dă circuitul din fig. 13.14. Inchizându-se circuitul, se cere să se determine:

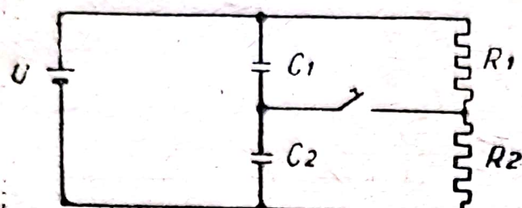


Fig. 13.14

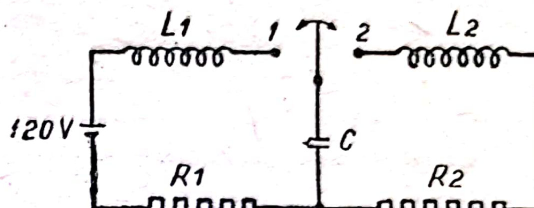


Fig. 13.15

a) curentul de descărcare al condensatorilor;
b) curentul tranzitoriu din rezistențe;
c) curentul debitat de pilă;
d) tensiunea la bornele condensatorilor.

Aplicație numerică: $C_1=100\ \mu F$; $C_2=200\ \mu F$; $R_1=5000\,\Omega$; $R_2=1000\,\Omega$; $U=3000$ V.

(IPB 1952)

13.15. Se dă circuitul din figura 13.15 în care $L_1=1$ mH; $L_2=10$ mH; $R_1=R_2=10\ \Omega$; $C=100\ \mu F$,

Se încarcă condensatorul pe sursa constantă de 120 V. apoi se descarcă pe circuitul din dreapta. Se cere curba variației tensiunii la bornele condensatorului.

(IPB 1951)

13.16. Aceeași chestiune ca în problema precedentă, dar pentru $L_1=10$ m H; $L_2=1$ m H; $R_1=10\,\Omega$; $R_2=100\,\Omega$; $C=100\ \mu F$. Se presupune că, în momentul începerii operației, condensatorul este complect descărcat. Discuție.

(IPB 1951)

13.17. Un condensator de 100 μF este încărcat prin intermediul unei rezistențe de 9 Ω cu ajutorul unei baterii de 12 V având o rezistență interioară de 1 Ω.

Se descarcă apoi condensatorul pe o rezistență oarecare R_c.

Se cere să se determine randamentul acestei instalații.

Se poate mări randamentul variind forța electromotoare, rezistența sau capacitatea condensatorului?

Scanned with OKEN Scanner

13.18. Se dă circuitul din figura 13.18. La un moment dat se deschide brusc întrerupătorul I.

Se cere să se determine curenții din diferitele laturi ale circuitului și tensiunea la bornele condensatorului.

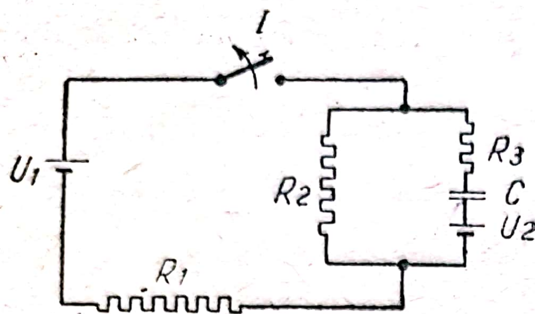


Fig. 13.18

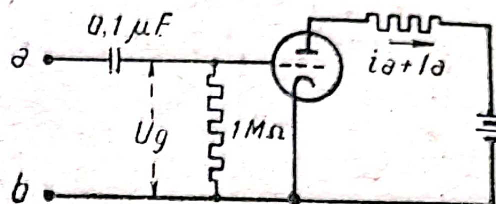


Fig. 13.19

Ce devine curentul din rezistența R_2 dacă $R_1 = 0$?

Aplicație: $R_1 = 5000\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 10000\ \Omega$; $C = 50\ \mu F$; $U_1 = 1500$ V; $U_2 = 5500$ V.

13.19. Componenta alternativă I_a a curentului din circuitul plăcii triodei (fig. 13.19) este direct proporțională cu tensiunea aplicată grilei.

Să se găsească forma acestui curent dacă tensiunea aplicată la bornele ab variază după legea $u = 10$ mV în intervalul de timp $0 < t < 0{,}05$ s și este nulă în afara acestui interval. Ce devine curentul dacă intervalul de aplicare a tensiunii se reduce la 0,005 s?

13.20. La bornele unei bobine de inducție, având o rezistență de 20 Ω și o inductanță de 0,02 H se aplică o tensiune având forma din fig. 13.20.

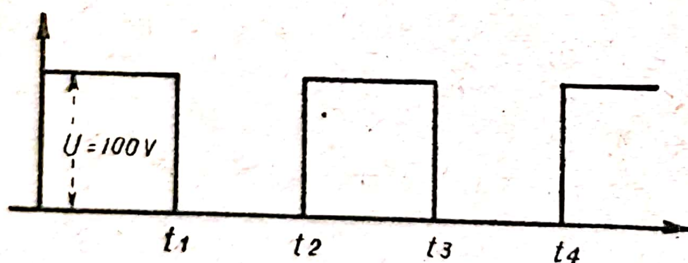


Fig. 13.20

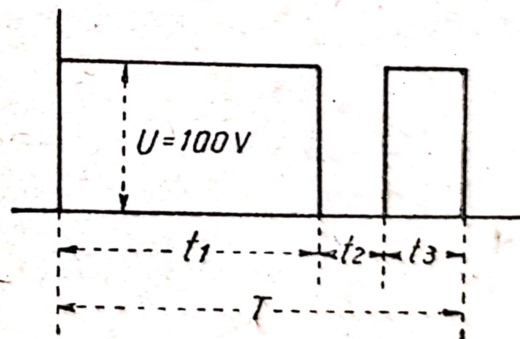


Fig. 13.21

Să se determine curentul din bobină și să se construiască forma acestui curent pentru intervalul de timp $0 < t < 5t_1$.

13.21. O bobină având o rezistență de 25 Ω și o inductanță de 75 mH, este alimentată cu o tensiune corespunzătoare literei H din alfabetul Morse (fig. 13.21) în care $t_2 = t_3 = 10^{-3}$ s și $t_1 = 3\,t_2$.

Se cere:

a) să se determine legea de variație a curentului în bobină;

b) să se construiască curba reprezentativă pentru $0 \leqslant t \leqslant T + t_2$.

13.22. Se dă circuitul din fig. 13.22 la bornele căruia se aplică tensiunea impuls egală cu $U_1 = 10$ mV pentru $0<t<t_1$ și nulă în afara acestui interval.

Se cere să se determine curentul de placă al triodei, știind că acesta este proporțional cu tensiunea la grilă u_g.

Ce devine acest curent dacă durata impulsului se reduce de n ori?

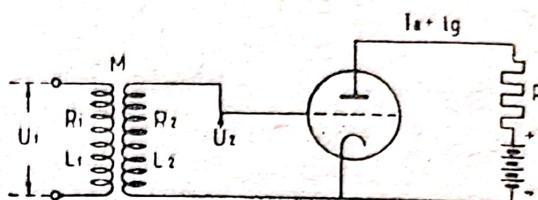


Fig. 13.22.

Aplicații: $R_1 = 10\,\Omega$; $L_1 = 0{,}5$ H; $M = 0{,}2$ H; $L_2 = 0{,}42$ H; $R_2 = 35\,\Omega$; $t_1 = 0{,}1$ s; $n = 10$.

Se presupune că conductanța circuitului este nulă.

13.23. Aceeași chestiune, în ipoteza că impulsul are forma unei jumătăți de sinusoidă cu amplitudinea $U_{max} = 10$ mV și perioada (a) $T = 0{,}2$ s; (b) $T = 0{,}02$ s.

13.24. Aceeași chestiune ca mai sus, impulsul fiind de forma unui sfert de cosinusoidă, având aceleași caracteristici.

13.25. Aceiași chestiune, impulsul variind după legea:

pentru $t < 0$ $\qquad u = 0$

pentru $0 < t < t_1$ $\qquad u = U_0 \frac{t}{t_1}$

pentru $t_1 < t$ $\qquad u = U_0$

în care $U_0 = 10$ mV; $t_1 = 0{,}1$ s și $0{,}01$ s.

13.26. Se dă un circuit format dintr'o rezistență în serie cu o capacitate și alimentat cu tensiunea alternativă sinusoidală $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi)$.

In ce moment trebue închis întrerupătorul pentru ca în circuit să se stabilească direct regimul permanent. Să se construiască diagrama vectorială corespunzătoare acestui moment.

Ce devine această condiție și diagrama respectivă dacă tensiunea este de forma

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \psi).$$

13.27. Aceeaşi chestiune în cazul unui circuit format din o rezistenţă în serie cu o inductanţă.

13.28. In circuitul din fig. 13.28, comutatorul K este pe poziţia 1 şi regimul permanent este stabilit. La un moment

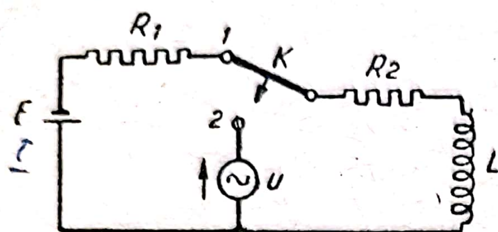


Fig. 13.28

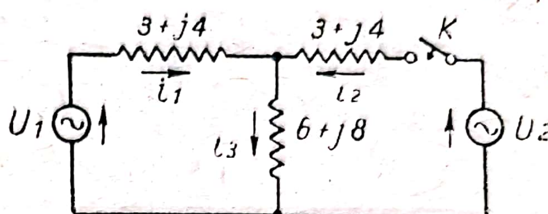


Fig. 13.29

dat, se comută, fără întrerupere, comutatorul K pe poziţia 2. In acel moment valoarea tensiunii alternative este $u = \frac{U\sqrt{2}}{2}$ şi $\frac{du}{dt} < 0$.

Se cere să se determine: *a*) curentul care se stabileşte în circuit; *b*) pentru ce valoare a lui ψ nu apare regim tranzitoriu.

Aplicaţie: $E = 200$ V; $u = 141 \sin(314\,t + \psi)$ V; $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$; $L_2 = 0{,}0318$ H.

13.29. Inchizându-se întrerupătorul K (fig. 13.29), se cere să se determine curenţii din diferitele ramuri, ştiind că $\overline{U}_1 = \overline{U}_2 = \frac{375}{\sqrt{2}}\underline{|\,90^0}$ V.

13.30. Un circuit format dintr'o rezistenţă R în paralel cu o inductanţă L este legat în serie cu o capacitate C pe o sursă constantă U.

Se cere să se determine curenţii din cele două ramuri şi tensiunea la bornele condensatorului.

Aplicaţie: $C = 1\,\mu$F, $R = 100\,\Omega$, $L = 1$ H, $U = 186$ V.

13.31. Aceeaşi chestiune pentru cazul când capacitatea şi inductanţa se permută una în locul celelalte.

13.32. Aceeaşi chestiune pentru cazul când capacitatea şi rezistenţa se permută una în locul celeilalte.

13.33. Un releu, având o rezistenţă de 8,4 Ω şi o inductanţă de 0,72 H este legat la o baterie de acumulatori de 10 V prin conductori având o rezistenţă de 31,6 Ω. Armătura releului este atrasă atunci când curentul atinge valoarea de 0,15 A şi nu este eliberată decât atunci când valoarea lui scade la 0,05 A.

Scanned with OKEN Scanner

Care este viteza limită cu care trebue acționat un comutator de scurt circuitare a circuitului pentruca armătura să înceapă să vibreze?

13.34. O forță electromotoare de E volți este aplicată unei bobine având o rezistență de R Ω și o inductanță de L H.

Ce cantitate de energie s'a acumulat în câmpul magnetic în momentul în care s'a aplicat f.e.m. bobinei? Care este energia totală înmagazinată în câmpul magnetic?

13.35. Două rezistențe inductive sunt legate în serie și alimentate cu tensiunea alternativă $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi)$. In momentul în care curentul trece prin maxim, se shuntează una din rezistențe. Se cere să se determine curenții din cele două rezistențe și din circuitul de scurt-circuitare.

Aplicație numerică: $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$, $L_1 = L_2 = 64$ mH $U = 220$ V, $f = 50$ Hz.

13.36. Un electromagnet, având caracteristicele $R_2 = 5\,\Omega$ și $L_2 = 0{,}6$ H, este alimentat dela o sursă de energie electrică constantă de 100 V printr'o linie având caracteristicile $R_1 = 5\,\Omega$ și $L_1 = 0{,}4$ H. La un moment dat se produce un scurt-circuit la bornele electromagnetului.

Se cere să se determine valoarea curentului de scurt-circuit la 0,06 s după producerea scurt circuitului.

13.37. Un cablu de curent continuu monofilar, pentru alimentarea firului de cale a unei rețele de tramvae, poate fi reprezentat printr'un cuadripol în T simetric la care impedanțele serie sunt egale și egale cu jumătate din rezistența cablului ($2R$), iar impedanța transversală este formată din capacitatea cablului (C) în paralel cu rezistența sa de izolație (R_0). Deconectând de la rețea un asemenea cablu în gol, se cere să se determine:

(a) Timpul după care curentul capacitiv de încărcare a cablului a ajuns la 1% din valoarea sa inițială.

(b) Cantitatea de căldură ce se produce în izolația cablului din cauza rezistenței corespunzătoare.

Aplicație numerică: Tensiunea de alimentare a cablului $U = 760$ V $C = 1{,}5\,\mu$F, $2R = 4\,\Omega$, $R_0 = 3.10^7\,\Omega$

13.38. In circuitul din figura 13.38. întrerupătorul k rămâne închis timpul necesar ca în circuit să se stabilească regimul permanent, după care el se deschide.

Se cere să se determine valoarea inițială a tensiunii la bornele sale în momentul deschiderii.

13.39. In circuitul din figura 13.39. regimul permanent este stabilit pentru cazul când întrerupătorul k este deschis. La timpul $t = 0$ se închide acest întrerupător.

Se cere:

(*a*) să se determine valoarea inițială și polaritatea mărimilor u_{c1}, u_{c2} și i_L.

(*b*) Să se scrie ecuațiile integro-diferențiale de funcționare ale circuitului pentru cazul când întrerupătorul k este închis.

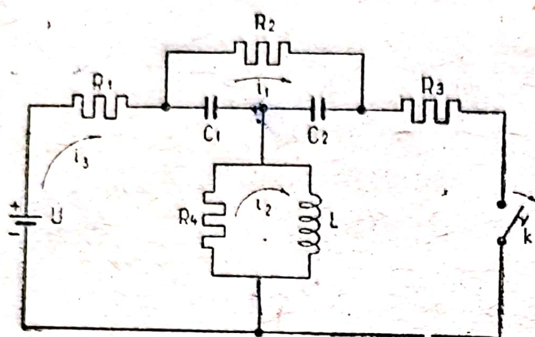


Fig. 13.38.

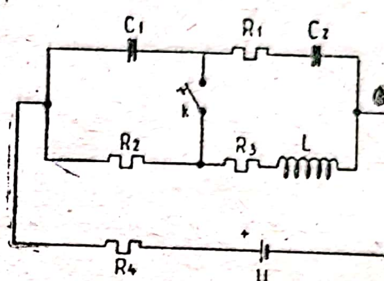


Fig. 13.39.

13.40. Pentru studierea fenomenelor tranzitorii se efectuează un montaj ca acela din figura 13.40. Eclatorul cu sfere G funcționează în momentul când tensiunea la bornele sale atinge o anumită valoare γ, creșterea tensiunii făcându-se lent. In acest moment se produce o descărcare, ca și cum eclatorul a fost descărcat. Tensiunea la bornele rezistenței R_2 se aplică la bornele unui oscilograf, iar tensiunea dela bornele condensatorului C_2 se folosește pentru producerea fenomenului tranzitoriu în rețeaua studiată.

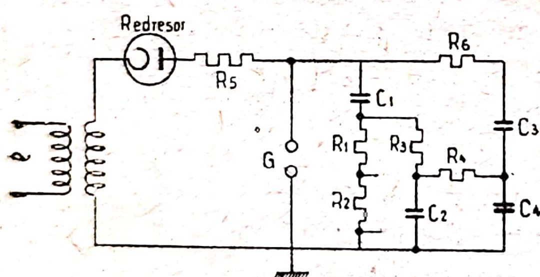


Fig. 13.40.

Se cere:

(*a*) să se stabilească condițiile inițiale de funcționare ale sistemului.

(*b*) Să se scrie ecuațiile integro-diferențiale ale circuitului.

13.41. Este posibil să se aplice unui circuit cu R, L, C, o tensiune sinusoidală astfel încât să apară direct regimul permanent fără să mai apară regimul tranzitoriu? Se vor examina cazurile (*a*) cu condensatorul descărcat la momentul inițial; (*b*) cu condensatorul încărcat.

13.42. Pentru a absorbi scânteia se ce produce la deschiderea unui circuit inductiv, se montează la bornele intrerupătorului un condensator. Dacă se deschide intrerupătorul K

după ce regimul permanent se stabilise în circuit, se cere să se determine:

(*a*) tensiunea la bornele întrerupătorului;

(*b*) care este tensiunea maximă la bornele condensatorului și cât timp durează?

13.43. Se dă circuitul din figura 13.43. Se închide întrerupătorul k obținându-se regimul permanent; se deschide apoi întrerupătorul k. Se cere să se determine:

(*a*) Expresia curenților după închiderea întrerupătorului, presupunând că, în momentul inițial toți curenții sunt nuli.

(*b*) Expresia curentului tranzitoriu din circuitul *abca*. Care este sensul acestui curent?

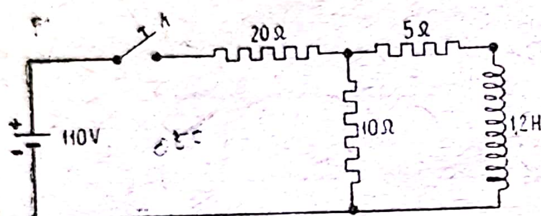


Fig. 13.43.

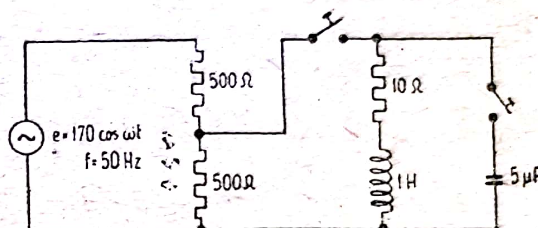


Fig. 13.44.

13.44. In circuitul din figura 13.44, la momentul inițial, condensatorul C este descărcat.

(*a*) Se cere să se determine curentul din inductanță la închiderea întrerupătorului circuitulului din mijloc, dacă această închidere se face în momentul când forța electromotoare trece prin zero descrescând.

(*b*) După un timp suficient de lung dela închiderea acestui întrerupător, astfel încât să se poată presupune că regimul permanent s'a stabilit, se închide întrerupătorul circuitului din dreapta, în momentul când forța electromotoare are o valoare maximă pozitivă. Se cere să se determine și în acest caz curentul din inductanță.

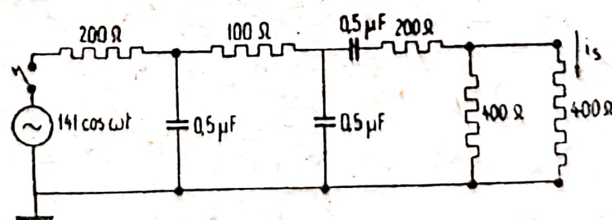


Fig. 13.45.

13.45. Să se determine expresia curentului tranzitoriu i_s în cazul când întrerupătorul se închide la timpul $t = 0$ (fig. 13.45) știind că $\omega = 10\,000$ rad/s.

14. STUDIUL REGIMULUI TRANZITORIU CU AJUTORUL CANTITĂŢILOR COMPLEXE ŞI AL CALCULULUI OPERAŢIONAL

14.1. Un condensator cu pierderi, de capacitate $C = 1\ \mu F$ şi $\text{tg}\ \delta = 0{,}3925$ la frecvenţa industrială de 50 Hz, este încărcat la o tensiune continuă U şi apoi scurtcircuitat pe o inductanţă $L = 4$ H. Se cere să se determine regimul liber de descărcare al condensatorului.

(IPB 1951)

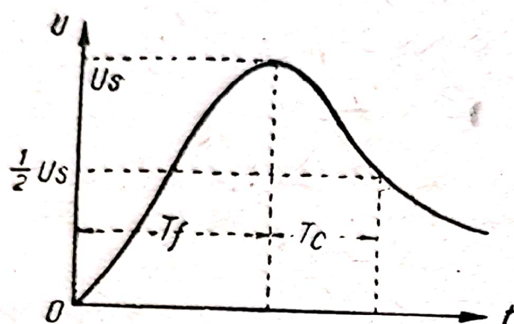


Fig. 14.2 *a*

14.2. Pentru producerea undei de şoc (fig. 14.2, *a*) se utilizează un generator de şoc a cărui schemă este dată în fig. 14.2, *b*.

Dispozitivul funcţionează în modul următor: se realizează fruntea undei de şoc cu ajutorul tensiunii alternative care alimentează rezistenţa R şi condensatorul C. In momentul când tensiunea u la bornele condensatorului C atinge valoarea tensiunii de creastă U_s, se produce o descărcare electrică la eclator, a cărui distanţă între borne este reglată în consecinţă. In acelaşi moment, un releu deconectează alimentarea e astfel că, din acest moment, condensatorul C se descarcă prin rezistenţa ρ şi inductanţa L, realizându-se astfel coada undei.

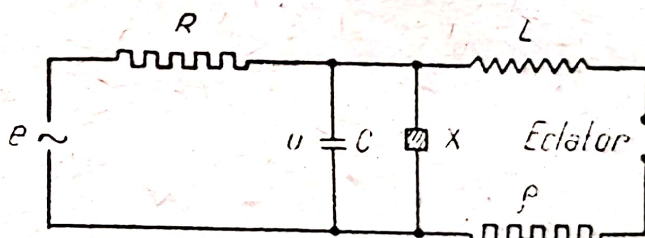


Fig. 14.2 *b*

Materialul de încercat X se aşează chiar la bornele condensatorului C. Prin urmare, el va trebui să suporte chiar tensiunea condensatorului.

Se dă R, C, L, T_f, T_c şi se cere să se determine U_s şi ρ.

Aplicaţie: $f = 50$ Hz; $R = 0{,}1\ \Omega$; $C = 0{,}1\ \mu F$; $L = 0{,}1$ H; $T_f = 1\ \mu s$; $T_c = 50\ \mu s$; $E = 500$ kV.

14.3. Un transformator trifazat, de 110/35 kV şi 1000 kVA, are următoarele caracteristici deduse din încercări:

$U_0 = 36$ kV $\varepsilon_K = 17\%$

$I_0 = 3\%\ I_n$ $P_K = 39{,}3$ kW

$P_0 = 3{,}1$ kW $f = 50$ Hz.

Transformatorul funcționează la plină sarcină cu un factor de putere egal cu 0,7 ind., sarcina fiind presupusă perfect simetrică și echilibrată.

La un moment dat, dintr'o cauză oarecare, sarcina scade la jumătate, iar factorul de putere crește la 0,8 ind.

Să se determine regimul tranzitoriu al curenților din transformator.

14.4. Un circuit este format din două inductanțe, L_1 și L_2, legate în serie. La bornele inductanței L_2 se cuplează un condensator de capacitate C având o sarcină Q. Se cere regimul de curenți ce se stabilește în circuit.

14.5. In cazul circuitului din problema precedentă se presupune că condensatorul este imperfect și se cuplează după un timp t dela încărcare. Se cere regimul de curenți și în acest caz.

14.6. Se dau două circuite cuplate printr'o inductanță M. Circuitul primar este format dintr'o rezistență R_1 și bobina de cuplaj are inductanța proprie L_1. Circuitul secundar, având inductanța proprie a bobinei de cuplaj L_2, este legat pe o rezistență R_2. La un moment dat la bornele primarului se cuplează un condensator încărcat de capacitate C și având sarcina Q.

Se cere să se determine regimul de curenți ce se stabilește în aceste circuite.

14.7. Un condensator imperfect de 100 μF, având o conductanță de 400 μS, este legat în serie cu o inductanță de 100 H și 600 Ω pe o sursă de curent continuu de 1000 V.

Să se determine regimul tranzitoriu de stabilire al curentului.

(IPB 1952)

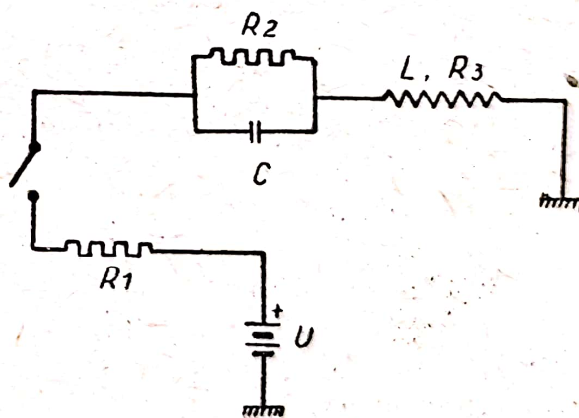


Fig. 14.8

14.8. Să se determine curentul de scurgere la pământ prin dispozitivul de protecție al unui alternator, reprezentat prin schema din fig. 14.8.

Aplicație: $R_1 = 100\,\Omega$; $R_2 = 2000\,\Omega$; $R_3 = 110\,\Omega$; $L = 3$ H; $C = 1\,\mu$F; $U = 40$ V.

(IPB 1952)

14.9. După cât timp dela închiderea întrerupătorului K se stabilește curentul în circuitul plăcii triodei (fig. 14.9)

ştiind că aceasta are loc atunci când tensiunea aplicată grilei este egală cu — 5V?

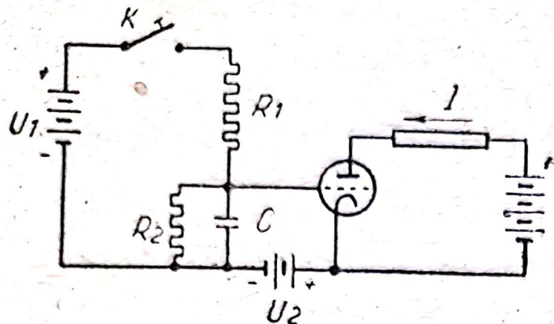


Fig. 14.9

Aplicație: $U_1 = 100$ V; $U_2 = 55$ V; $R_1 = 10^4 \Omega$; $R_2 = 10^5 \Omega$; $C = 0{,}1\ \mu$F.

14.10. Unui circuit format dintr'o inductanță L în serie cu o rezistență R i se aplică un impuls electric B_0 Vs.

Se cere să se determine forma curentului în funcție de timp.

14.11. Aceeași chestiune dar pentru un circuit fomat dintr'o capacitate C în serie cu o rezistență R.

14.12. Un condensator imperfect, având capacitatea C_1 este legat în serie cu un condensator perfect C_2; acestui circuit i se aplică o tensiune constantă U. Se cere să se determine tensiunea la bornele acestor condensatori şi să se construiască curbele reprezentative pentru cazul $C_1 = C_2$ şi $RC_1 = 10^{-3}$s.

14.13. O inductanță perfectă L este shuntată cu o rezistență R iar circuitul astfel obținut este legat în serie cu o rezistență inductivă de R ohmi şi L henry. Aplicând circuitului tensiunea constantă U, se cere să se determine regimul tranzitoriu al curenților în diversele elemente ale circuitului.

14.14. Un cuadripol în T având impedanțele serie $R_1 = 4\ \Omega$ şi $R_3 = 8\ \Omega$ şi impedanța derivație $X_2 = \omega L_2 = 0{,}1\ \Omega$, are la bornele sale de ieşire legată impedanța $X_3 = \omega L_3 = 0{,}2\ \omega\ \Omega$, ω fiind o pulsație oarecare. Se aplică la bornele de intrare tensiunea constantă $U = 120$ V. Se cere să se determine:

(*a*) regimul tranzitoriu al curenților.

(*b*) timpul după care curentul în impedanța X_3 este maxim şi valoarea acestui maxim.

(*c*) Energia disipată sub formă de căldură în impedanța R_3.

14.15. Se cere să se determine curenții şi tensiunile la bornele condensatorilor circuitului din fig. 14.15 după deschiderea întrerupătorului.

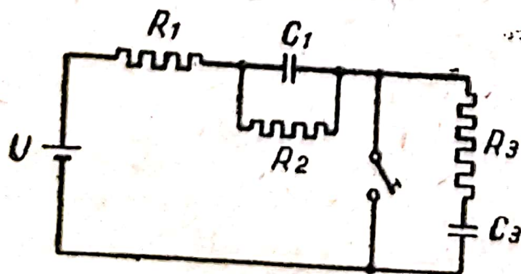


Fig. 14. 15

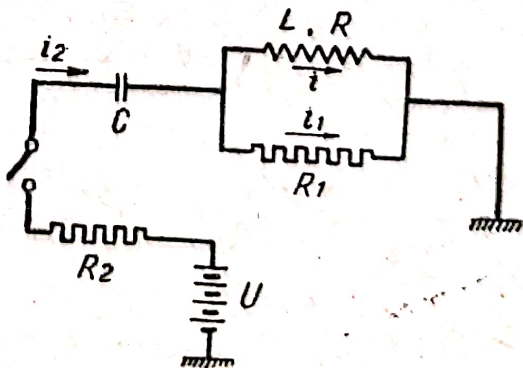


Fig. 14.16

Aplicație: $U = 120$ V; $R_1 = R_2 = 10\,\Omega$; $R_3 = 30\,\Omega$; $C_1 = 1000\,\mu$F; $C_2 = 2000\,\mu$F.

14.16. Să se determine curenții din circuitul dat în fig. 14.16 în momentul închiderii întrerupătorului.

Aplicație: $U = 80$ V; $R = 100\,\Omega$; $C = 2\,\mu$F; $L = 3$H; $R_1 = 250\,\Omega$; $R_2 = 800\,\Omega$.

14.17. Unui circuit format dintr'un condensator C șuntat cu o rezistență R_2 și legat în serie cu rezistența R_1 i se aplică tensiunea alternativă

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi).$$

Se cere să se determine curenții din circuit și tensiunea la bornele condensatorului.

14.18. Aceeași chestiune pentru un circuit ca precedentul în care capacitatea este înlocuită cu o inductanță L.

Aplicație: $R_1 = 100\,\Omega$; $R_2 = 250\,\Omega$; $L = 1$ H; $U = 120$ V; $f = 50$ Hz.
Pentru ce valoare a lui ψ se stabilește dintr'odată regimul permanent?

14.19. Unui circuit format dintr'o capacitate în paralel cu o inductanță și legat în serie cu o rezistență, i se aplică tensiunea alternativă $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$.

Se cere să se determine curentul total debitat de sursă și tensiunea la bornele condensatorului.

Aplicație: $U\sqrt{2} = 500$ V; $R = 50\,\Omega$; $L = 0{,}3$ H; $C = 100\,\mu$F; $f = 50$ Hz.

14.20. Două circuite cuplate magnetic au respectiv rezistențe.e R_1 și R_2, inductanțele L_1 și L_2 și inductanța mutuală M. Circuitul primar este alimentat de o sursă de tensiune constantă E. Circuitul secundar este închis pe o rezistență, a cărei valoare este cuprinsă în rezistența R_2. Se cere să se determine expresia curenților în cele două circuite la închiderea circuitului primar, în ipoteza unui cuplaj magnetic perfect, fără dispersiuni ($L_1L_2 - M^2 = 0$). Se presupune că în momentul inițial curenții din circuite sunt nuli. Să se explice rezultatul.

14.21. Un transformator fără fier are caracteristicile electrice $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $L_1 = 0{,}2$ H, $L_2 = 0{,}1$ H. Infășurarea secundară este închisă pe o rezistență a cărei valoare este cuprinsă în rezistența înfășurării secundare. Se aplică transformatorului o tensiune constantă $U = 100$ V. Dacă coeficientul de cuplaj al înfășurărilor transformatorului este $K = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$, se cere să se determine:

(*a*) Expresia curenților în cele două înfășurări în cazul unui cuplaj perfect fără dispersiuni ($K = 1$) și în cazul când se ține seama de dispersiunni ($K = 0{,}8$).

(*b*) Energia disipată în circuitul secundar, în ambele cazuri.

14.22. Impedanța unui dipol este formată din o inductanță perfectă L shuntată cu o rezistență R_1 în serie cu un condensator imperfect C având conductanța G_2. Dipolul este legat în scurtcircuit la extremitatea sa. La bornele dipolului se aplică tensiunea $u = U\ (1-\varepsilon^{-\alpha t})$

Se cere să se determine curentul de încărcare al condensatorului presupunând că acesta a fost complet descărcat în momentul inițial.

Aplicație numerică: $L = 0.2$ H, $R_1 = 100\ \Omega$, $C = 50\ \mu$F, $G = 5 \cdot 10^{-3}$ S, $U = 100$ V, $1/\alpha = 5$ s.

14.23. Fie două circuite oscilante identice, formate dintr'un condensator C în serie cu o inductanță L, cuplate între ele prin condensatorul Γ (fig. 14.23). Sistemul este presupus inițial în repaus.

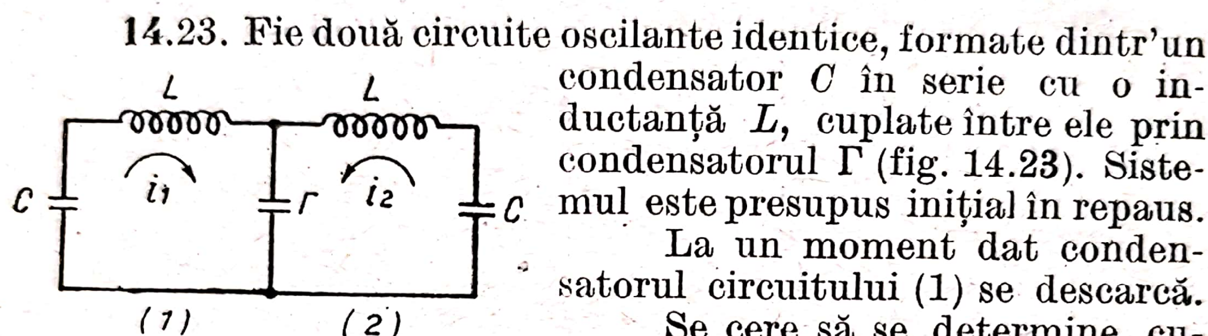


Fig. 14.23

La un moment dat condensatorul circuitului (1) se descarcă.

Se cere să se determine curenții care circulă în cele două circuite oscilante.

14.24. O bobină (r, L) este conectată la o baterie de acumulatori prin intermediul întrerupătorului k (fig. 14.24). Pentru ca tensiunea U_k la contactele întrerupătorului k, la deschiderea acestuia, să nu depășească tensiunea U_b a bateriei de acumulatori, contactele k ale întrerupătorului sunt șuntate prin circuitul de amortizare (R, C).

Să se determine condițiile pe care trebue să le îndeplinească parametrii r, R, L și C

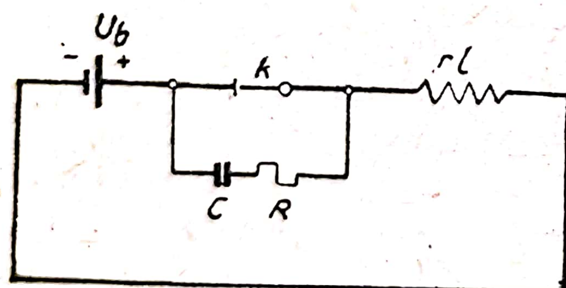


Fig. 14.24

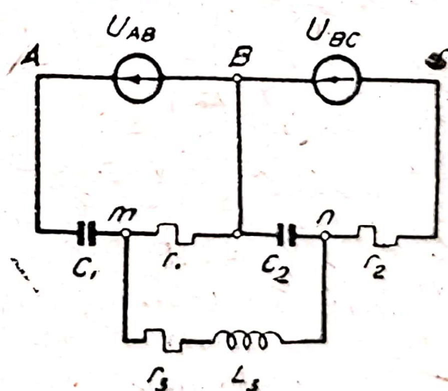


Fig. 14.25

pentru a fi satisfăcută condiția $U_k = U_b$.

14.25. Intr'o rețea trifazată $(A\ B\ C)$ este conectat un filtru de tensiune de succesiune inversă (fig. 14.25). Tensiunile aplicate filtrului, U_{AB} și U_{BC}, variază în timp și se presupune

Scanned with OKEN Scanner

că, la un anumit timp, considerat momentul inițial ($t = 0$), ele urmează o anumită lege.

Intre punctele m și n de ieșire ale filtrului se conectează un releu.

Se cere să se scrie expresia generală operațională a tensiunii la bornele releului și a curentului ce-l străbate.

14.26. Releul din problema precedentă fiind deconectat ($r_3 = \infty$), se cere să se determine tensiunea la bornele m și n ale filtrului în cazul unui scurtcircuit trifazat franc la bornele ABC de intrare ale filtrului.

Să se determine valorile acestei tensiuni pentru $t = 0$ s; $t = 0{,}01$ s; $t = 0{,}02$ s din momentul producerii scurtcircuitului, știind că tensiunea rețelei este de 58 V, 50 Hz.

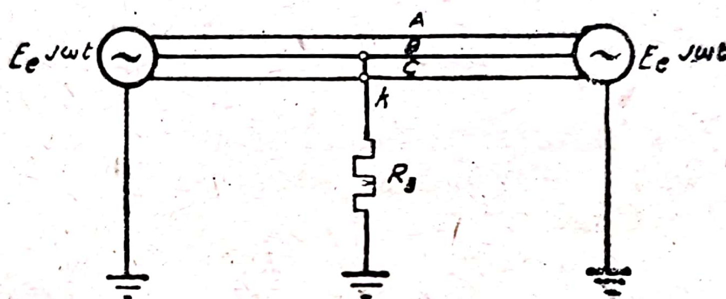


Fig. 14.27

Elementele filtrului satisfac condițiile

$$\frac{\frac{1}{\omega C_1}}{r_1} = \frac{r_2}{\frac{1}{\omega C_2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14.27. Fiind dată o linie trifazată (fig. 14.27), se cere să se studieze fenomenul tranzitoriu în cazul unui scurtcircuit bifazat, cu punere la pământ. In calcule se va considera sursa infinită.

14.28. Intr'o rețea trifazată, alimentată la borne cu un sistem simetric de tensiuni, având valorile eficace $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U$ și un defazaj constant ψ, se cuplează un motor asincron, simetric, având înfășurarea legată în stea.

Dacă rezistența și inductanța fiecărei faze a motorului sunt egale cu R și L, se cere să se determine expresia curenților i_a, i_b, i_c.

14.29. La aceiași rețea simetrică se leagă receptorul nesimetric format dintr'o rezistență, o reactanță inductivă și o reactanță capacitivă legate în stea.

Ştiind că $L\omega = \frac{1}{C\omega} = \frac{R}{\sqrt{3}}$, se cere să se determine curenţii absorbiţi de sarcină.

14.30. Să se scrie imaginea funcţiei de tensiune din fig. 14.30. In particular se va examina cazul când la timpuri egale se produc salturi egale.

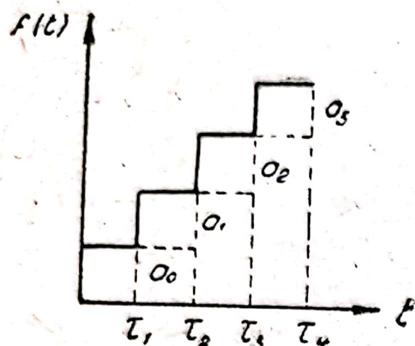


Fig. 14.30

14.31. Să se exprime o tensiune trapezoidală fără şi cu ajutorul funcţiei impuls.

14.32. Se dă un galvanometru cu cadru mobil, având un moment de inerţie K, prevăzut cu un resort antagonist având coeficientul de elasticitate B, sistemul fiind cu frecări mecanice caracterizate prin coeficientul A. Cadrul mobil are o rezistenţă R şi o inductanţă L; el se mişcă între polii unui magnet permanent pruducând un câmp de inducţie magnetică B_0 constant. Acest galvanometru este făcut balistic prin legarea la borne a unui condensator de capacitate C.

Se cere să se determine funcţionarea acestui galvanometru.

Se presupune că $\Phi_0 = C^t$ pentru toate regimurile de funcţionare.

14.33. Două galvanometre, cu cadru mobil, identice, sunt legate între ele, bornă cu bornă. Primul galvanometru este deviat dela poziţia lui de echilibru cu un unghi α_0 şi apoi este lăsat să oscileze liber. Presupunând că ambele galvanometre erau în repaus la momentul iniţial, se cere să se determine:

(a) Mişcarea celor două cadre mobile.

(b) Intensitatea curentului din galvanometre.

(c) Ce se întâmplă dacă în momentul iniţial cadrele ambelor galvanometre sunt deviate cu acelaşi unghi α_0, în acelaşi sens sau în sensuri contrarii?

Se va neglija inductanţa proprie a circuitului.

14.34. O bară grea AB, de lungime l şi masă m este aşezată perpendicular pe două şine de lungime infinită şi supusă unei mişcări uniforme spre dreapta (fig. 14.34) într'un câmp de inducţie magnetică uniform perpendicular pe planul figurii. Cele două şine sunt legate la un capăt printr'o rezistenţă inductivă în paralel cu

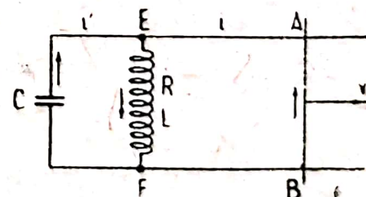


Fig. 14.34

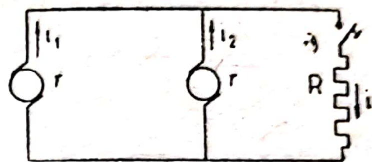
un condensator; toate celelalte rezistenţe ale circuitului se presupun neglijabile. Lăsând bara liberă se cere să se determine.

(*a*) mişcarea barei

(*b*) curenţii în diferitele părţi ale circuitului.

Se va examina cazul particular în care, energiile iniţiale conţinute în condensator, în inductanţă şi în bară sunt egale.

14.35. Două maşini de curent continuu, cu excitaţie constantă, sunt legate în opoziţie (fig. 14.35). Aceste maşini au amândouă aceiaşi rezistenţă interioară r însă momentele de inerţie ale indusurilor lor sunt diferite, J_1 şi J_2. Excitaţia acestor maşini fiind constantă, forţa electromotoare a lor este proporţională cu viteza unghiulară respectivă, coeficientul de proporţionalitate fiind acelaşi pentru ambele maşini. La un moment dat, maşinile având aceeaşi viteză ω_0 se leagă la bornele acestor maşini o rezistenţă exterioară R.



Fig, 14.35

Neglijând frecările mecanice şi fenomenele de inducţie, se cere să se determine:

(*a*) Variaţia vitezei celor două maşini în funcţie de timp.

(*b*) Expresia curenţilor din cele două maşini şi din rezistenţa exterioară.

Aplicaţie numerică: $J_1 = 30$ Ws³, $J_2 = 25$ Ws³, $r = 0{,}12\ \Omega$ $R = 10\ \Omega$, $n_0 = 600$ rot/mn, $U = 240$ V.

14.36. Un motor de curent continuu, cu excitaţia constantă este alimentat dela o baterie de acumulatori având tensiunea la borne egală cu U. Dacă R este rezistenţa totală a circuitului şi se neglijează toate pierderile mecanice, se cere să se determine:

(*a*) legea de mişcare a maşinei,

(*b*) intensitatea curentului,

(*c*) cantitatea de electricitate totală pusă în joc în sistem.

Pentru aplicaţie numerică se vor folosi datele numerice din problema precedentă.

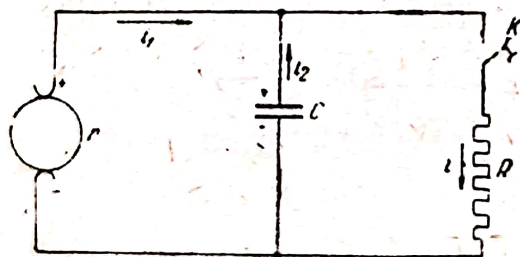


Fig. 14.37

14.37. O maşină de curent continuu, la care se neglijează toate pierderile mecanice, se roteşte cu o viteză ω_0 şi menţine la bornele sale o diferenţă de potenţial $k\omega_0$. Rezistenţa interioară a maşini este r. La bornele maşiniei este conectat un condensator de capacitate C (fig. 14.37).

La un moment dat se cuplează la bornele sistemului o rezistență R.

Se cere să se determine

(a) Curenții i_1 debitat de mașină, i_2 în condensator și i din rezistența R.

(b) Legea de descreștere a vitezei mașiniei.

(c) Bilanțul energetic al sistemului.

Aplicație numerică: $n_0 = 900$ rot/mn, $U_0 = 220$ V, $r = 0,1\ \Omega$, $C = 5\ \mu$F, $R = 10\,\Omega$, $J = 20$ Ws^3.

14.38. Aceiași chestiune ca și în cazul precedent cu deosebirea că rezistența R este legată în serie cu un condensator de capacitate $C_1 = 10\ \mu$F.

14.39. Un motor de curent continuu, de 24 kW și 240 V, funcționează cu excitație constantă și este legat la rețea fără reostat de pornire.

Viteza nominală a motorului este de 600 rot/mn; indusul are o rezistență de 0,12 Ω și o inductanță de $1 \cdot 10^{-3}$ H; momentul de inerție al părților în mișcare este de 20 Ws^3; reacțiunea indusului se neglijează.

Presupunând că se pornește motorul în gol și că se neglijează toate pierderile, se cere:

a) să se determine curentul de pornire și să se construiască curba reprezentativă;

b) care este expresia acestui curent dacă inductanța mașinii este de 0,05 H?

14.40. Motorul de acționare al unei mașini de extracție este alimentat dela un generator propriu și are excitația constantă. Cuplul static dat de sarcină este constant și egal cu 270 kNm. La un moment dat este necesar a se reduce viteza de regim permanent la jumătate. In acest scop se reduce tensiunea aplicată motorului dela valoarea U_n la valoarea $\frac{U_n}{2}$.

Admițând că cuplurile corespunzătoare pierderilor mecanice și în fier sunt constante și cuprinse în cuplul static dat, se cere să se determine regimul transitoriu al vitezei motorului și al curentului absorbit de acesta.

Datele mașiniei sunt: tensiunea nominală 600 V; rezistența indusului $8 \cdot 10^{-3}\ \Omega$; inductanța indusului $1,13 \cdot 10^{-3}$ H; momentul de inerție redus al maselor în mișcare (de rotație și translație) 2 MWs^3. Viteza de regim permanent 44 rot/mn. Căderea de tensiune în indus 3%.

14.41. La bornele unei linii lungi, în scurt circuit la cealaltă extremitate, se leagă, la timpul $t = 0$ un condensator încărcat de capacitate C_K.

Se cere să se determine tensiunea și curentul la capătu de alimentare al liniei.

Linia se presupune fără pierderi.

14.42. O linie lungă, de înaltă tensiune, care a funcționat în gol cu tensiunea U, este scurtcircuitată pentru a se putea lucra la schimbarea unor izolatori.

Se cere să se determine regimul de descărcare al liniei. Linia se presupune fără pierderi.

15. STUDIUL SISTEMELOR NELINEARE

15.1. Un tub electronic (diodă) are caracteristica $i = Au^{3/2}$. Se cere

(a) Rezistența statică, în funcție de curent sau de tensiune;

(b) Rezistența dinamică, în funcție de curent sau de tensiune.

(c) Dioda fiind montată în circuit în serie cu o rezistență R, să se determine relația între intensitatea curentului din circuit și tensiunea constantă U_0 de alimentare a circuitului.

15.2. O bobină cu miez de fier având $N = 500$ spire și o rezistență a bobinajului $R = 50\ \Omega$, se leagă la o baterie de acumulatori de 100 V. Curba de magnetizare poate fi reprezentată prin relația

$$\Phi = \alpha \ln\left(1 + \frac{i}{\beta}\right)$$

n care $\alpha = 9 \cdot 10^{-3}$ Wb și $\beta = 0{,}1$ A.

Se cere să se determine legea de stabilire a curentului.

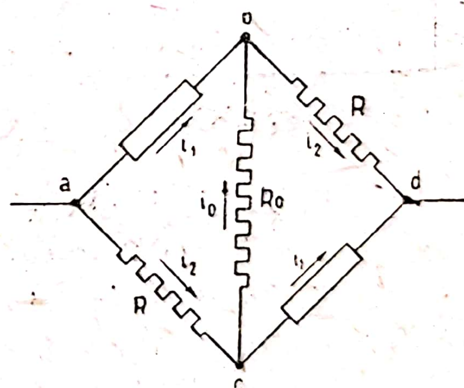


Fig. 15.3

15.3. In laturile ab și cd ale unei punți (fig. 15.3) sunt montate două elemente nelineare având caracteristica voltamper

$$u = \alpha\, i^{\beta} = 100\, i^{0,5}$$

In laturile ac și bd sunt montate rezistențele constante $R = 1000\ \Omega$, iar în diagonala bc este montată rezistența $R_0 = 250\ \Omega$.

Se cere:

(*a*) tensiunea u_0 cu care trebue alimentată diagonala *ad* pentruca curentul în rezistența R_0 să fie nul.

(*b*) Tensiunea u_0 cu care trebue să fie alimentată diagonala *ad* pentruca montajul să poată fi folosit ca stabilizator al curentului din rezistența R_0 (aceasta înseamnă că, pentru variații mici ale tensiunii u_0, curentul din rezistența R_0 rămâne practic constant).

15.4. O diodă, a cărei caracteristică volt-amper este

u	0	10	20	30	40	50	60	65	70	75	80
i	0	0,9	2,15	3,75	5,65	7,80	10,20	11,50	12,90	14,25	15,68

82,5	85	87,5	90	92	94	96	98	100	V
16,35	17,08	17,80	18,50	19,10	19,70	20,30	20,94	21,60	mA

este legată în serie cu un condensator având capacitatea C. Circuitul fiind alimentat cu o tensiune constantă $E = 100$ V, se cere să se determine curba de variație a curentului la închiderea întrerupătorului (fig. 15.4).

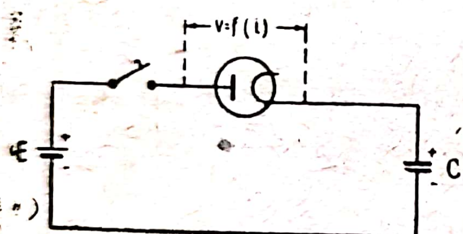


Fig. 15.4

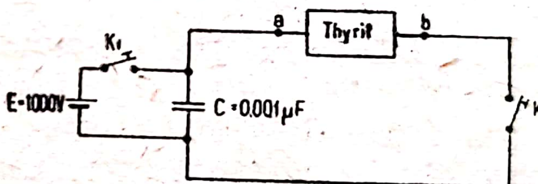


Fig. 15.6

15.5. Aceiași chestiune pentru cazul când dioda este legată în serie cu o inductanță.

15.6. Pentru studierea proprietăților thyritei se realizează un circuit format dintr'un condensator în serie cu materialul de încercat (fig. 15.6). Condensatorul C este încărcat de o sursă exterioară cu o tensiune de 1 000 V, care este apoi îndepărtată. Caracteristica thyritei este dată de relația:

$$v_{ab} = 580\, i^{0,28} \text{ V},$$

în care i este dat în amperi.

Se cere să se determine:

(*a*) curentul tranzitoriu din circuit ce se stabilește din momentul închiderii întrerupătorului K.

(b) timpul după care acest curent ajunge la 1/10 din valoarea inițială;

(c) să se compare cu caracteristica obținută în cazul când rezistența de thyrit este înlocuită cu o rezistență lineară de 145 Ω.

15.7. Un generator de curent continuu cu excitația în derivație (fig. 15.7a), are circuitul inductor shuntat cu o rezistență constantă din thyrit, a cărui caracteristică volt-amper este dată în figura 15.7b. Deschizându-se întrerupătorul K,

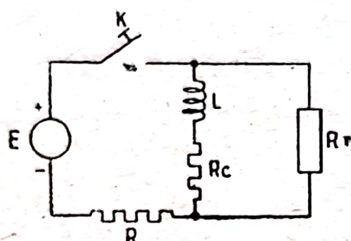


Fig. 15.7a

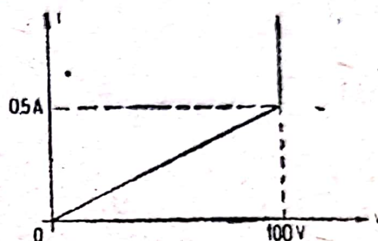


Fig. 15.7b

circuitul de excitație se descarcă în rezistența nelineară din thyrit R_T.

Presupunând că întrerupătorul K se deschide la momentul $t = 0$ și că nu se produce arc la bornele sale, se cere:

(a) Expresia curentului prin rezistența R_T în funcție de timp.

(b) Energia disipată în R_T.

Aplicație numerică: $E = 230$ V, $R = 100$ Ω, $R_0 = 60$ Ω, $L = 120$ H.

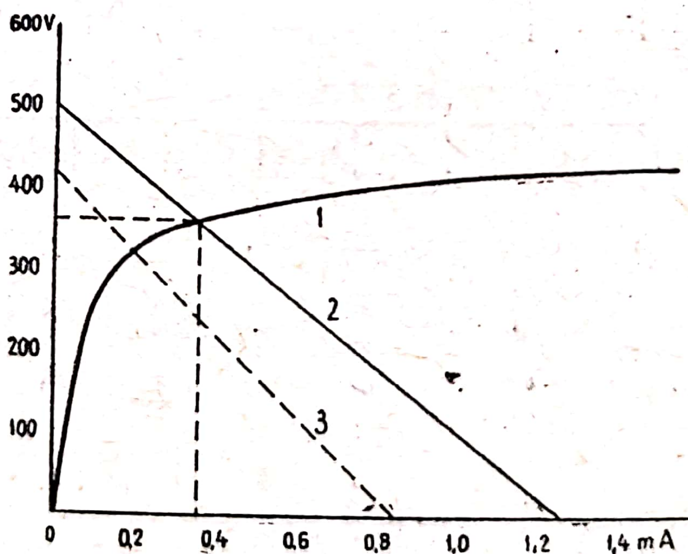


Fig. 15.8

15.8. Caracteristica volt-amper a unui tub tiratron este dată în figura 15.8. In serie cu acest element nelinear se montează o rezistență constantă $R = 0{,}4$ M Ω. Circuitul este montat la o sursă constantă $U_0 = 500$ V.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine intensitatea curentului din circuit și tensiunea la bornele celor două elemente.

Ce rezistență trebue montată în circuit pentruca intensitatea maximă a curentului să fie $i = 0{,}4$ mA?

15.9. Elementul neliniar din problema precedentă este montat în paralel cu o rezistență de 0,5 M Ω. Dacă curentul total absorbit de montaj este de 0,84 mA, se cere să se determine tensiunea la bornele sale.

15.10. Circuitul magnetic al unei transformator de 100 kVA are o lungime de 240 cm și secțiunea de 1800 cm². Infășurarea de înaltă tensiune are 1522 spire și funcționează la tensiunea de 60 kV, 50 Hz.

Se cere să se determine curentul de magnetizare a fierului în înfășurarea de înaltă tensiune la legarea bruscă a transformatorului la rețea în momentul când tensiunea are valoarea sa egală cu jumătate din valoarea maximă negativă și crește în sens negativ, tensiunea fiind sinusoidală.

Se presupune că secundarul transformatorului este deschis, iar pierderile magnetice prin scăpări de flux și pierderile ohmice în înfășurarea de înaltă tensiune sunt neglijabile. Caracteristica magnetică a fierului este dată în tabloul de mai jss.

B Wb/m²	0	0.10	0.25	0,50	0,60	0,75	1.00	1,25	1,40
H mOe	1620	1730	1790	2000	2240	3000	4600	11100	20800

B Wb/m²	1,40	1,25	1,00	0,90	0,75	0.60	0,50	0,25	0,10	0
H mOe	20800	11000	4400	3200	1850	1000	500	1020	–1550	–1620

prima dintre aceste linii referindu-se la ramura ascendentă a curbei de magnetizare, iar cea de a doua la ramura sa descendentă. Curba de magnetizare este simetrică față de axa abscizelor.

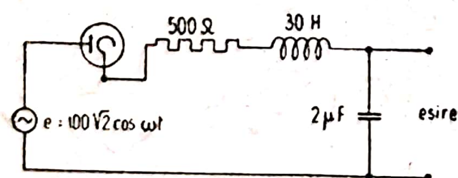


Fig. 15.11

15.11. Pentru redresarea unei tensiuni alternative de 100 V și 50 Hz se folosește un montaj cu o diodă și un filtru (fig. 15.11).

Presupunând că circuitul funcționează în gol la eșire și că tensiunea este aplicată brusc în momentul când valoarea sa este maximă iar polaritatea astfel încât dioda să conducă curentul, se cere să se determine forma tensiunii la bornele de eșire ale montajului pentru primele 2 perioade ale tensiunii

de alimentare. Se presupune că condensatorul este inițial descărcat.

Caracteristica diodei este aceia corespunzătoare problemei 15.4.

15.12. Circuitul din figura 15.12 este alimentat cu un curent constant de 0,2 A de generatorul de curent *I*. Redresorul cu cuproxid, a cărui caracteristică este

$$i = 10^{-4}\ u^{3/2}\ \text{A},$$

în care u este exprimat în volți, este shuntat cu o rezistență ohmică lineară R de 1 000 Ω.

Se cere să se determine:

(*a*) Intensitatea curenților care străbat redresorul și rezistesța.

(*b*) Dacă rezistența R este înlocuită cu un condensator de 1,0 μF, se cere să se determine tensiunea la bornele redresorului după 10^{-3} s dela închiderea întrerupătorului K.

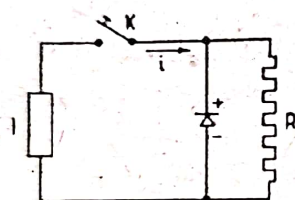


Fig. 15.12.

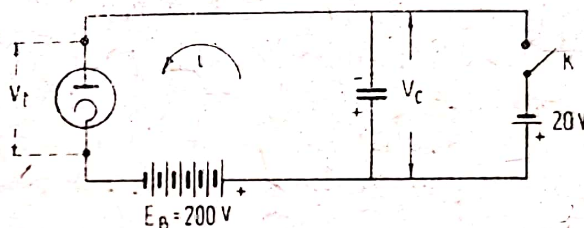


Fig. 15.13.

15.13. Condensatorul C este încărcat prin rezistența nelineară R (un tub electronic) în timp ce întrerupătorul K (o lampă cu neon) este deschis (fig. 15.13). In momentul când tensiunea la bornele condensatorului a atins tensiunea de 120 V întrerupătorul K este închis brusc și condensatorul se descarcă până la tensiunea de 20 V într'un timp de $1{,}0 \times 10^{-5}$ s. In acest moment întrerupătorul K se deschide și operația începe din nou.

Cunoscând caracteristica tubului electronic și știind că valoarea capacității C este de 5.10^{-9} F, se cere să se determine frecvența de oscilație a montajului.

Caracteristica tubului electronic este

V_t	200	190	180	170	160	150	140	130	120	110
i	18,8	17,1	15,4	13,8	12,2	10,7	9,3	7,9	6,6	5,3

100	90	80	70	60	50	40	V
1,2	3,2	2,2	1,4	0,8	0,4	0,05	mA

Nota. Acest montaj se folosește fie ca generator de oscilație fie ca circuit de baleiaj la un oscilagraf catodic. Bateria de 20 V din schemă indică tensiunea reziduală a condensatorului.

15.14. In circuitul din figura 15.14, L reprezintă inductanța bobinei unui releu, a cărui rezistență poate fi neglijată. In momentul când curentul din bobinajul releului a atins valoarea de 20 mA, armătura releului este atrasă; când curentul a scăzut la 10 mA, armătura este readusă în poziție inițială de elementul mecanic al releului.

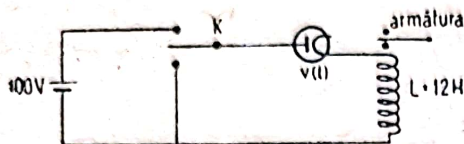


Fig. 15.14.

Dacă se neglijează timpul în care se deplasează armătura, se cere să se determine frecvența la care lucrează releul știind că rezistența neliniară, legată în serie cu bobina releului, este alternativ conectată, prin intermediul întrerupătorului K, la o sursă constantă de energie electrică de 100 V și apoi scurtcircuitată, fără a se întrerupe circuitul.

Caracteristica volt-amper a circuitului poate fi exprimată prin relația

$$i = 22 \times 10^{-6}\, u^{1,5} \text{ A}$$

15.15. Un circuit electric este constituit dintr'o rezistență, a cărei valoare variază invers proporțional cu rădăcina pătrată a curentului, în serie cu o inductanță constantă. Acestui circuit i se aplică o tensiune perfect sinusoidală.

Se cere să se stabilească regimul de funcționare a circuitului, presupunându-se că în momentul inițial nu există nici un curent în circuit.

15.16. Se cere să se determine variația tensiunii la bornele întrerupătorului K din problema 13.43, presupunând că rezistența arcului variază liniar cu timpul.

15.17. In circuitul din figura 15.17 cele două diode redresoare sunt identice și au aceiași caracteristică volt-amper cu dioda considerată în problema 15.4. Se cere:

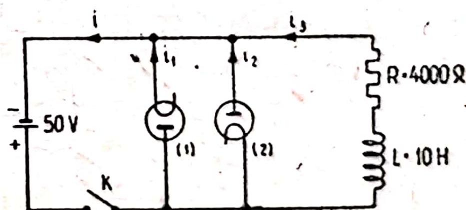


Fig. 15,17.

(*a*) Intensitatea curenților i, i_1, i_2, i_3 după închiderea întrerupătorului K. Se presupune că înainte de acest moment nu a existat niciun curent în circuit.

(*b*) După ce s'a stabilit regimul permanent în circuit, în urma închiderii întrerupătorului K, acesta se deschide brusc. Să se determine curentul tranzitoriu din inductanța L. După cât timp valoarea curentului i_3 este egală cu jumătate din valoarea pe care a avut-o înainte de deschiderea întrerupătorului K?

15.18. Pentru redresarea ambelor alternanțe ale unui curent alternativ cu ajutorul diodelor se utilizează circuitul

dat în fig. 15.18. Diodele au caracteristicile identice cu ale diodei din problema 15.4. Se cere să se determine:

(*a*) Curentul i_L din inductanță, în funcție de timp, după închiderea întrerupătorului *K* până în momentul când intră în funcție a doua diodă.

(*b*) Prima diodă este gata să funcționeze în momentul în care a doua diodă încetează de a mai funcționa?

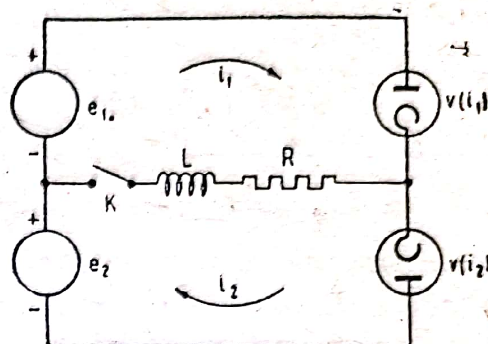


Fig. 15.18.

15.19. Deschiderea circuitelor inductive în curent continuu pune adesea probleme dificile în ceeace privește stingerea arcului ce ia naștere între contactele întrerupătorului. In studiile ce se fac în problemele asupra întrerupătoarelor corespunzătoare, se face adesea ipoteza că contactele se desfac instantaneu la deschiderea lor maximă. Aceasta conduce la a admite că arcul are o lungime constantă și deci să fie considerat ca o rezistență neliniară simplă în loc a fi considerat ca o rezistență neliniară variabilă în timp. Neglijându-se alte efecte ale arcului, ca spre exemplu schimbul de căldură, caracteristica volt-amper a unui arc de întrerupere în aer a unui întrerupător este dată în următorul tablou

U	230	175	146	113	94,8	81,6
I	0	0,25	0,50	1,00	1,50	2,0

72,4	65,5	58,6	52,9	47,1	41,4	V
2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	A

Un asemenea întrerupător este folosit pentru întreruperea circuitului inductor al unui generator, la care tensiunea de alimentare este de 115 V curent continuu, și având $R = 50\ \Omega$ și $L = 26{,}6$ H.

Se cere să se determine în aceste condiții:

(*a*) Timpul necesar pentru a se deschide circuitul.

(*b*) Energia disipată în aer.

(*c*) Tensiunea la bornele rezistenței inductive a inductorului (*R* și *L* în serie) în timpul cât durează arcul.

(*d*) Există vreo condiție care trebuie impusă lui *R* pentruca întrerupătorul să poată întrerupe circuitul?

15.20. Pentru a ușura întreruperea circuitelor inductive, ca acelea din cazul problemei precedente, întrerupătorul este astfel construit că el introduce o rezistență ohmică în paralel

Scanned with OKEN Scanner

cu circuitul, imediat înainte de a se produce întreruperea. Pentru cazul unui circuit inductor, această rezistență se numește rezistența de descărcare a câmpului.

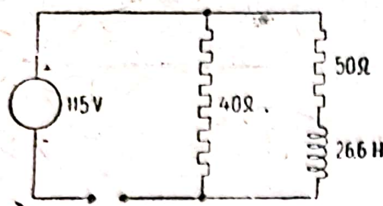


Fig. 15.20

Dacă, în cazul problemei 15.19 se așează în paralel cu circuitul inductor o rezistență ohmică de 40 Ω, imediat înaintea deschiderii întrerupătorului (fig. 15.20), se cere să se determine și în acest caz

(*a*) Timpul necesar întreruperii circuitului.

(*b*) Energia disipată în arc.

(*c*) Tensiunea la bornele rezistenței inductive a circuitului în timpul cât durează arcul.

15.21. Fiind dat un generator de curent continuu cu excitație serie și cunoscând caracteristicile circuitului exterior (rezistența și inductanța) se cer condițiile de amorsare ale acestui generator.

15.22. Un generator cu excitație în derivație debitează pe un circuit exterior de rezistență R. Dacă ρ, r sunt respectiv rezistențele indusului și inductorului, L inductanța acestuia și n viteza de rotație, se cere să se determine condițiile de amorsare ale generatorului.

15.23. Ecuația caracteristică a unui sistem de reglaj automat este

$$(1 + p\,T_1)\,(1 + p\,T_2)\,(1 + p\,T_3) + K_1 K_2 K_3 = 0$$

în care $T_1 = T_2 = 0{,}05$ s și $T_3 = 0{,}5$ s sunt constantele de timp ale elementelor de reglaj, iar $(K_1\,K_2\,K_2)$ reprezintă factorul total de amplificare al sistemului.

Se cere să se determine valoarea factorului de amplificare pentruca sistemul să fie la limita de stabilitate.

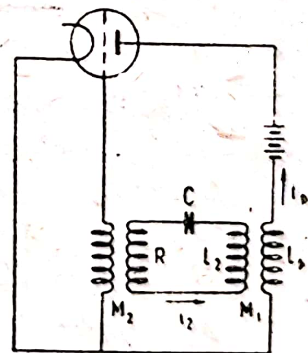


Fig. 15.42

15.24. Pentru producerea oscilațiilor auto-întrețiente cu ajutorul unei triode se efectuiază un montaj analog cu acel dat în figura 15.24.

Caracteristica volt-amper a triodei poate fi exprimată prin relația

$$\rho i = u + K v$$

în care i este curentul de placă, u tensiunea anodică, v potențialul grilei, ρ rezistența internă a tubului și K o constantă numită coeficientul de amplificare în volți.

Se cere să se determine valoarea inductanței mutuale M_2 pentruca circuitul să producă oscilații auto-întreținute.

PARTEA V

UTILIZAREA CALCULULUI MATRICIAL ÎN ELECTROTEHNICĂ

16. CALCULUL MATRICIAL GENERAL

16.1. Se dau matricele

$$\|e\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{Vmatrix}, \quad \|i\| = \begin{Vmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}, \quad \|A\| = \begin{Vmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 3 & 8 & 9 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{Vmatrix}$$

Să se calculeze : a) $\|e\| + \|i\|$; b) $\|e\| \cdot \|i\|$; c) $\|e_t\| \cdot \|i\|$; d) $\|e\| \cdot \|i\|_t$; e) $\|e\| \cdot \|A\|$; f) $\|e\| \cdot \|A\| \cdot \|i\|$; g) $\|e\|_t \cdot \|A\|$.

16.2. Se dă matricea

$$\|C\| = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{Vmatrix}$$

Să se calculeze a) $\|C\|^{-1}$; b) $\|C\|^{-1} \cdot \|C\|$.

Scanned with OKEN Scanner

16.3. Se dă sistemul de ecuații matriciale:

$$\|e_1\| = \|Z_1\| \cdot \|i_1\| + \|Z_2\| \cdot \|i_2\| + \|Z_3\| \cdot \|i_3\|$$
$$\|e_2\| = \|Z_4\| \cdot \|i_1\| + \|Z_5\| \cdot \|i_2\| + \|Z_6\| \cdot \|i_3\|$$
$$\|e_3\| = \|Z_7\| \cdot \|i_1\| + \|Z_8\| \cdot \|i_2\| + \|Z_9\| \cdot \|i_3\|$$

Să se elimine $\|i_3\|$ din ultima ecuație, pentru a se obține un sistem de două ecuații.

16.4. Se dau matricele:

$\|A\| =$

2	3	0
−1	4	−2
0	−3	1

$\|B\| =$

−1	2	1
−3	4	2
2	0	7

Să se calculeze a) $\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|$; b) $\|Z_2\| \cdot \|Z_1\|$; c) $\|Z_1\|_t \cdot \|Z_2\|$; d) $\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|_t$; în care:

$\|Z_1\| =$

$\|A\|$		$\|B\|$
	$\|B\|_t$	
$\|B\|$		$\|A\|_t$

$\|Z_2\| =$

$\|A\|_t$	
	$\|B\|$
$\|B\|$	$\|A\|$

16.5. Se dă ecuația matricială:

$$\begin{Vmatrix} e \\ \\ \\ \\ \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ F & G & H & J \\ K & L & M & N \\ P & Q & R & S \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \end{Vmatrix}$$

Se cere să se rezolve această ecuație eliminându-se una câte una necunoscutele.

16.6. Se dă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} x + y + z + u + v &= 3 \\ x + 2y + 2z + 3u + 4v &= 9 \\ 2x + y - 2z + 2u - 3v &= 16 \\ 3x + 2y + 3z + 4u + v &= 2 \\ -x + y - 4z + 4u + 2v &= -12 \end{aligned}$$

Să se determine numai necunoscutele x și y.

16.7. Aceeași chestiune pentru sistemul:

$$\begin{aligned} 2 &= 3x + 4y - 2z + 6u - v \\ 0 &= 2y + 7u \\ -3 &= x - y + z + v \\ 0 &= x + z + 3u \\ 1 &= 3y - z + + 2v \end{aligned}$$

16.8. Să se diferențieze matricele în raport cu variabila independentă:

a)

1	0	0
0	eos θ	– sin θ
0	sin θ	cos θ

b)

1	cos ω t	1
sin ω t	1	sin ω t
1	cos ω t	1

16.9. Să se deriveze matricea:

$\| e \| =$

a	b	c
cos x_m	2	sin x_k

în raport cu matricea:

$\| x \| =$

m	x_m
n	x_n
k	x_k

16.10. Să se integreze matricele:

a)

2	sin θ	cos θ

b)

	cos ω t
1	sin ω t

16.11. Să se integreze matricea:

$\|A\| =$

a	b	c
$\cos x_a$	3	$\sin x_c$

în raport cu matricea:

$\|dx\| =$

a	dx_a
b	dx_b
c	dx_c

16.12. Aceeaşi chestiune pentru matricea:

$\|B\| =$

	a	b	c
m	$\cos \omega x_a$		$\cos \omega x_c$
n	1	$\sin \omega x_b$	2

16.13. Să se scrie conjugatele matricelor:

a) $\|e\| =$

e_1
$e_2 - je_3$

; b) $\|e\| =$

$\varepsilon^{j\theta}$	
	$\varepsilon^{-j\theta}$

c) $\|Z\| =$

$p - jp\theta$	$Z\varepsilon^{j\alpha}$
Z	$p + jp\theta$

16.14. Se dă matricea:

		h	d	i
$\|\| C \|\| =$	a	1	1	1
	b	1	a^2	a
	c	1	a	a^2

în care $a = 1\,\underline{|120^0}$. Să se calculeze: a) $\|C\|^{-1}$; b) $\|C_t\|^{-1}$; c) $\|C\|^*$; d) $\|C_t\|^*$; e) $\|C^*\|^{-1}$; f) $\|C_t^*\|^{-1}$.

16.15. Să se deducă printr'un calcul direct, regula de stabilire a inversei unei matrice date.

17. STUDIUL REŢELELOR ELECTRICE

17.1. Fiind dată reţeaua din fig. 17.1, se cere să se calculeze $\|C\|$, $\|e'\|$ şi $\|Z'\|$ ale acestei reţele.

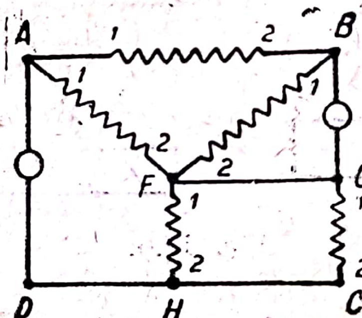


Fig. 17.1

17.2. Aceeaşi chestiune pentru reţeaua din fig. 17.2.

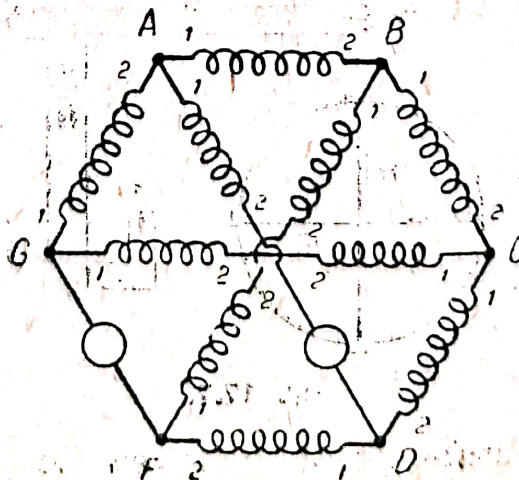


Fig. 17.2

Scanned with OKEN Scanner

17.3. Se cere să se determine ecuația de legătură dintre curenți a circuitului din figura 17.3.

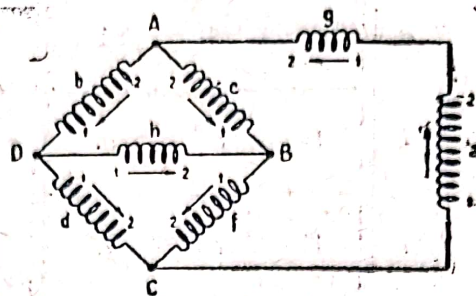


Fig. 17.3.

17.4. Să se scrie ecuația de legătură a curenților unui transformator cu cinci înfășurări și să i se determine matricea $\|C\|$.

17.5. Să se găsească matricele $\| C_1 \|$, $\| C_2 \|$ și $\| C \|$ ale unui transformator trifazat simetric cu conexiunea stea-zig-zag.

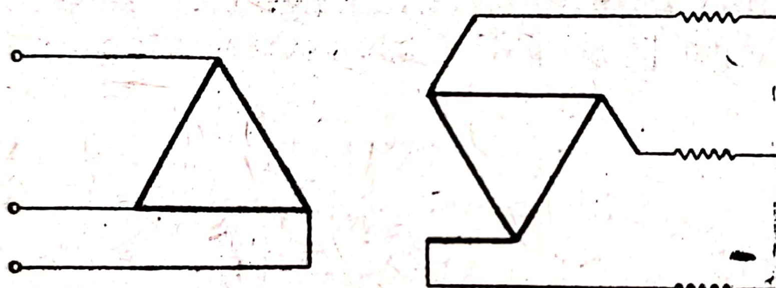


Fig. 17.6.

17.6. Să se stabilească matricea de conexiune pentru transformatorul având conexiunea dată în figura 17.6.

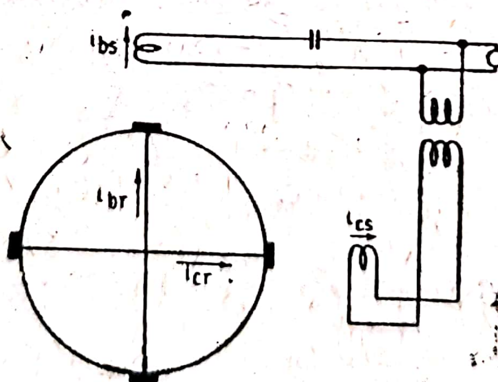


Fig. 17.7.

17.7. Să se stabilească matricea de conexiune a unui motor legat la o rețea electrică (fig. 17.7).

17.8. Se dă rețeaua în formă de punte (fig. 17.8) în care

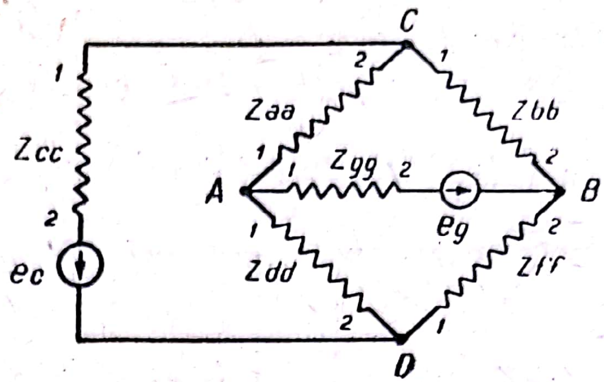


Fig. 17.8

avem inducție mutuală între $Z_{aa} - Z_{bb}$ și $Z_{dd} - Z_{ff}$.

Să se determine curenții în fiecare ramură și diferența de potențial la bornele fiecărui element.

Să se deducă apoi condiția de echilibru a punții Wheatstone.

17.9. Matricea de impedanță a mașinii din fig. 17.9 fiind

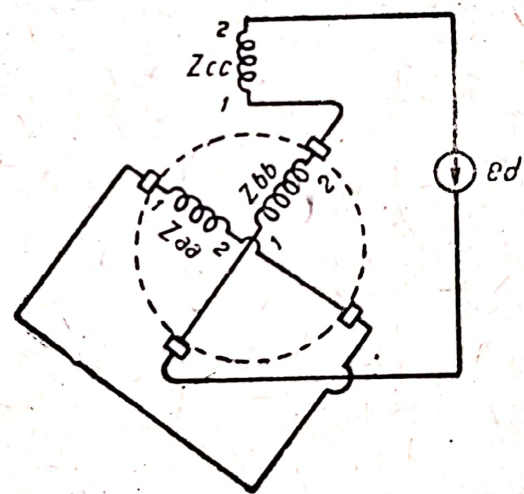


Fig. 17.9

$\| Z \| =$

	a	b	c
a	$R_a + pL_a$	$M_1 p \theta$	$pM_2 + M_3 p\theta$
b	$-M_3 p \theta$	$R_b + pL_b$	$pM_4 + M_5 p\theta$
c	pM_6	pM_7	$R_c + pL_c$

se cere : 1⁰) să se determine matricele $\| C \|$ și $\| Z' \|$.

2⁰) să se scrie cele două ecuații diferențiale de funcționare ale mașinii.

Scanned with OKEN Scanner

17.10. Se dă un cub cu muchiile formate din rezistențe egale cu 1 Ω fiecare. Se cere să se determine:

1⁰ Matricele $\| C \|$ și $\| Z' \|$.

2⁰ Impedanța echivalentă între două vârfuri oarecare ale cubului.

17.11. Să se determine matricea de conexiune care transformă rețeaua (*a*) în rețeaua (*b*) (fig. 17.11).

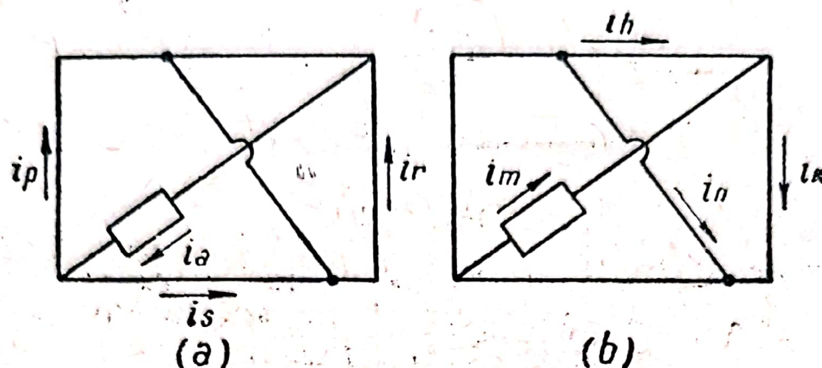


Fig. 17.11

17.12. Să se determine matricea de conexiune care transformă curenții reali din laturile rețelei (*a*) în curenții ciclici din laturile rețelei (*b*) (fig. 17.12).

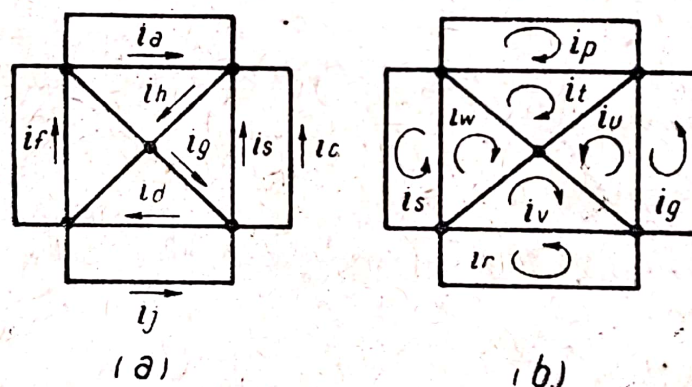


Fig. 17.12

17.13. Să se determine matricea de conexiune a rețelei

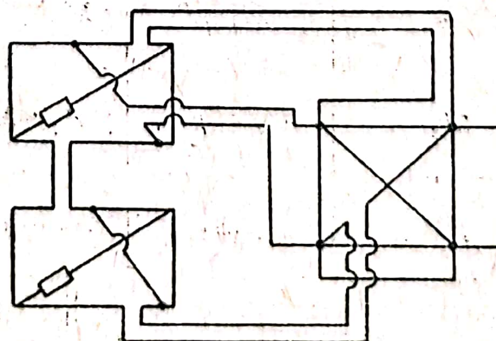


Fig. 17.13

Scanned with OKEN Scanner

interconectate formată din rețelele din figurile 17.11, *a* și *b*. și 17.12, *a*. (fig. 17.13).

17.14. Se dau următoarele mașini : *a*) un motor de repulsie având schema din fig. 17.14, *a*, și matricele

$$\| Z_1 \| = \begin{array}{c|c|c|} & s & r \\ \hline s & R_s + pL_s & M\cos\alpha\, p \\ \hline r & M(\cos\alpha\, p - \sin\alpha\, p\theta_1) & R_r + pL_r \\ \hline \end{array} \; ; \quad \| e_1 \| = \begin{array}{c|c|} \hline s & e_s \cdot 1 \\ \hline r & \\ \hline \end{array}$$

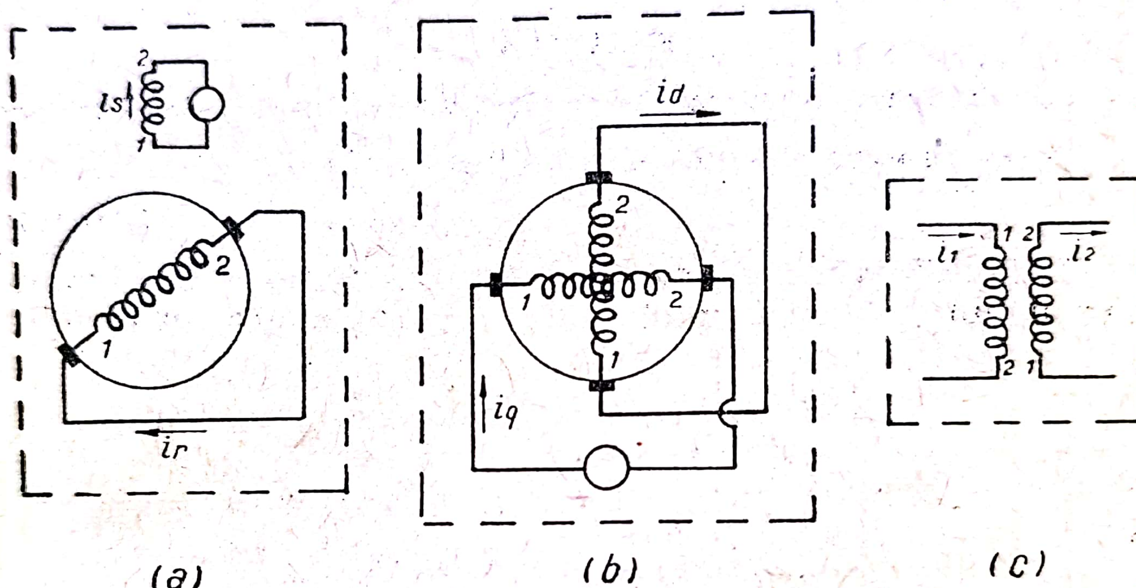


Fig. 17.14

b) un generator de curent alternativ, având schema din fig. 17.14, *b* și matricele

$$\| Z_2 \| = \begin{array}{c|c|c|} & d & q \\ \hline d & R + pL & Lp\theta \\ \hline q & -Lp\theta & R + pL \\ \hline \end{array} \; ; \quad \| e_2 \| = \begin{array}{c|c|} \hline d & \\ \hline q & e_q \cdot 1 \\ \hline \end{array}$$

c) un transformator, având schema din fig. 16.9, *c* și matricele

$$\| Z_3 \| = \begin{array}{c|c|c|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & R_1 + pL_1 & pM_{12} \\ \hline 2 & pM_{12} & R_2 + pL_2 \\ \hline \end{array} \; ; \quad \| e_3 \| = \begin{array}{c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine matricele de impedanță și tensiune ale complexului de mașini având schema dată în fig.

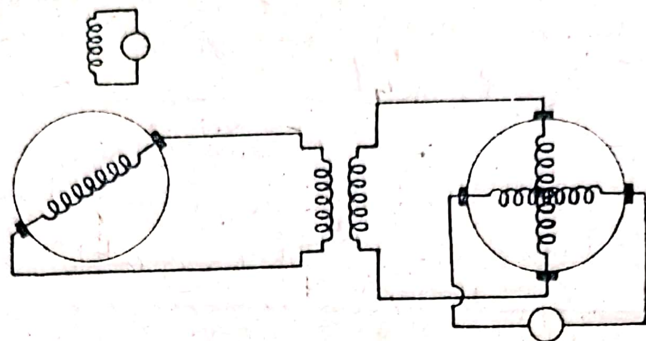


Fig. 17.14 d

17.14, *d*. In aceste expresii, p reprezintă simbolul de derivare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, 1 este funcția unitate și $p\theta$ viteza mașinii.

(IPB 1951)

17.15. Circuitul echivalent al unei triode poate fi reprezentat printr'un cuadripol simplu, de ex. un transformator fără fier

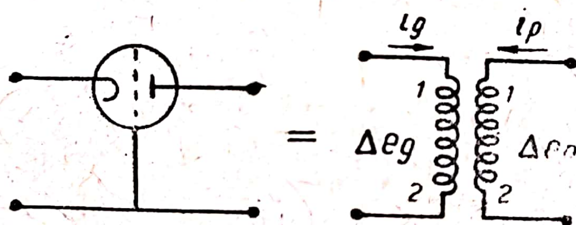


Fig. 17.15 a

(fig. 17.15, *a*). Dacă matricea de impedanță a unei asemenea triode este

$$\| Z \| = \frac{1}{1-\mu_g \mu_p}$$

	g	p
g	r_g	$-\mu_g r_p$
p	$-\mu_p r_g$	r_p

se cere să se determine matricea $\| Z' \|$ a montajului din fig. 17.15, *b*.

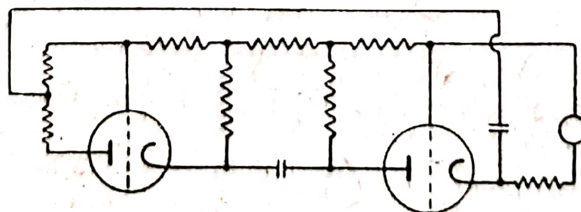


Fig. 17.15 b

Scanned with OKEN Scanner

17.16. Se dă rețeaua din fig. 17.16,

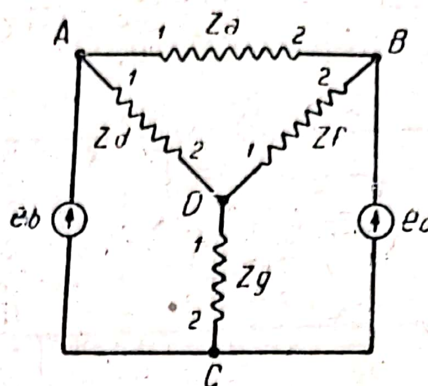


Fig. 17.16

în care $Z_a = 1\ \Omega$, $Z_d = 1{,}5\ \Omega$, $Z_f = Z_g = 2\ \Omega$, $e_b = 200$ V, $e_c = 100$ V.

Se cere să se determine, cu ajutorul calculului matricial, curenții din diversele ramuri și puterea absorbită de rețea. Cum se împarte această putere între cele două mașini? Să se explice rezultatul.

(IPB 1951)

17.17. Fie rețeaua din fig. 17.17, în care: $Z_a = 2\ \Omega$, $Z_b = 3\ \Omega$, $Z_c = 1\ \Omega$, $Z_d = 2\ \Omega$, $Z_f = 8\ \Omega$, $\overline{e}_d = 400 + j200$ V, $\overline{e}_f = 200 - j200$ V.

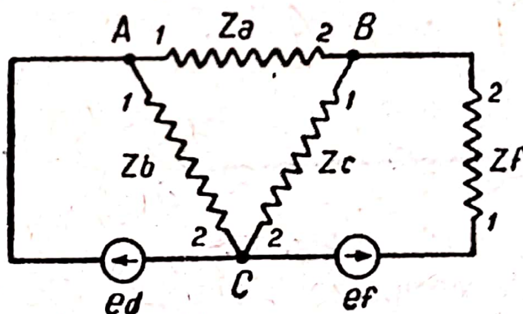


Fig. 17.17

Se cere să se determine:

a) curenții din diversele ramuri;
b) puterea absorbită de rețea; să se explice rezultatul;
c) diferența de potențial la bornele fiecărui element.

(IPB 1952)

17.18. Aceeași chestiune dar pentru rețeaua la care:

$Z_a = 1\Omega$, $Z_b = 2\Omega$; $Z_c = 5\ \Omega$, $Z_d = 6\ \Omega$, $Z_f = 2\ \Omega$, $\overline{e}_d = 220 - j220$ V, $\overline{e}_f = 220 + j110$ V.

(IPB 1952)

Scanned with OKEN Scanner

17.19. Fie rețeaua dată în fig. 17.19 în care $\bar{Z}_a = 3 + j4\ \Omega$; $\bar{Z}_b = 2 + j2\ \Omega$; $\bar{Z}_c = 1 - j3\ \Omega$; $\bar{Z}_f = 0 + j5\ \Omega$; $\bar{e}_d = 100 + j0$ V; $\bar{e}_f = 100 + j100$ V.

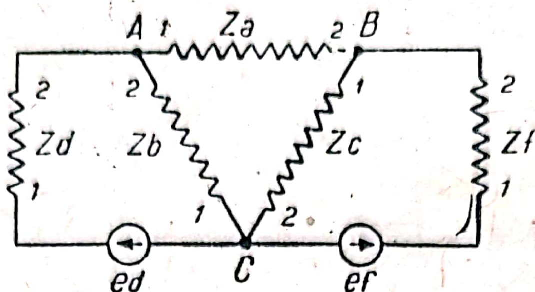


Fig. 17.19

Se cere să se determine:

a) ecuația de funcționare a rețelei în regim permanent;
b) curenții din diversele ramuri;
c) puterea absorbită în rețea.

17.20. Aceeași chestiune pentru rețeaua din fig. 17.20 în care $\bar{Z}_a = 2 + j3\ \Omega$; $\bar{Z}_b = 5 + j3\ \Omega$; $\bar{Z}_c = 1 - j2\ \Omega$, $\bar{Z}_d = 3\ \Omega$, $\bar{Z}_f = j5\ \Omega$, $e_g = 100$ V și $e_c = 220$ V.

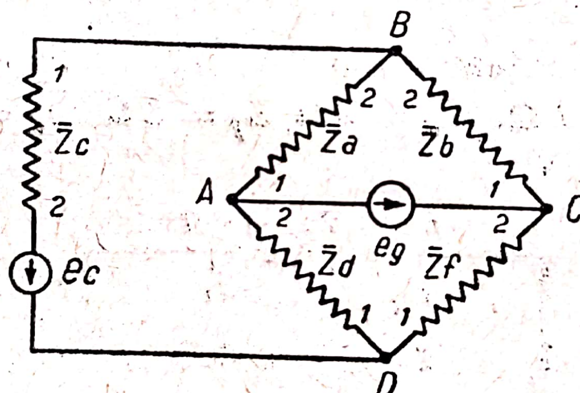


Fig. 17.20

17.21. Se interconectează rețelele din problemele precedente, obținându-se rețeaua din fig. 17.21.

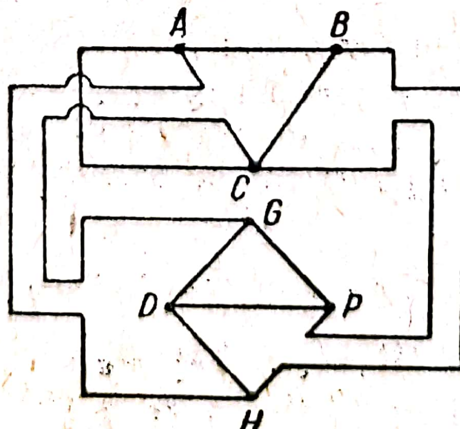


Fig. 17.21

Scanned with OKEN Scanner

Se cere să se determine ecuația de funcționare a noii rețele în regim permanent.

17.22. Un alternator, perfect simetric, funcționează în scurtcircuit între două faze și la pământ fără arc. Alternatorul are neutrul legat la pământ printr'o impedanță Z_g.

Cunoscându-se impedanțele sincronă, asincronă și de nul ale alternatorului, se cere să se determine curenții debitați de alternator și tensiunile pe fază în timpul funcționării pe defect.

Aplicație: $\varepsilon_s = 10\%$; $\varepsilon_a = 15\%$; $\varepsilon_0 = 5\%$; $U = 6$ kV; $S = 16$ MVA; $Z_0 = j\,15\,\Omega$.

17.23. Un alternator simetric, având tensiunea între faze de 10 kV, tensiunile de scurtcircuit $\varepsilon_s = 5\%$, $\varepsilon_a = 8\%$, $\varepsilon_0 = 3\%$ și puterea $S = 10$ MVA, alimentează o sarcină nesimetrică legată în stea, având impedanțele $Z_{aa} = j\,0{,}5\ \Omega$, $Z_{bb} = j1\ \Omega$, $Z_{cc} = j2\ \Omega$. La un moment dat se produce un scurtcircuit între fazele 2 și 3 ale sistemului.

Se cere să se determine curenții în circuit și forțele electromotoare ale sistemului.

17.24. Un alternator trifazat, simetric, având impedanțele $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$, $\overline{Z}_0$, are neutrul pus la pământ prin impedanța $\overline{Z}_g$ și alimentează o sarcină trifazată, izolată de pământ. Sarcina are impedanțele $\overline{Z}_d$ și $\overline{Z}_t$. La un moment dat apare între fazele 2 și 3 și la pământ un scurtcircuit fără arc electric.

Se cere să se determine curenții și tensiunile la alternator și sarcină ce apar în timpul scurtcircuitului.

Aplicație numerică: $S = 1$, $e = 1$, $\varepsilon_s = 12\%$, $\varepsilon_a = 15\%$, $\varepsilon_0 = 5\%$, $\overline{Z}_0 = j20$, $\overline{Z}_d = j35$, $\overline{Z}_t = j12$.

17.25. Un alternator simetric având impedanțele $\overline{Z}_s$, $\overline{Z}_a$, $\overline{Z}_0$, alimentează o sarcină echilibrată în triunghi, impedanța fiecărei faze fiind $\overline{Z}$. Dacă la un moment dat se produce un defect între două faze printr'o impedanță $\overline{Z}_A$, se cere să se determine curenții în fiecare element și tensiunile la bornele respective în timpul defectului.

17.26. Cunoscându-se matricele cuadripolilor serie și paralel, să se determine matricele cuadripolului din fig. 17.26.

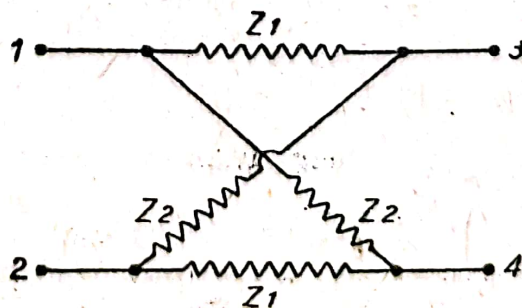


Fig. 17.26

17.27. Să se determine matricele unui transformator.

17.28. Aceiași chestiune pentru două transformatoare legate în cascadă.

17.29. Să se rezolve problema 5.35 cu ajutorul calculului matricial.

17.30. Idem problema 5.36.

17.31. Idem problema 5.37.

17.32. Un cuadripol simetric în T, shuntat cu o rezistență (fig. 17.32) are o impedanță de undă constantă și egală cu Z. Să se determine matricele acestui cuadripol.

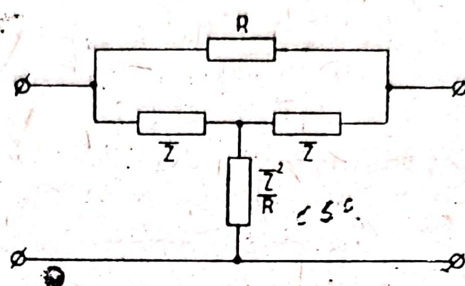


Fig. 17,32

17.33. Se dă rețeaua din figura 17.33. care poate fi considerată ca un cuadripol având bornele A și C de eșire și bornele E și F de intrare. Dacă prin bornele de intrare circulă curentul $I_2 = 5$ A și prin bornele de eșire circulă curentul $I_7 = 10$ A, se cere să se determine tensiunea la bornele de intrare și de eșire ale cuadripolului.

Se presupune că toate impedanțele circuitului sunt egale între ele și egale cu 1 Ω.

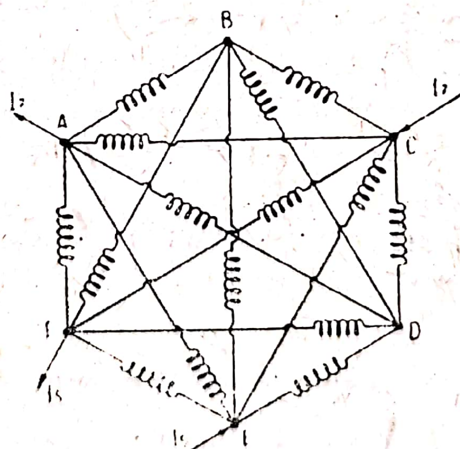


Fig. 17.33

17.34. Fiind dată o punte Wheatstone, se cere să se deducă cu ajutorul regulilor de calcul matricial, metoda de calcul a punții cu ajutorul circuitelor independente.

17.35. Se aplică buclei (*1*) a circuitului oscilant din fig. 17.35 o forță electromotoare unitate $e(t)$, caracterizată prin

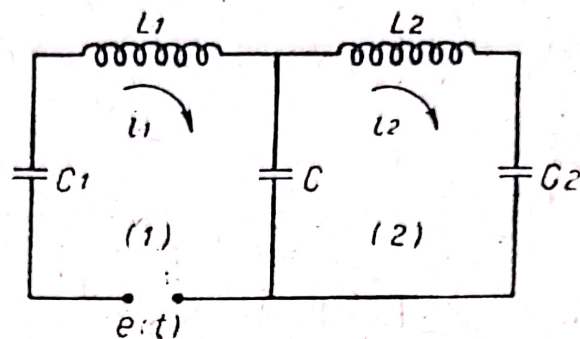


Fig. 17.35

următoarea lege

$$\text{pentru } t < 0, \qquad e(t) = 0$$
$$\text{pentru } t > 0, \qquad e(t) = E_0.$$

Să se determine curenții în cele două bucle știind că, la $t = 0$, atât curenții cât și sarcinile condensatorilor sunt nule.

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA I

1. *1*.1. Intr'un sistem de axe de coordonate ortogonal, pe abscisă se figurează partea reală a numărului complex, iar pe ordonată se figurează partea complexă a acestuia. Se ia aceeaşi scară pentru ambele mărimi şi se ţine seama de semnul lor. Se găseşte un vector în primul cadran, având modulul:

$$|V| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

şi care face cu axa absciselor unghiul φ dat de relaţia:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3} = 1,33\ldots \qquad \therefore \varphi = 53^0 08'$$

1.2. In cadranul 2, cu $|V| = 6,33$ şi $\varphi = 108^0 26'$.

1.3. Cadranul 3 cu $|V| = 4,123$ şi $\varphi = 194^0 = -166^0$.

1.4. Cadranul 4 cu $|V| = 2\sqrt{2}$ şi $\varphi = 315^0 = -45^0$.

1.5. Se ia ca origine de fază o axă orizontală. Direcţia vectorului căutat se determină construindu-se unghiul $\pi/5 = 36^0$ în sensul trigonometric (antiorar); pe această direcţie se ia, la scara aleasă, lungimea 4 reprezentând modulul vectorului. Se obţine un vector în cadranul I.

1.6. 0,2 rad. $= 11^0 46'$. Se ia modulul în direcţia opusă; se obţine un vector în cadranul III.

1.7. 14 rad $= 800^0 = 720^0 + 80^0$; se obţine un vector în primul cadran.

1.8. -1 rad $= -57^0 18'$; se obţine un vector în cadranul IV.

1.9. Se procedează ca şi în cazurile precedente (problema 1.5). Cadranul I.

1.10. Cadranul II.

1.11. Cadranul III.

1.12. Cadranul IV.

1.13. Cadranul III.

1.14. Cadranul IV.

1.15. Cadranul II.

1.16. Se aplică relaţiile:

$$|V| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$$

Se găseşte uşor: $5\,|\underline{53^0 08'}$; $6,325\,|\underline{108^0 26'}$; $4,123\,|\underline{194^0}$ sau $4,123\,|\underline{-166^0}$; $2\sqrt{2}\,|\underline{315^0} = 2\sqrt{2}\,|\underline{-45^0}$.

1.17. Pentru determinarea lui V se procedează ca în exercițiul precedent. Unghiul se exprimă deobicei în radiani; această valoare se găsește din tabele sau se calculează cu expresia:

$$\varphi \text{ rad} = \frac{\varphi^0}{180^0}\pi$$

Se găsește:

$$5\,\varepsilon^{j53^008'} = 5\,\varepsilon^{j,093};\ 6,325\,\varepsilon^{j108^026'} = 6,325\,\varepsilon^{j1,88};\ 4,123\,\varepsilon^{j\,194^0} = 4,123\,\varepsilon^{j3,39} =$$

$$= 4,123\,\varepsilon^{-j\,166^0} = 4,123\,\varepsilon^{-j\,2,897};\ 2\sqrt{2}\,\varepsilon^{j\,5,5} = 2\sqrt{2}\,\varepsilon^{-j\,0,786}.$$

1.18. Din relația:

$$V\,\varepsilon^{j\varphi} = V(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

se deduce $a = V\cos\varphi$ și $b = V\sin\varphi$. Se găsește: $3,24 + j\,2,35$; $-2,94 - j\,0,596$; $0,27 + j\,1,98$; $2,70 - j\,4,12$.

1.19. Din identitatea:

$$V\varepsilon^{j\varphi} = V\underline{|\varphi}$$

se găsește ușor:

$$4\,\underline{|\pi/5}\ ;\ -3\,\underline{|11^015'} = 3\,\underline{|191^015'};\ 2\,\underline{|800^0} = 2\,\underline{|80}\ ;\ 5\,\underline{|-57^019'}.$$

1.20. Pe baza relației:

$$V\,\underline{|\varphi} = V(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

se vor deduce ca mai sus a și b. Se găsește: $2,12 + j\,2,12$; $-4,59 + j\,6,15$; $-4,40 - j\,2,39$; $0,7 - j\,0,7$; $-1,41 - j\,1,41$; $1,50 - j\,2,60$; $-4,33 + j\,2,50$.

1.21. Se transformă unghiurile în radiani și se găsește:

$$3\,\varepsilon^{j\,0,784};\ 8\,\varepsilon^{j2,182};\ 5\,\varepsilon^{j\,3,64};\ 1\,\varepsilon^{j\,5,50};\ -2\,\varepsilon^{j\,0,784} = 2\,\varepsilon^{j\,3,926};$$

$$3\,\varepsilon^{-j\,1,047} = 3\,\varepsilon^{j\,5,24};\ -5\,\varepsilon^{-j\,0,524} = -5\,\varepsilon^{j\,5,75} = 5\varepsilon^{j\,8,892} = 5\,\varepsilon^{j\,2,608}.$$

Notă: Pentru a se schimba semnul modulului, se scade sau se adaugă argumentului un unghi de 180^0 sau π radiani. Pentru a se schimba semnul argumentului, se scade sau se adaugă un unghi de 360^0 sau $2\,\pi$ radiani.(Vezi exercițiile precedente).

1.22. Se scrie $\cos 2j = \dfrac{\varepsilon^{2j^2} + \varepsilon^{-2j^2}}{2} = \text{ch}2 = 3,762 + j0.$

1.23. $0 + j\,10,02.$

1.24. $0,543 + j0.$

1.25. $0 + j\,0,909.$

1.26. $3,762\,\underline{|0}$; $10,02\,\underline{|90^0}$; $1,543\,\underline{|0}$; $0,909\,\underline{|90^0}$.

1.27. Se desvoltă sinusul și ținând seama că $\cos jx = \text{ch}\,x$ și $\sin jx = j\,\text{sh}x$, se găsește $1,29 - j\,0,64 = 1,44\,\underline{|-26^020'}$.

1.28. $2,03 + j\,3,05 = 3,66\,\underline{|56^030'}$.

1.29. Se desvoltă sinusul hiperbolic și se ține seama că $\text{ch}\,jx = \cos x$ și $\text{sh}\,jx = j\sin x$; se găsește $4,21 - j\,9,16 = 10,08\cdot\underline{|294^040'}$.

1.30. $20,68 - j74,23 = 61,95 \underline{|285^0 36'}$.

1.31. Se scrie $\sqrt[3]{j} = a + jb$, se ridică la cub şi se identifică. Punând condiţia că a şi b să fie reali, se găseşte cele trei rădăcini ale unităţii imaginare: $0 - j$; $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + j)$.

1.32. Se calculează în prealabil $\sqrt{j}$ ca mai sus, Se găseşte apoi $y = \varepsilon^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

1.33. Punând $\ln j = a + jb$, rezultă $j = \varepsilon^{a+jb}$ de unde, aplicând relaţia lui Euler, se găseşte $a = 0$ şi $b = (4k+1)\frac{\pi}{2}$. Deci $\ln j = j(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

1.34. $\overline{V} = 60 \underline{|\pm 30^0} = 51,96 \pm j\,30$.

1.35. $\overline{V} = \pm 25 + j43,3$.

1.36. Argumentul vectorului $\overline{V}_1$ este $\varphi_1 = 156^0 48'$.
Rezultă $\overline{V} = 10 \underline{|156^0 48' \pm 45^0}$ de unde $\overline{V}' = -3,71 + j9,23$ şi $\overline{V}'' = -9,23 - j3,71$.

1.37. Modulul vectorului $\overline{V}$ fiind 18,03 şi argumentul vectorului $\overline{V}_2$ fiind $243^0 30'$, vectorii căutaţi sunt $\overline{V}' = 18,03 \underline{|243^0 30' \pm 30^0}$ de unde $\overline{V}'_a = -15,04 - j9,95$ şi $\overline{V}'_b = 5,30 - j17,99$.

1.38. Se scriu vectorii daţi sub forma $\overline{V}_1 = 11,18 \underline{|153^0 26'}$ şi $\overline{V}_2 = 11,18 \underline{|126^0 34'}$. Se ţine seamă de rotirea axelor cu unghiul $153^0 26'$ scăzând acest unghi din argumentele vectorilor daţi. Se obţine:
$\overline{V}'_1 = 11,18 \underline{|0}$ şi $\overline{V}'_2 = 11,18 \underline{|-126^0 52'} = 11,18 \underline{|233^0 08'}$ sau $\overline{V}'_1 = 11,18 + j0$ şi $\overline{V}'_2 = -6,71 - j9,94$.

1.39. Vectorul dat se poate scrie $\overline{V} = 11,18 \underline{|63^0 26'}$ şi expresiile căutate sunt $\overline{V}_{1,2} = 11,18 \underline{|63^0 26' \pm 120^0}$ sau $\overline{V}'_1 = -11,16 - j0,67$ şi $\overline{V}'_2 = 6,16 - j9,33$.

Observaţie: Se pot obţine expresiile vectorilor rotiţi înmulţind vectorul dat cu $a = -0,5 + j0,866$ şi $a^2 = -0,5 - j0,866$.

1.40. $163^0 44'$.

1.41. Se scriu vectorii daţi sub forma simbolică, fiecare în raport cu sistemul său de referinţă. Se găseşte $\overline{V} = 5 \underline{|143^0 08'}$ şi $\overline{V}_1 = 2,24 \underline{|116^0 34'}$. Deci argumentul vectorului $\overline{V}$ faţă de sistemul principal de referinţă este $116^0 34' + 143^0 08' = 259^0 42'$. Rezultă $\overline{V}' = 5 \underline{|259^0 42'} = -0,9 - j4,92$.

1.42. Dacă φ_1 şi φ_2 sunt argumentele celor doi vectori, $\overline{V} = |\overline{V}_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \underline{|\varphi_1}$. Se găseşte $\overline{V} = 4,47 \underline{|296^0 34'} = 2 - j4$.

1.43. Se găseşte $\overline{V} = |\overline{V}_2| \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \underline{|\varphi_1 - 90^0}$ sau numeric, $\overline{V} = 8,94 \underline{|206^0 34'} = -8 - j4$.

2. 2.1. $-1 + j3$. Grafic, vectorii se adună după regula paralelogramului.

2.2. $-2 - j3$.

2.3. Se scrie al doilea vector sub forma $a + jb$, apoi se adună. Operaţia se face mai repede grafic. Se obţine rezultatul $0,83 + j\,3,17$.

2.4 Ambii vectori se exprimă sub formă algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obţine rezultatul $4{,}59 + j\,1{,}89$.

2.5. $-2 + j5$.

2.6. $1 + j5$.

2.7. Se trece la forma algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obţine $0 + j\,5{,}2$.

2.8. Idem $0 + j\,1{,}73$.

2.9. Se scrie al doilea termen sub forma algebrică, sau se rezolvă grafic. Se obţine $0{,}91 + j\,0{,}94$.

2.10. Idem. Se obţine $-1{,}5 - j0{,}868$.

Observaţie. Vectorii rezultaţi pot fi puşi sub orice formă, alegerea formei depinzând de operaţiile ulterioare cu acest vector. Astfel, în cazul acesta putem scrie vectorul în felul următor: $-1{,}5 - j\,0{,}866 = -\sqrt{3}\,\underline{|30^0} = \sqrt{3}\,\underline{|210^0} = \sqrt{3}\,\varepsilon^{j\,210^0} = -\sqrt{3}\,\varepsilon^{j\frac{\pi}{6}}$.

2.11. Se obţine $-12 + j5$. Grafic fig. 2.11.

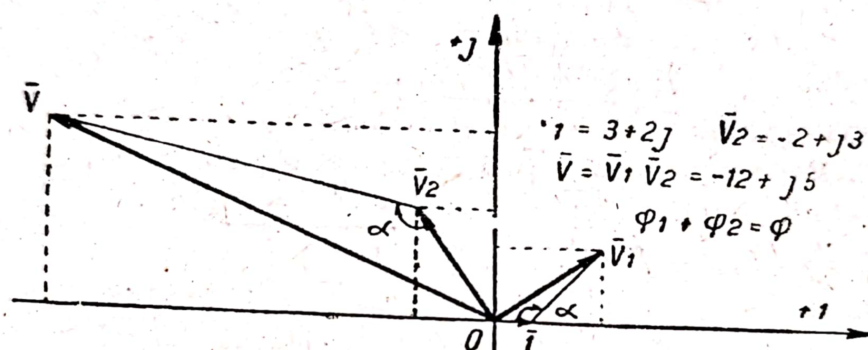


Fig. 2.11.

2.12. $14 + j2$.

2.13. Se aduce primul vector la forma algebrică sau al doilea la forma exponenţială. De preferat a doua metodă. Avem: $2 + j2 = 2\sqrt{2}\,\varepsilon^{j\frac{\pi}{4}}$ şi deci $4\sqrt{2}^{\,j\frac{7\pi}{12}}$.

2.14. Se procedează ca mai sus: $-|3 + j3| = 3\sqrt{2}\,\underline{|135^0}$ şi deci $15\sqrt{2}\,\underline{|120^0}$.

2.15. $\sqrt{3}\,\underline{|30^0}$.

2.16. $-4 - j8$. Grafic fig. 2.16.

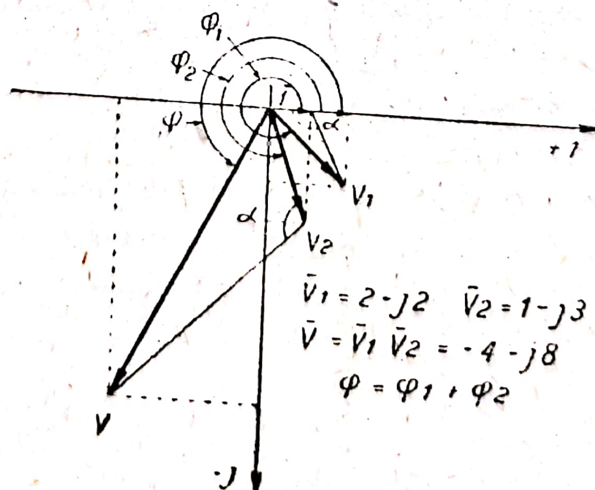


Fig. 2.16.

2.17. $0{,}118 - j\,1{,}53$.

2.18. $-2 - j$. Grafic fig. 2.18.

2.19. Se aduce primul vector la forma algebrică sau al doilea la forma exponențială. De preferat a doua metodă. Avem:

$$0{,}75 + j\,0{,}433 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\varepsilon^{j\frac{\pi}{6}} \text{ și deci rezultatul este } \frac{4}{\sqrt{3}}\,\varepsilon^{j\frac{\pi}{6}}.$$

2.20. Se procedează ca în exercițiul precendent. Avem:

$$1{,}91 + j\,0{,}60 = 2\,\underline{|17^{0}30'} \text{ și deci rezultatul este } \sqrt{2}\,\underline{|12^{0}15'}.$$

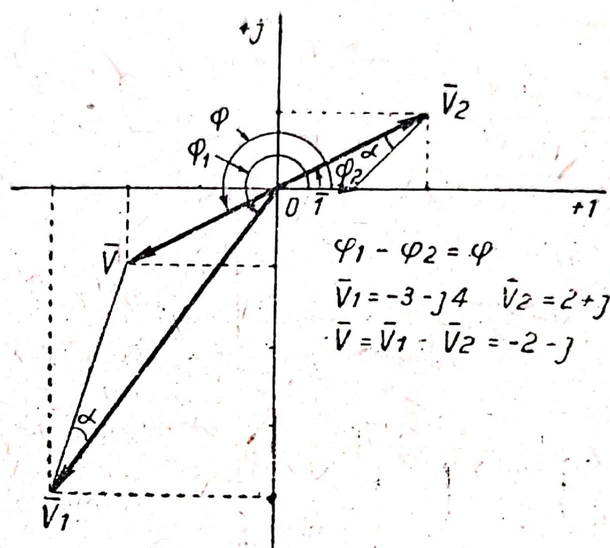


Fig. 2.18.

2.21. Avem $j\sqrt{3} = \sqrt{3}\,\underline{|90^{0}}$ și deci $\sqrt{3}\,\underline{|30^{0}}$.

2.22. $2{,}5\,\underline{|85^{0}}$.

2.23 $0 - \overline{j8}$. Calculul se poate face și grafic fără nici o dificultate.

2.24. $3\,\underline{|44^{0}30'}$.

2.25. Se scrie $\sqrt{-12 + j\,16} = a + jb$, se ridică la patrat și se identifică; se obține $-12 = a^2 - b^2$ și $16 = 2\,ab$. Se deduce ecuația bipătrată $a^4 + 12\,a^2 - 64 = 0$, de unde $a^2 = -6 \pm 10$. Cum a și b sunt mărimi reale, se alege numai rădăcina $a = 4$, de unde $a = \pm 2$ și $b = \pm 4$. Rezultă rădăcina căutată $\pm (2 + j4)$.

2.26. $\pm (0{,}245 - j\,2{,}04)$.

2.27. Sub această formă operația este simplă: se extrage rădăcina pătrată din modul (care trebue să fie pozitiv) și se divide argumentul prin 2; se obține $\pm \sqrt{5}\,\underline{|31^{0}30'}$.

Observație: Sub această formă se poate extrage rădăcina de orice ordin.

2.28. A simplifica expresia dată înseamnă a o pune sub forma $a + jb$. Se înmulțesc ambii termeni ai fracției cu conjugatul numitorului. Făcându-se toate calculele, se găsește: $-0{,}48 + j\,1{,}36$.

2.29. $-(1{,}42 + j\,1{,}505)$.

2.30. $2{,}662 - j\,0{,}214$.

2.31. $8\sqrt{3}\,\underline{|58^{0}}$.

Scanned with OKEN Scanner

2.32. Se scriu mărimile complexe date sub formele $a + jb$, respectiv $A \underline{|\alpha}$ pentru a face cu ușurință calculele. Se găsește (*a*) $-1,9 + j9,9$; (*b*) $-1,29 - j\,1,54$; (*c*) $5,58 + j\,8,54$; (*d*) $-8,48 + j\,0,67$; (*e*) $24 \underline{|-80^\circ}$; (*f*) $40,81 \underline{|194^\circ}$; (*g*) $224 \underline{|119^\circ 36'}$; (*h*) $0,834 \underline{|-76^\circ}$; (*i*) $0,445 \underline{|221^\circ 54'}$; (*j*) $-0,117 - j\,0,009$; (*k*) $1,6 \underline{|182^\circ 30'}$; (*l*) $24 \cos 80^\circ = 4,18$; (*m*) $-13,25$; (*n*) $3\,\varepsilon^{-j\,1,5}$; (*p*) $j\,16$.

(1) $x = 0,45 \underline{|41^\circ 54'}$; (2) $x_1 = -6,432 + j\,13,728$; $x_2 = 6,768 - j\,13,432$.

2.33. $1570\,[\cos(\omega t + 75^0) + j \sin(\omega t + 75^0)]$.

2.34. Cum $\omega = 2\pi f = 263,76$ rezultă :

$$6330\,[\cos(3\omega t + 108^0) - j \sin(3\omega t + 108^0)].$$

2.35. $j\,U \frac{d\alpha}{dt} \underline{|\alpha} = U \frac{d\alpha}{dt} \underline{\Big| \alpha + \frac{\pi}{2}}$.

2.36. $14\,130 \underline{|3\omega t + 120^0}$

2.37. $10\,500 \underline{|\omega t + 45^0}$

2.38. $j \cdot 2\omega \cdot 120\,\varepsilon^{j(2\omega t - 45^0)} = 75360\,\varepsilon^{j(2\omega t + 45^0)}$

2.39. $j \cdot \omega \cdot 5\,\varepsilon^{j(\omega t + 30^0)} = 1884\,\varepsilon^{j(\omega t + 120^0)}$

2.40. $0,0318\,[\cos(\omega t - 80^0) + j \sin(\omega t - 80^0)]$

2.41. $0,0152\,[\cos(5\omega t - 120^0) + j \sin(5\omega t - 120^0)]$

2.42. $-j \dfrac{I}{\left(\dfrac{d\beta}{dt}\right)} \underline{|\beta} = \dfrac{I}{\left(\dfrac{d\beta}{dt}\right)} \underline{\Big|\beta - \frac{\pi}{2}}$

2.43. $0,114 \underline{|\omega t - 105^0}$

2.44 $0,0764 \underline{|5\omega t - 70^0}$

2.45. $0,15\,\varepsilon^{-j(3\omega t - 30^0)}$

2.46. $0,455\,\varepsilon^{j(\omega t - 120^0)}$

2.47. $\overline{V}_3 = -13 - j\,10$.

2.48. Cei doi vectori sunt $\overline{V}_1 = 10 \underline{|-53^0 08'}$ și $\overline{V}_2 = 20 \underline{|170^0 33'}$. Se găsește $\overline{V} = 13,63 + j\,4,72$.

2.49. Scriind $\overline{V}_1 \cdot \overline{V} = \overline{V}_2$, se găsește $\overline{V} = 0,6 - j0,8$.

2.50. Se scriu cei doi vectori sub forma $\overline{V} = V \underline{|\varphi}$. Unghiul dintre ei fiind $\varphi_1 - \varphi_2$, unghiul pozitiv de rotire este $360^0 - (\varphi_1 - \varphi_2) = 206^0 34'$.

2.51. Se scrie $\overline{V}_2 = V(\cos\varphi_2 + j \sin\varphi_2)$ și $\overline{V}_3 = V(\cos\varphi_3 + j\sin\varphi_3)$ Problema are trei necunoscute iar din relația $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$ se deduc numai două ecuații deci problema este nedeterminată. Din ecuațiile ce pot fi scrise se deduce $\operatorname{tg} \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{-3}{4}$ și $\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2} = \pm \frac{5}{V}$. Din a doua relație rezultă că, pentru ca problema să aibă un sens trebue ca $V \geq 5$. Pentru $V = 5$ se găsește $\overline{V}_2 = 5 \underline{|-36^0 50'} = 4,00 - j\,3,00$ și $\overline{V}_3 = 5 \underline{|-36^0 50'} = 4,00 - j\,3,00$.

Scanned with OKEN Scanner

2.52. Scriind vectorul dat sub forma $\overline{Z} = Z\underline{|k \cdot 360^0 + \varphi}$, rezultă $\sqrt[m]{\overline{Z}} = \sqrt[m]{Z}\underline{\left|k\frac{360}{m} + \frac{\varphi}{m}\right.}$ și cele m rădăcini se obțin făcând pe $k = 0,1,\ldots,(m-1)$. Aceste rădăcini sunt toate egale între ele ca modul, două rădăcini succesive făcând între ele unghiul $\frac{360^\circ}{m}$. Ele sunt deci razele unui poligon regulat cu m laturi. Prima rădăcină este în *urma* vectorului dat, cu unghiul $\frac{m-1}{m}\varphi$.

3. 3.1. Expresia $x = X\sqrt{2}\cos(\omega t \pm \xi)$ se poate scrie sub formă complexă în una din formele echivalente : $\overline{X} = X(\cos\xi \pm j\sin\xi) = X\underline{|\pm\xi} = X\varepsilon^{\pm j\xi}$. Pentru cazul de față se obține : $I = 4{,}33 - j\,2{,}50 = 5\underline{|-30^0} = 5\,\varepsilon^{-j\frac{\pi}{6}}$.

3.2. Expresia dată se scrie $u = 170\cos(\omega t + 115^0)$ și se obține $\overline{U} = 50{,}71 - j\,108{,}75 = 120\underline{|295^0} = 120\,\varepsilon^{j5{,}15}$ V.

3.3. $\overline{Z} = 12{,}3 + j\,8{,}6 = 15\underline{|35^0} = 15\,\varepsilon^{j\,35^0}\,\Omega$.

3.4. $\overline{I} = -12{,}99 - j\,7{,}50 = 15\underline{|210^0} = 15\,\varepsilon^{j3{,}65}$ A.

3.5. $\overline{U} = 212{,}51 + j\,56{,}94 = 220\underline{|15^0} = 220\,\varepsilon^{j\frac{\pi}{12}}$ V.

3.6. $\overline{Z} = 173{,}2 - j\,100 = 200\underline{|-30^0} = 200\,\varepsilon^{-j\frac{\pi}{6}}\,\Omega$.

3.7. Valoarea instantanee a expresiei $\overline{Y} = A \pm j\,B$ este $y = |\overline{Y}|\sqrt{2}\cos(\omega t \pm \varphi)$ în care $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm B}{A}$. Pentru acest exercițiu se obține $i = 7{,}05\cos(\omega t - 36^0 50')$ A.

3.8. $i = 35{,}4\cos(\omega t + 73^0 42')$ A.

3.9. $u = 141\cos(\omega t + 53^0 08')$ V.

3.10. $u = 282\cos(\omega t - 36^0 52')$ V.

3.11. $i = 14{,}1\cos(\omega t - 25^0)$ A.

3.12. $u = 312\cos(\omega t + 15^0)$ V.

3.13. $i = 8{,}5\cos(\omega t + 10^0)$ A.

3.14. $u = 170\cos(\omega t - 15^0)$ V.

3.15. $\overline{Z} = 2 - j\,1\,\Omega$, $R = 2\,\Omega$, $X = -1\,\Omega$ (capacitivă), $\varphi = -26^0 34' = 333^0 26'$.

3.16. $\overline{Z} = 104 + j\,42{,}4\,\Omega$, $R = 104\,\Omega$, $X = 42{,}4\,\Omega$ (inductivă), $\varphi = 22^0 10'$.

3.17. $\overline{Z} = 900 + j\,1800\,\Omega$, $R = 900\,\Omega$, $X = 1800\,\Omega$ (inductivă), $\varphi = 63^0 30$.

3.18. $\overline{Z} = 9{,}88 + j\,1{,}13\,\Omega$, $R = 9{,}88\,\Omega$, $X = 1{,}13\,\Omega$ (inductivă) $\varphi = 8^0 13'$.

3.19. $\overline{Y}_1 = 0{,}10$ S, $\overline{Y}_2 = j\,0{,}0286$ S, $\overline{Y}_3 = -j\,0{,}04$ S, $\overline{Y} = 0{,}1 - j\,0{,}0114$ S, $\overline{Z} = 1/\overline{Y} = 9{,}88 + j\,1{,}13\,\Omega$.

3.20. $8{,}25 - j\,3{,}36$ m S, $g = 8{,}25 \times 10^{-3}$ S, $b = -3{,}36 \times 10^{-3}$ S.

3.21. Se transfigurează mai întâi două triunghiuri, s. ex. ABF și DCF, apoi încă unul din triunghiurile astfel obținute. Rezultă $\overline{Z}_{AC} = 0{,}514 + j\,0{,}775\,\Omega$.

3.22. Scriind expresia puterii şi curentului absorbite de circuit se găsesc două ecuaţii din care se deduc valorile rezistenţei şi reactanţei impedanţei necunoscute $\overline{Z}_2$. Se găseşte astfel $\overline{Z}_2 = 108{,}2 + j\,135{,}83\Omega$. Legând condensatorul la bornele inductanţei, impedanţa totală devine $\overline{Z}_{sistem} = 19 - j\,68{,}3\Omega$; factorul de putere este $\cos\varphi' = 0{,}267$ capacitiv, puterea absorbită este $\varphi' = 21$ kW.

3.23. $R = 0{,}480\ \Omega$, $X = 0{,}404\ \Omega$ (inductivă).

3.24. *a*) $\overline{I} = 1{,}213\ \underline{|-60^0 11'}$ din $u = 220\sqrt{2}\cos\omega t$, şi $i = 1{,}213\sqrt{2}\cos(\omega t - 60^0 11')$ se deduce $u_1 = 252$ V, $i_1 = +1{,}561$ A, $u_2 = 0$ V, $i_2 = +1{,}484$ A, $u_3 = -310{,}2$ V, $i_3 = -0{,}851$ A, $u_4 = 0$ V, $i_4 = -1{,}484$ A. *b*) $\overline{I} = 1{,}263\ \underline{|+72^0 34'}$, tensiunea are aceleaşi valori ca şi în cazul precedent, $i_1 = -0{,}567$ A, $i_2 = -1{,}717$ A, $i_3 = -0{,}534$ A, $i_4 = +1{,}717$ A; *c*) $\overline{I} = 1{,}570\ \underline{|0^0 49'}$, $i_1 = +1{,}772$ A, $i_2 = -0{,}032$ A, $i_3 = -2{,}213$ A, $i_4 = +0{,}032$ A; *d*) $\overline{I} = 1{,}02\ \underline{|11^0 30'}$, $i_1 = +0{,}971$ A, $i_2 = -0{,}287$ A, $i_3 = -1{,}409$ A, $i_4 = +0{,}287$ A.

3.25. Se notează $\overline{Z}_1 = R$, $\overline{Z}_2 = -j\dfrac{1}{C\omega}$, $\overline{Z}_3 = j\,L\omega$. Se găseşte $Z_{TOTAL} = R - j\dfrac{L/C}{L\omega - 1/C\omega}$. Pentru ca $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_{TOTAL}} = 0$ trebue ca $\overline{Z}_{TOTAL} = \infty$ de unde rezultă : $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$ (condiţia de rezonanţă pentru frecvenţa *f*).

3.26. Punând $\overline{Z}_1 = j\,\omega L$, $\overline{Z}_2 = -\dfrac{j}{C\omega}$, $\overline{U}$ tensiunea aplicată la bornele *AD*, $\overline{I}_1$ curentul în latura *AB* (şi prin simetrie şi în *CD*), $\overline{I}_2$ curentul în latura *AC* (şi prin simetrie şi în *BD*), $\overline{I}$ curentul în *BC*; aplicând legile lui Kirchhoff se obţine $\overline{I}_1 - \overline{I}_2 = \overline{I}$; $\overline{Z}_1\,\overline{I}_1 + \overline{Z}_2\,\overline{I}_2 = \overline{U}$; $\overline{Z}_1\,\overline{I}_1 - \overline{Z}_2\,\overline{I}_2 = -R\overline{I}$. Eliminând pe $\overline{I}_1$ şi $\overline{I}_2$ din aceste ecuaţii, se găseşte :

$$2\,\overline{I}\,\overline{Z}_1\,\overline{Z}_2 = (\overline{Z}_2 - \overline{Z}_1)\,\overline{U} - R\,(\overline{Z}_2 + \overline{Z}_1)\,\overline{I}.$$

Pentru ca $\overline{I}$ să fie independent de *R*, trebue ca $\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = 0$ sau $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ deci condiţia de rezonanţă. In acest caz $\overline{I} = -j\,C\omega U$.

3.27. Curentul căutat are forma $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}}{R + j\,(L\omega - 1/C\omega)}$. Se ia ca variabilă independentă $\lambda = L\omega - \dfrac{1}{C\omega}$ şi expresia locului devine $\overline{I} = \dfrac{\overline{U}}{R + j\lambda}$. Aceasta reprezintă un cerc ce trece prin origine şi are centrul pe axa reală. Curba de rezonanţă se construeşte uşor; ea este simetrică faţă de axa corespunzătoare punctului de rezonanţă $\lambda = 0$, ($f = 795 \cdot 10^2$Hz) şi admite ca asimptotă axa frecvenţelor. Valoarea curentului la rezonanţă este $I = 0{,}5$ A.

3.28. Se aplică a doua lege a lui Kirchhoff celor două circuite obţinându-se două ecuaţii din care se elimină I_1. Se obţine o ecuaţie de forma :

$$\overline{U} = \overline{A} + \frac{\overline{B}}{\omega^2} + j\left(\frac{\overline{D}}{\omega} + \overline{F}\omega\right)$$

în care:

$$\overline{A} = -\frac{L_1R_2 + L_2R_1}{M}\overline{I_2} \qquad \overline{B} = \frac{R_1}{C_2M}\overline{I_2}$$

$$\overline{D} = \frac{R_1R_2C_2 + L_1}{C_2M_2}\overline{I_2} \qquad \overline{F} = -\frac{L_1L_2 - M^2}{M}\overline{I_2}$$

Punând $1/\omega^2 = \lambda$ şi $\overline{B} + j\overline{D} = \overline{G}$ se obţine:

$$\overline{U} = \overline{A} + \overline{G}\lambda + \frac{j\overline{F}}{\lambda}$$

care reprezintă o cubică circulară. Trasarea ei se face uşor, construind cercul $\frac{j\overline{F}}{\lambda}$, care are centrul pe axa complexă şi trecând prin origine şi dreapta $\overline{G}\lambda$, care trece deasemenea prin origine. Punctele curbei se obţin ducând din punctele cercului vectori echipolenţi cu $\overline{G}\lambda$. Se deplasează apoi originea cu mărimea $-\overline{A}$ (pe axa reală). Pentru cazul particular al problemei se găseşte: pentru $f = 10^2$ Hz, $\overline{U} = (66{,}2 + j\,644{,}6) \times 10^{-5}$ V; $f = 10^3$, $\overline{U} = (-60{,}3 + j\,430)10^{-5}$ V; $f = 10^4$ Hz $\overline{U} = (-61{,}6 + j\,3{,}7 \cdot 10^3)\,10^{-5}$ V.

3.29. Fie $Z_1 = \frac{U}{I_1}\underline{|\varphi_1}$, impedanţa motorului, $\overline{Z}_2 = -\frac{j}{C\omega}$ impedanţa condensatorului pus la bornele motorului şi $\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{|\varphi_2}$ impedanţa rezultantă. Din relaţia $\overline{Z} = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}$ se deduce $\overline{Z}_2 = \frac{-j}{C\omega} = \frac{\overline{Z}_1 \cdot \overline{Z}}{\overline{Z}_1 - \overline{Z}}$. De unde

$$C = \frac{jP}{\eta U^2 \omega}\left[\sec\varphi_1 \underline{|-\varphi_1} - \sec\varphi_2 \underline{|-\varphi_2}\right] = \frac{P}{\eta U_2 \omega}(\text{tg}\,\varphi_1 - \text{tg}\,\varphi_2).$$

Numeric se găseşte $C = 3{,}16\,\mu$F.

3.30. Punând

$$\overline{Z}_{AB} = R_1 - \frac{j}{C_1\omega},\ \overline{Z}_{BC} = P,\quad \overline{Z}_{AD} = -\frac{j}{C_2\omega},\ \overline{Z}_{DC} = \frac{Q}{1 + j\omega C_3Q},$$

înlocuind în ecuaţia punţii şi făcând calculele se găseşte:

$$QR_1 - j\frac{Q}{C_1\,\omega} = -j\frac{P}{C_2\,\omega} + \frac{C_3}{C_2}QP$$

de unde prin identificare se găseşte $R_1 = \frac{C_3}{C_2}P$ şi $C_1 = \frac{Q}{P}C_2$. Factorul de putere se calculează din relaţia $\text{tg}\varphi = \frac{1}{R_1\,C_1\,\omega}$. Unghiul de pierdere este dat de relaţia $\text{tg}\,\delta = \frac{1}{\text{tg}\,\varphi} = R_1C_1\omega$. Tensiunea la bornele condensatorului variabil

este : $\overline{U}_{DC} = \overline{Z}_{DC}\overline{I}_2 = \overline{U}\,\dfrac{\overline{Z}_{DC}}{\overline{Z}_{ADC}}$ deoarece $\overline{I}_2 = \dfrac{\overline{U}}{\overline{Z}_{ADC}}$. Se găsește $\overline{U}_{DC} = \dfrac{QC_2\,\omega}{\omega(C_2 + C_3)Q - j}\,\overline{U}$. Numeric se găsește $R = 6360\,\Omega$, $C_1 = 0{,}1952\,\mu\text{F}$, $\cos\varphi = 0{,}35$, $\operatorname{tg}\delta = 0{,}384$, $\overline{U}_{DC} = 225\,\underline{|68^0 12'}$ V.

3.31. Se pune $\overline{Z}_{AB} = P$, $\overline{Z}_{BC} = r - \dfrac{j}{C\omega}$, $\overline{Z}_{CD} = Q$, $\overline{Z}_{DA} = R + jL\omega$.

Puntea fiind de tipul Wheatstone, pentru echilibrare trebue ca $\overline{Z}_{AB}/\overline{Z}_{DA} = \overline{Z}_{BC}/\overline{Z}_{CD}$. Inlocuind cu valorile de mai sus, făcând calculele, identificând și scoțând valorile lui L și R căutate, se găsește $R = \dfrac{PQrC^2\omega^2}{1 + r^2C^2\omega^2}\,\Omega$ și $L = \dfrac{PQC}{1 + r^2C^2\omega^2}$ H. Numeric se găsește $R = 374\,\Omega$ și $L = 0{,}166$ H.

3.32. Aplicând circuitului legea lui Ohm se găsește, pentru raportul căderilor de tensiune egal cu m și factorul de putere egal cu k: $\overline{U}_a = m(1 + jn)\dfrac{I_a}{I_c}U_c$, în care $n = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{1 - k^2}}{k}$; $\overline{U}_{a1} = \dfrac{m}{m+1}(1 + jn)\dfrac{I_a}{I_c}U_c$; $\overline{U}_{a2} = \dfrac{m^2}{m+1}\times(1 + jn)\dfrac{I_a}{I_c}U_c$. Numeric se găsește : $\overline{U}_a = 110(1 + j\sqrt{3})$; $\overline{U}_{a1} = \dfrac{110}{3}(1 + j\sqrt{3})$; $\overline{U}_{a2} = \dfrac{220}{3}(1 + j\sqrt{3})$.

3.33. Se scrie ecuațiile de tensiune ale circuitelor primar și secundar între care se elimină curentul $\overline{I}_2$. Calculându-se raportul $\overline{U}_1/\overline{I}_1$, se găsește $\overline{Z}_A = 255 + j\,1510\,\Omega$.

3.34. $\overline{Z}_{11} = 8{,}5 - j\,174\,\Omega$; $\overline{Z}_{22} = 120{,}5 - j\,320 = 342\,\underline{|-69°24'}\,\Omega$; pentru determinarea impedanței mutuale $\overline{Z}_{12}$ se observă că aceasta cuprinde impedanța comună ramurii bc o parte din impedanța datorită inductanței mutuale M. Curentul $\overline{I}_1$ produce o cădere de tensiune $-j\dfrac{I_1}{C_3\omega}$ în sensul curentului $\overline{I}_1$, care este o cădere de tensiune $+j\dfrac{I_1}{C_3\omega}$ în sensul curentului $\overline{I}_2$. Rezultă că impedanța mutuală datorită ramurei bc în $\overline{Z}_{22}$ este $j\dfrac{1}{C_3\,\Omega}$. Un curent pozitiv $\overline{I}_1$ produce în inductanța M o cădere de tensiune pozitivă în sensul curentului $\overline{I}_2$ din cauza sensului de înfășurare al bobinei. Rezultă $\overline{Z}_{12} = j\left(\dfrac{1}{C_3\,\omega} + \omega M\right) = j\,503\,\Omega$; $\overline{Z}_s = 120 + j\,141 = 185\,\underline{|49°42'}\,\Omega$; impedanța aparentă la bornele sursei este $Z_{1a} = Z_{11} - \dfrac{\overline{Z}_{12}^2}{\overline{Z}_{22}} = 271 + j\,522 = 589\,\underline{|62°36'}\,\Omega$; $\overline{I}_1 = 0{,}0170\,\underline{|-62°36'}$ A; aplicând a doua lege a lui Kirchhoff circuitului 2, rezultă $\dfrac{\overline{I}_1}{\overline{I}_2} = -\dfrac{\overline{Z}_{22}}{\overline{Z}_{12}} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 0{,}649 \underline{|20°36'}$, de unde $I_2 = 0{,}0251 \underline{|-83°12'}$ A; $P_1 = I_1^2\, \Re\, (\overline{Z}_{1a}) = 0{,}0784$ W; $P_2 = I_2^2\, R_s = 0{,}0756$ W; pierderile $p_1 = I_1^2\, R_{11} = 24{,}6 - 10^{-4}$ W; $p_2 = I_3^2\, R_3 = 3{,}2 . 10^{-4}$ W, pierderile totale $= 27{,}8 . 10^{-4}$, puterea dată $783, 8 . 10^{-4}$ W; $\eta = 96{,}5\,\%$.

3.35. Scriind relațiile dintre diversele mărimi din circuit se găsește : $L_1 = 0{,}188$ H, $E = 1220$ V, $\cos\varphi = 0{,}9$, $\varphi = 25°50'$.

3.36. La $\cos\varphi_2 = 1$ ∴ $P_2 = 100$ kW și $\cos\varphi = 0{,}645$ (*a*) $P_2 = 100$ kW, $Q_2 = 0$. (*b*) $\overline{S} = 225 - j\,216$ kVA.

3.37. Operația compensării factorului de putere se traduce prin relația

$$\overline{I'}\ \underline{|\varphi_1'} = \overline{I}\ \underline{|\varphi} + \overline{J}\ \underline{|\Psi}$$

în care $\overline{I'}$ și φ' sunt sunt curentul și defazajul rezultant, $\overline{I}$ și φ, curentul și defazajul dat, $\overline{J}$ și ψ curentul și defazajul absorbit de receptorul compensator.

In aceste condiții se găsește : (*a*) $I_s = 835$ A $\overline{I_0} = 510$ A: (*c*) luând $\overline{E} = E\, j\, 0$, rezultă $\overline{I} = 690$ A; (*d*) Puterea totală absorbită $\overline{S} = \overline{S_1} + \overline{S_2} = 2077 + j\,0$ kVA.

3.38. Luând pe E ca origină de fază, $P_{25} = \Re\left(\overline{E}\,\dfrac{\overline{E}^*}{R - jX}\right) = \dfrac{RE^2}{R^2 + X^2}$;

apoi $P_{60} = \dfrac{E^2}{R}$ și $I_{60} = \dfrac{E}{R}$ căci la $f = 60$ Hz sistemul este în rezonanță. Se obțin astfel 3 ecuații care dau cele trei necunoscute. Se găsește.

$\dfrac{P_{60}}{I_{60}} = E = 110$ V; $R = \dfrac{P_{60}}{I_{60}^2} = 3{,}14\ \Omega$; $X_{25} = \dfrac{P_{60}}{I_{60}^2}\sqrt{\dfrac{P_{60} - P_{25}}{P_{25}}} = 10{,}5\ \Omega$ la $f = 25$ Hz. Din valoarea lui X_{25} și condiția de rezonanță rezultă $C = 50\ \mu F$ și $L = 0{,}14$ H. Aceste mărimi trebuind să fie pozitive, trebue ca $X_{25} = \dfrac{1}{C\omega} - L\omega$.

3.39. (*a*) Punând $\dfrac{u_1}{U_1\sqrt{2}} = X$ și $\dfrac{u_2}{U_2\sqrt{2}} = Y$ scriind funcțiile inverse se obțin relațiile $\omega t - \psi = \arccos X$ și $2\omega t = \arccos Y$, de unde prin eliminarea lui ωt rezultă ecuația $\arccos Y - 2 \arccos X = 2\psi$ sau $\cos(\alpha - 2\beta) = \cos 2\psi$ în care s'a pus $X = \cos\beta$ și $Y = \cos\alpha$. Desvoltând cosinusul și ținând seama de valorile lui α și β se obține în definitiv curba căutată

$4X^4 - 4X^2Y \cos 2\psi + Y^2 - 4X^2 - 2Y \cos 2\psi + \cos^2 2\psi = 0$ sau explicitată în raport cu Y, mai ușor de reprezentat, $Y = (2X^2 - 1)\cos 2\psi \pm \pm 2X\sqrt{1 - X^2}\,\sin 2\psi$.

(*b*) In cazurile particulare date se obțin curbele: $Y = 2X^2 - 1$; $Y = \pm 2X\sqrt{1 - X^2}$; $Y = -(2X^2 - 1)$.

Notă. Se obține ușor forma curbelor prin o sumare grafică a curbelor celor două tensiuni.

3.40. Se găsește impedanța echivalentă între B_1 și $G_1 - R_3$ și $X_3 - R_2$, Y_1 și X_2, Z_3 care sunt montate în paralel. Impedanța obținută în serie cu X_4 este impedanța echivalentă pe care debitează sursa. Se aplică legea lui Ohm. Se face apoi distribuția de curenți. Se obține: $I = 5{,}3$ A; $U_{ab} = 88{,}6$ V.

3.41. Pentruca condiția dată să fie satisfăcută, trebue ca $Y_1 = C\omega$ (pentru cazul întrerupătorului deschis) să fie egal cu

$Y_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega\, C\right)^2 + \dfrac{R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}}$ (pentru cazul întrerupătorului

închis). Egalând cele două expresii obţinem:

$$\omega^2 = \frac{1}{2LC} \quad \text{sau} \quad L = \frac{1}{2\,C\omega^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{C\omega}\cdot\frac{1}{\omega}.$$

Ţinând seama că în problemă se dau tensiunea aplicată şi valoarea eficace a curentului rezultă:

$$L = \frac{1}{2}\cdot\frac{U}{I}\,\frac{1}{\omega} = \frac{1}{2}\cdot\frac{380}{1}\cdot\frac{1}{314} = 0{,}605 \text{ H}.$$

3.42. Când întrerupătorul este închis $I = I_2 = I_C = 4{,}4$ A. Când întrerupătorul este deschis $I = I_L = I_C = 8{,}8$A; $I_2 = 0$.

3.43. In cazul rezonanţei curenţilor A_3 indică valoarea eficace a unui curent activ; A_1 a unui curent a cărui componentă activă este egală cu I_3 iar componenta reactivă este egală cu I_2

$$I_{1a}^2 + I_{1r}^2 = 6^2;\ I_{1a} = I_3 = 3{,}6;\ I_2 = I_{1r} = 4{,}8 \text{ A}.$$

3.44. Se aplică legile lui Kirchhoff scrise în cantităţi complexe. Ampermetrul va arăta valoarea eficace a curentului I_4 .·. $I_4 = 4{,}12$ A.

3.45. Se scriu cele două ecuaţii de funcţionare ale circuitului între care se elimină $\overline{I}_2$, deducându-se apoi

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}} = R_1 + \frac{R_2\,\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)} + j\left[(X_L - X_C) - \frac{(X_L - X_C)\,\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}\right].$$

(a) Pentruca $\overline{Z}$ să fie o rezistenţă pură trebue ca coeficientul lui j să fie nul, ceeace se întâmplă dacă $X_L - X_C = 0$, adică este îndeplinită condiţia de rezonanţă, sau dacă

$$1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + (X_L - X_C)^2} = 0$$

de unde rezultă

$$M = \frac{R_2^2 + (X_L - X_C)^2}{\omega}.$$

Numeric se găseşte $M = 8{,}77$ H.

(b) Punând aceiaşi condiţie, se găseşte

$$C = \frac{1}{\left[X_L - \dfrac{\omega^2 M_1^2 \pm \sqrt{\omega^4 M_1^4 - 4\,(X_L - X_C)^2 R_2^2}}{2\,(X_L - X_C)}\right]\omega}$$

în care $M_1 = 2\,M$. Numeric rezultă $C_1 = 1061\ \mu\mu F$ şi $C_2 = 875\ \mu\mu F$.

4. 4.1. — 0,236 + j 0,059. Grafic inversul vectorului se construeşte cu ajutorul polarei vârfului vectorului conjugat, faţă de cercul unitar.

Scanned with OKEN Scanner


4.2. $0{,}25 + j\, 0{,}25$. Grafic fig. 4.2.

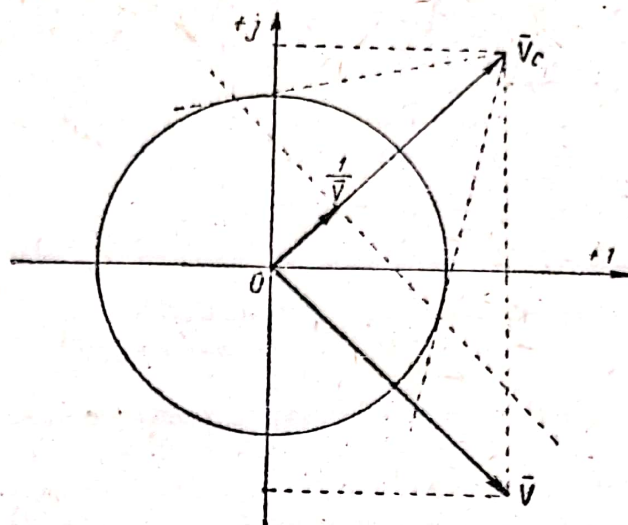


Fig. 4.2.

4.3. $0{,}25\ \varepsilon^{-j\frac{\pi}{3}}$.

4.4. $0{,}2\ \underline{|-30^0}$.

4.4. $10\ \underline{|25^0}$.

4.6. $\bar{V}_i = \dfrac{(1 + j\,1)^2}{3 + j4} = 0{,}32 + j\,0{,}24$. Grafic, inversarea se realizează construind inversul vectorului dat cu ajutorul polarei față de cercul de rază $\bar{V}$ dar *fără a lua conjugatul vectorului dat* şi luând apoi simetricul vectorului astfel obținut față de $\bar{V}_0$ (fig. 4.7) sau urmând indicația din breviar (par. 4.3).

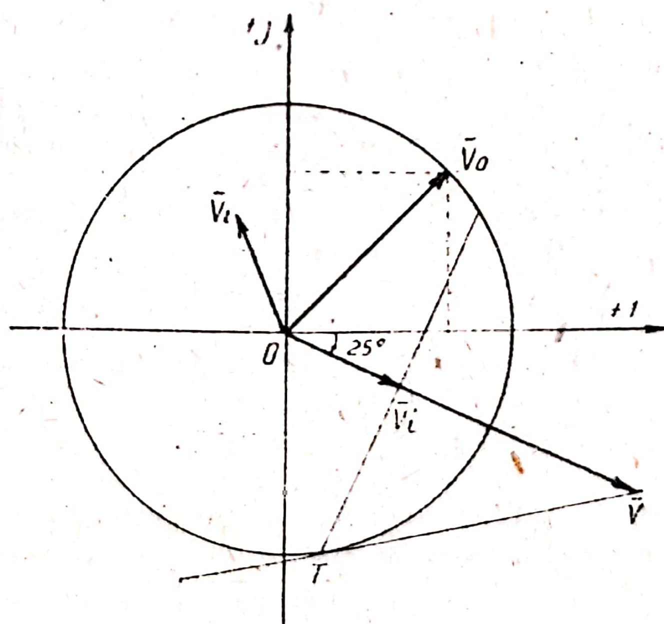


Fig. 4.7

4.7. Pentru calculul analitic se aduc vectorii la aceeaşi formă, de preferință la forma simbolică (6). Pentru calcul grafic vectorii pot fi exprimați sub orice formă. Se obține $1{,}16\ \underline{|115^0}$. Grafic fig. 4.7.

Scanned with OKEN Scanner

4.8. 1,33 $\underline{|10^0}$.

4.9. $V_i = 0,2 \underline{| -53^\circ10'}$

4.10. $V_i = 0,2 \underline{| -53^\circ10'}$

4.11. $V_i = 0,2 \underline{| 126^\circ50'}$

4.12. $V_i = 0,2 \underline{| 126^\circ50'}$

4.13. Locul este un segment de dreaptă, paralel cu axa complexă ce trece prin vârful vectorului $a = 0,5$; vârful vectorului corespunzător cazului $b = 0$ coincide cu acest punct.

4.14. Locul este un segment de dreaptă, paralel cu axa reală, pornind din vârful vectorului $j2$, care corespunde valorii $a = 0$.

4.15. Locul este un cerc cu centrul pe axa reală și tangent în origină la axa complexă. Centrul acestui cerc se găsește în punctul unde cercul unitar taie axa reală. La gradare se va ține seama că, pentru construirea locului se ia conjugata dreptei dela numitor.

4.16. Locul este un semicerc cu centrul pe axa complexă, tangent în origină la axa reală. Construcția lui este la fel cu cea anterioară. Se va avea grijă să se ia cercul unitar cu o rază mai mare decât b pentru ca aceasta să poată fi polara celei de a doua extremități a diametrului principal. Altfel locul este un cerc cu diametrul prea mic și nu poate fi folosit.

4.17. Locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa complexă și trece prin vârful vectorului $(a + jb)$ care este punctul de zero al locului.

4.18. Locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa reală și trece prin vârful vectorului $(a + jc)$, punctul de zero al locului.

4.19. Locul este un cerc cu centrul pe axa complexă, care trece prin origină. La gradare se va ține seama că zero al locului corespunde simetricului vârfului vectorului $(a+jc)$ față de axa reală.

4.20. Ecuația dată se poate scrie $\overline{U}_0 = (46 + j\,34,5)\dfrac{1}{j5 - v}$. Se construește vectorul $(46 + j\,34,5)$ și locul $\dfrac{1}{j5 - v}$ care este un cerc cu centrul pe axa complexă, în regiunea negativă și tangent în origine la axa reală. Locul astfel obținut se înmulțește cu vectorul $(46 + j\,34,5)$, ceeace revine la a dilata diametrul cercului cu modulul vectorului $\sqrt{46^2 + 34,5^2} = 57,5$ și a-l roti în sensul trigonometric cu unghiul arc tg $\dfrac{34,5}{46} = 36^0 52'$. Această ultimă operație poate fi făcută și rotind axele de coordonate cu același unghi în sens contrar.

4.21. Pentru $\lambda = 0$ se obține $\overline{I}_0 = 0,107 - j\,0,038$; pentru $\lambda = \infty$ se obține $\overline{I}_\infty = 0,154 - j\,0,23$; pentru $\lambda = 1$ se obține $\overline{I}_1 = 0,122 - j\,0,024$. Se duce cercul ce trece prin vârfurile acestor trei vectori. Acest cerc e locul căutat. Pentru gradarea locului se duce o perpendiculară pe diametrul care trece prin vârful vectorului $\overline{I}_\infty$. Dreptele $\overline{I_0 I_\infty}$ și $\overline{I_1 I_\infty}$ determină, pe această dreaptă, unitatea scării.

4.22. Locul se construește ușor din aproape în aproape. Se construește dreapta $(4x + j1)$, care este o paralelă la axa reală și se inversează în raport cu cercul de rază 3 ($k^2 = 9$). Locul obținut este un cerc cu centrul pe axa com

plexă şi tangent în origine la axa reală. Cercul este în regiunea negativă. Se scade acest cerc din vectorul $(2 + j3)$ ceeace revine la a muta originea în vârful acestui vector şi a schimba sensul axelor. Se inversează acum cercul faţă de noua origine, cu puterea de inversiune $(5 + j3)^2$. Pentru aceasta, se face inversiunea *geometrică* a cercului, luându-se ca cerc unitar cercul de rază $|5 + j3| = \sqrt{5^2 + 3^2}$ şi apoi se simetrizează cercul obţinut faţă de vectorul $(5 + j3)$ construit în noul sistem de axe. Pentru gradarea locului se va avea grijă să se fixeze pe cercurile succesive cele trei puncte caracteristice 0,1 şi ∞. La cercul final se duce o dreaptă perpendiculară pe diametrul ce trece prin punctul ∞. Dreptele $\overline{\infty 0}$ şi $\overline{\infty 1}$, vor determina pe această dreaptă segmentul unitate, cu ajutorul căruia se gradează această dreaptă. Se unesc apoi diviziunile obţinute cu punctul ∞, determinându-se astfel diviziunile pe cerc (fig. 4.22).

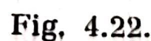


Fig. 4.22.

4.23. Problema este analoagă cu problema 4.20 şi se rezolvă analog.

4.24. Se construesc cei patru vectori daţi. Pentru $\lambda = 0$ se obţine $\overline{I}_0 = \frac{\overline{A}}{\overline{C}} = \frac{-5 + j2}{-2 - j4}$, care se construeşte, câtul dintre cei doi vectori.

determinându-se grafic. Se găsește $\overline{I_0} = 0{,}1 - j\,1{,}2$. Pentru $\lambda = 1$ se obține $\overline{I_1} = \dfrac{(-5 + j2) + (3 + j3)}{(-2 - j4) + (5 - j1)}$. Se efectuează grafic sumele dela numărător și numitor, apoi câtul dintre rezultate. Se găsește $\overline{I_1} = -0{,}91 + j\,0{,}147$. Pentru $\lambda = \infty$ se obține $\overline{I}_\infty = \dfrac{3 + j3}{5 - j1}$, care se efectuează grafic, obținându-se $\overline{I}_\infty = 0{,}46 + j0{,}69$. Restul ca în problema 4.21.

3.25. Prin transfigurări succesive și reduceri de impedanțe, circuitul dat se reduce la un cuadripol în T având la bornele de ieșire legată rezistența variabilă R. Expresia curentului absorbit este

$$\overline{I} = \frac{j\,3600 - 243\,R}{(1500 - j\,2400) + (162 - j\,45)\,R}$$

care reprezintă un cerc și a cărui construcție se face prin metodele obișnuite. Locul este valabil numai pentru $R \geqslant 0$. Pentru $R = 0$, sistemul funcționează în scurtcircuit și $\overline{I}_{sc} = 1{,}268\ \underline{|\,148°}$ A; pentru $R = 8$, circuitul funcționează în gol și $I_0 = 1{,}447\ \underline{|\,195°30'}$ A.

3.26. Reducând impedanțele se găsește

$$\overline{I} = 100\ \frac{1{,}25 - j\,(X_L - 5)}{5\,X_L - j\,6{,}25}$$

care reprezintă un cerc. Locul lui I se poate construi grafic de unde se pot deduce imediat valorile căutate. Analitic se calculează $\dfrac{\mathrm{d}\,|\overline{I}\,|}{\mathrm{d}X_L}$ care dă valorile lui X_L pentru care $\overline{I}$ este maxim și minim. Se găsește: $\overline{I}_{rez} = 4{,}7 + j\ 1{,}1\,75$A pentru $X_L = 5\Omega$; cele două valori care anulează derivata sunt $X_L = 2{,}52 \pm 2{,}81$, din care numai $X_L = 5{,}33$ satisface condițiilor și care dă valoarea minimă a curentului $I_{min} = 4{,}65 - j\,0{,}11$ A. Valoarea maximă se obține pentru $X_L = 0$ și este $I_{max} = j\,20$ A.

3.27. Expresia curentului este

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_1 + \dfrac{1}{j\omega C + \dfrac{I}{Z_2}}} = \frac{(1 + j\,C\,\omega\,\overline{Z}_2)\,\overline{E}}{\overline{Z}_1\,(1 + j\,C\,\omega\,\overline{Z}_2) + \overline{Z}_2}$$

a cărui loc geometric este un cerc. Din construcția grafică se deduc elementele căutate. Analitic se procedează ca în cazul precedent.

3.29. Luând tensiunea aplicată mașinilor ca origine de fază, între curentul total și curenții absorbiți de cele două mașini se poate scrie relația (prima lege a lui Kirchhoff)

$$I'\ \underline{|\,\psi'} = I\ \underline{|\,\varphi} + J\ \underline{|\,\psi}$$

I fiind ciurentul absorbit de motorul asincron, φ decalajul corespunzător, J curentul absorbit de motorul sincron, ψ decalajul corespunzător, I' curentul total

absorbit de grupul de maşini şi ψ' decalajul global al sistemului. Puterea aparentă absorbită de sistem este dată de relaţia

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I'}^{*} = UI' \underline{\left| -\psi' \right.} = UI \underline{\left| -\varphi \right.} + UJ \underline{\left| -\psi \right.} = \overline{F} + \overline{R} \underline{\left| -\psi \right.}$$

care este ecuaţia unui cerc, ce se trasează uşor. (*a*) Vectorul puterii aparente maxime se obţine ducând cu centrul în origine un cerc tangent exterior cercului loc: vectorul căutat are vârful în punctul de contact. (*b*) puterea maximă corespunde tangentei la cercul loc paralelă cu axa complexă: vectorul căutat are vârful în punctul de contact al acestei tangente. (*c*) Din relaţia dintre curenţi, de mai sus, se deduce:

$$tg\ \psi' = \frac{I \sin \varphi + J \sin \psi}{I \cos \varphi + J \cos \psi}$$

pentru factorul de putere unitate, $\psi' = 0$ şi deci $tg\, \psi' = 0$. Rezultă $I \sin \varphi + J \sin \psi = 0$ de unde $\psi = -\text{arc sin} \dfrac{I}{J} \sin \varphi = -\text{arc sin} \dfrac{P\, tg\varphi}{S_s} = -36°50'$, care se determină pe cerc găsindu-se astfel vectorul căutat. (*d*) Se procedează ca în cazul precedent luând $\cos \psi = 0{,}9$, de unde se deduce $tg\psi$ şi se rezolvă apoi ecuaţia trigonometrică în ψ, găsindu-se astfel punctul pe cerc corespunzător.

3.29. Luând tensiunea $\overline{E}$ ca origină de fază, se obţine

$$(a)\quad \overline{I}_{acb} = \frac{\overline{E}}{M + j\,\omega\, L_s + \lambda R_s} \quad \text{şi} \quad \overline{U}_{ac} = \frac{(j\,\omega\, L_s + \lambda\, R_s)\,\overline{E}}{M + j\,\omega\, L_s + \lambda\, R_s};$$

locul geometric al tensiunii $\overline{U}_{ac}$ este un cerc ce nu trece prin origină. Din cerc este valabilă numai porţiunea pentru $\lambda = 0$.

$$(b)\quad \overline{I}_{adb} = \frac{\overline{E}}{R_x + j\,\omega\, L_x + \mu N} \quad \text{şi} \quad \overline{U}_{ad} = \frac{(R_x + j\,\omega\, L_x)\,\overline{E}}{R_x + j\,\omega\, L_x + \mu N};$$

un cerc ce trece prin origină. Din cerc este valabilă numai porţiunea pentru $\mu \geqslant 0$.

(*c*) Puntea este în echilibru pentru $U_{cd} = U_{ac} - U_{ad} = 0$ de unde rezultă relaţia

$$(j\,\omega\, L_s + \lambda R_s)\,(R_x + j\,\omega\, L_x + \mu N) - (R_x + j\,\omega\, L_x)\,(M + j\omega\, L_s + \lambda\, R_s) = 0$$

şi, prin separarea părţilor reale şi complexe se obţine

$$L_x = \frac{\mu\, N}{M}\, L_s \quad \text{şi} \quad R_x = \frac{\mu\, N}{M}\, \lambda\, R_s.$$

Rezultă că echilibrarea se va face mai întâi în curent alternativ, acţionând asupra lui N (variabil), găsindu-se L_x; apoi în curent continuu, acţionând asupra lui R_s (variabil). Nu se poate face o mai bună alegere.

4.30. Sistemul fiind simetric, se studiază numai pe o fază; în acest caz $U_0 = 3470$ V. Impedanţa totală a circuitului fiind

$$\overline{Z} = \frac{(r_1 + jx_1)\,(g_2 + jb_2) + 1}{g_2 + j\, b_2}$$

curentul din circuit (debitat de sursă) şi tensiunea la barele de alimentare a fabricii sunt:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U_0}}{\overline{Z}} = \frac{(g_2 + jb_2)\,\overline{U_0}}{(r_1 + jx_1)\,(g_2 + jb_2) + 1};\quad \overline{U_2} = \overline{Z_2}\,\overline{I} = \frac{\overline{U_0}}{(r_1 + jx_1)\,(g_2 + jb_2) + 1}$$

Locul geometric al curentului şi tensiunii sunt cercuri, din care, cel al tensiunii trece prin origină.

Puterea activă dată circuitului este

$$P_2 = \Re(\overline{U}_2 \,.\, \overline{I}^{\star}) = \frac{g_2\, U_0^2}{(r_1 g_2 - x_1 b_2 + 1)^2 + (x_1 g_2 + r_1 b_2)^2};$$

a cărei maxim se găseşte pentru valoarea lui g_2 dată de ecuaţia $\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\,g_2} = 0$, găsindu-se $g_2 = \frac{x_1 b_2 - 1}{\pm\sqrt{r_1^2 + x_1^2}}$, semnul luându-se astfel ca $g_2 > 0$. Numeric se găseşte $g_2 = 0{,}139$ S, rezultând $P_{2max} = 991$ kW/faza sau total $P_{2tot} = 3\,P_2 = 2973$ kW. In acest caz $\overline{U}_2 = 2{,}046 - j\,1{,}650 = 2{,}6\ \underline{|-38°50'}$ kV şi $\overline{I} = \overline{Y}_2\,\overline{U}_1 = 382{,}2\ \underline{|-19°} = 366{,}89 - j\,127{,}05$ A. Puterea totală dată sistemului, pe fază, este

$$P_1 = 991 + \frac{366{,}89^2 \,.\, 2}{1000} = 1260 \text{ kV}$$

şi randamentul global $\eta = 78{,}65\,\%$.

Factorul de putere este dat de relaţia

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{x_1 + x_2}{r_1 + r_2} = \frac{x_1\,(g_2^2 + b_2^2) + b_2}{r_1\,(g_2^2 + b_2^2) + g_2}$$

Se găseşte $\cos\varphi = 0{,}509$.

Randamentul global al instalaţiei este

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{3\,r_2\,I^2}{3\,(r_1 + r_2)\,I^2} = \frac{1}{1 + \frac{r_1}{r_2}};$$

el este maxim pentru r_1/r_2 minim, ceiace se obţine dacă $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = 0$. Se găseşte $g_2 = b_2$ şi $\eta_{max} = \frac{1}{1 + 2r_1\, b_2}$, Numeric, $\eta_{max} = 83{,}3\,\%$ pentru care $P_2 = 1250$ kW şi $\cos\varphi = 0{,}82$.

La mersul în gol $g_2 = 0$ şi $\overline{I}_0 = 30{,}3 + j\,227 = 229\ \underline{|82°25'}$ A, $\overline{U}_2 = 4{,}54 - j\,0{,}606 = 4{,}58\ \underline{|-7°35'}$ kV. La mersul în scurt circuit $\overline{Y}_2 = g_2 + j\,b_2 = \infty$ şi $\overline{I}_{sc} = \frac{U_0}{r_1 + j\,x_1} = 239{,}0 - j\,597{,}5 = 636\ \underline{|-68°10'}$ A, $\overline{U}_2 = 0$.

Toată discuţia se poate face cu ajutorul locurilor geometrice, găsindu-se uşor şi $\cos\varphi_{max}$, cu P şi η corespunzătoare.

4.31. Punând X_c reactanţa capacitivă, puntea fiind în gol, curenţii din cele două ramuri sunt egali şi egali cu $\overline{E}/(R - jX_c)$. Căderea de tensiune pe latura BC este $\overline{U}_{BC} = = -j\,X_s\,\overline{E}/(R - jC_s)$; căderea de tensiune pe latura BD este $\overline{U}_{BD} = R\,\overline{E}/(R - j\,X_c)$; rezultă $\overline{E}_2 = \overline{U}_{BD} - \overline{U}_{BC} = \overline{E}\ (R + j\,X_c)/(R - j\,X/_c)$ Modulul acestei tensiuni este egal cu 1, ceeace verifică ipoteza că $E_2 = \overline{E}_1 =$ const. Defazajul faţă de originea considerată este dat de relaţia $\mathrm{tg}\varphi = = \frac{2\,RX_c}{R^2 - X_c^2}$. Dacă se variază fie R fie C, locul lui $\mathrm{tg}\varphi$ este o cubică unicursală

trecând prin origine și asimptotă la axa reală. Variația defazajului este astfel continuă. Problema poate fi rezolvată și cu ajutorul teoriei cuadripolului,prima ecuație (17) a cuadripolului în condițiile problemei fiind $\overline{U_1} = \overline{A}\,\overline{U_2}$, de unde $\overline{U_2} = \overline{A}^{-1}\overline{U_1}$. Coeficientul A este dat de relația (18). Calculând se găsește aceiași relație ca mai sus. Este ușor de văzut că φ poate varia continuu între $\pm$ 90°.

4.32. Expresia tensiunii E_2 se stabilește ușor și este $\overline{E_2} = (R + j X_L)\overline{E_1}/R + j(X_L - X_C)$ și locul său este un arc de cerc ($\lambda \geqslant 0$). (*a*) Pentruca $\overline{E_2}$ să fie constant în modul este necesar ca $2LC\omega^2 = 1$, relație ce se scrie egalând numărătorul și numitorul modulului lui $\overline{E_2}$. (*b*) Defazajul este dat de relația $\mathrm{tg}\varphi = \lambda R X_C/[\lambda^2 R^2 + X_L(X_L - X_C)]$. φ poate varia între 0, pentru $\lambda = 0$ și 90° pentru $\lambda = \sqrt{X_L(X_L - X_C)}/R$. In acest montaj se obține numai jumătate din variația obținută în problema 4.31. Locul lui $\mathrm{tg}\varphi$ este deasemenea o cubică unicursală.(*c*) Se obține stabilind amplitudinea tensiunii de alimentare. (*d*) Variază produsul $2LC$ și deci aceste mărimi după o lege ce urmează a fi găsită.

4.33. Curentul în circuit este $\overline{I} = 2\overline{E}/(\lambda R - jX_C)$; căderea de tensiune în porțiunea CA este $\overline{U_{AC}} = -2jX_C\overline{E}/(\lambda R - jX_C)$ și deci $\overline{E_C} = \overline{E} - \overline{U_{AC}} = \dfrac{R + jX_C}{R - jX_C}\overline{E}$. Tensiunea obținută este constantă ca modul. dar variabilă ca fază. Locul ei este un cerc cu centrul în origină și defazajul variază între 0 pentru $\lambda = \infty$ și 180° pentru $\lambda = 0$, în sensul trigonometric. Cu datele numerice se poate construi diagrama vectorială corespunzătoare.

5. 5.1. $R = 2{,}86\,\Omega$; $R = 1{,}42\,\Omega$; $R = 5{,}72\,\Omega$.

5.2. $\overline{Z_{10}} = \dfrac{2}{3} + j\dfrac{1}{2}\,\Omega$; $\overline{Z_2} = \dfrac{1}{4} + j\dfrac{11}{12}\,\Omega$; $\overline{Z_{30}} = \dfrac{7}{6} + j\dfrac{2}{3}\,\Omega$.

5.3. $\overline{Z_{12}} = 2{,}5 - j\,7{,}5\,\Omega$; $\overline{Z_{23}} = 10 - j\,5\,\Omega$; $\overline{Z_{31}} = 5{,}76 - j\,3{,}86\,\Omega$.

5.4. Se transfigurează triunghiului ABD într'o stea, obținându-se $Z_{AO} = 2{,}2 - j\,0{,}184\,\Omega$; $\overline{Z_{BO}} = 16{,}69 + j\,0{,}276\,\Omega$; $\overline{Z_{DO}} = 39{,}4 + j\,0{,}55\,\Omega$. Se compun apoi impedanțele în paralel $\overline{Z_{BO}} + \overline{Z_{BC}}$ și $\overline{Z_{DO}} + \overline{Z_{DC}}$, obținându-se $\overline{Z_{OC}} = 14{,}71 - j\,13{,}75\,\Omega$. Astfel, impendanța echivalentă a punții este $\overline{Z} = \overline{Z_{AO}} + \overline{Z_{OC}} = 16{,}91 - j\,13{,}934\,\Omega$, de unde $R = 16{,}91\,\Omega$.

5.5. Se transfigurează triunghiurile ABF și DCF în stele obținându-se $AO_1 = BO_1 = DO_2 = CO_2 = 0{,}4\,\Omega$ și $FO_1 = FO_2 = 0{,}8\,\Omega$. Se transfigurează triunghiul AO_1O_2 într'o stea obținându-se $AO_3 = 0{,}165\,\Omega$, $O_1O_3 = 0{,}188\,\Omega$, $O_2O_3 = 0{,}660\,\Omega$. Se compun rezistențele în paralel O_3O_1C și O_3O_2C obținându-se $O_3C = 0{,}635\,\Omega$. Se găsește $I = 125$ A. Acest curent se distribue pe cele două ramuri în paralel găsindu-se $I_{O_3O_1C} = 50$ A și $I_{O_3O_2C} = 75$ A. Pentru a trece dela stea la triunghi se scrie că, în ambele circuite, între aceleași puncte avem aceeași cădere de tensiune. Se ține seama de sensul căderii de tensiune. Astfel, pentru latura AO_1 avem : $125 \times 0{,}165 + 50 \times 0{,}188 = I_{AO_1} \times 0{,}4$, de unde $I_{AO_1} = 75$ A; deasemenea, pentru latura O_1O_2 avem : $75 \times 0{,}660 - 50 \times 0{,}188 = I_{O_1O_2} \times 1{,}6$, de unde $I_{O_1O_2} = 25$ A, etc. Se găsește până la urmă, $I_{AB} = I_{BC} = I_{AD} = I_{DC} = 50$ A; $I_{AF} = I_{FC} = 25$ A; $I_{BF} = I_{FD} = 0$. Sensul curenților este indicat de succesiunea literelor.

5.6. *a*) Se transfigurează triunghiul ABD într'o stea. Se găsește $AO = 10\,\Omega$, $BO = 6\,\Omega$, $DO = 15\,\Omega$. Se compun impedanțele OBC și ODC găsindu-se $Z\alpha = 4{,}30 + j\,14{,}95\,\Omega$. Se găsește curentul total $\overline{I_{TOT}} = 133 - j\,139{,}5$ mA,

care se distribue apoi pe cele două ramuri în paralel găsindu-se $\bar{I}_{OBC}$ =100,75 — — j103,25 mA şi $\bar{I}_{OBC}$ = 32,25 — j36,25 mA. Se calculează căderea de tensiune pe ramurile BC şi DC, găsindu-se $\Delta \bar{U}_{BC}$ = 2063 + j 2013 mV şi $\Delta \bar{U}_{DC}$ = 2181 + j 1941 mV, de unde diferenţa de potenţial la bornele galvanometrului $\bar{V}_D - \bar{V}_B$ = 118 — j 72 mV. De unde $\bar{I}_g$ = 3,93 — j 2,40 mA, având valoarea eficace (egală cu modulul) $\bar{I}_g$ = 4,61 mA şi decalajul faţă de tensiune $\varphi \cong -31^0 30'$. b) Alegem circuitele $ABCA$, $ABCDA$ şi $ABDA$. Cele trei ecuaţii care dau curenţii ciclici sunt:

$$5(1+j)\bar{J}_1 + 5\ (1+j)\bar{J}_2 + 5\bar{J}_3 = 1$$

$$2(1+j)\bar{J}_1 + \quad (7+j8)\bar{J}_2 + 7\bar{J}_3 = 0$$

$$2\bar{J}_1 + 7\bar{J}_2 + 10\bar{J}_3 = 0$$

Cum $\bar{I}_g = J_3$ rezolvăm sistemul numai în raport cu această necunoscută, aplicând regula lui Crammer. Se găseşte $\bar{J}_3$ = — (3,96 — j 2,44) mA. Semnul (—) ne arată că sensul curentului în galvanometru este contrar sensului arbitrar dat de noi lui $\bar{J}_3$. Găsim apoi ca mai sus $\bar{I}_g$ = 4,65 mA şi φ = 31,°50′. c) Se suprimă latura BD al cărei curent trebue determinat. Diferenţa de potenţial între B şi D, $\bar{V}_B - \bar{V}_D$ este egală cu diferenţa dintre căderile de tensiune pe AB şi AD. Se găseşte $\Delta \bar{U}_{AB}$= 2,000 — j2,000 V şi ΔU_{AD}=1,639—j 1,967V; $\bar{V}_B - \bar{V}_D$= = 0,361 — j 0,033 V. Impedanţa reţelei între punctele B şi D, presupunând că impedanţa sursei este egală cu zero, este: Z_1 = 39,5+j 34,6 Ω. Curentul căutat va fi deci:

$$\bar{I}_{BD} = \frac{\bar{V}_B - \bar{V}_D}{\bar{Z}_{BD} + \bar{Z}_1} = 3{,}97 - j\,2{,}45 \text{ mA.}$$

cu I_g = 4,67 mA şi $\varphi = -32^0$,

5.7. Circuitul poate fi descompus în $p = 8 - 5 + 1 = 4$ circuite independente deci se pot scrie patru ecuaţii de curenţi. Se iau următoarele circuite independente (cu sensul curentului indicat de succesiunea literelor): ABF, BCF, CDF, $ABCDA$. Ecuaţiile curenţilor sunt:

$$(3+j2)\bar{J}_1 - \quad 2\bar{J}_2 \quad + \quad \bar{J}_4 = 0$$

$$-2\bar{J}_1 + (4+j1)\bar{J}_2 - \quad 2\bar{J}_3 + \quad j\bar{J}_4 = 0$$

$$- \quad 2\bar{J}_2 + (3+j2)\bar{J}_3 + \quad \bar{J}_4 = 0$$

$$\bar{J}_1 + \quad j\bar{J}_2 + \quad \bar{J}_3 + \quad (2+j)\bar{J}_4 = 100$$

Se observă uşor că, din cauza simetriei $\bar{J}_1 = \bar{J}_3$. Rezolvându-se sistemul se găseşte uşor $\bar{J}_1 = \bar{J}_3 = j$ 25 A; $\bar{J}_2$= — (6 — j 17) A; $\bar{J}_4$ = (38 — j 41) A. Deaici se deduc imediat curenţii din circuit, sensul lor fiind indicat de succesiunea literelor: $\bar{I}_{AB} = \bar{I}_{CD}$ = 38 — j 16 A; $\bar{I}_{BC}$ = 32 — j 24 A; $\bar{I}_{BF} = \bar{I}_{FC}$ = 6 + j 8 A; $\bar{I}_{DF} = I_{FA}$ = j 25 A. Curentul dat de sursă este $\bar{I}$ =38— — j 41 A.

5.8. (a) Aplicând metoda circuitelor independente se găsesc ecuaţiile 15,1 I_1 — 5,0 I_2 = 2,0 şi — 0,5 I_1 + 25,2 I_2 = — 4; de unde $I_{ab} = I_1$ = 0,0855 A, $I_{cb} = -I_L$ = 0,142 A, $I_{bc} = I_1 - I_L$ = 0,228 A. Potenţialele diverselor noduri, luând ca referinţă nodul e sunt: V_a = 1,99 V, V_b = 1,14 V; V_c = 3,97 V

Scanned with OKEN Scanner

(*b*) Se presupune că nu există sursa din dreapta (f.e.m. corespunzătoare egală cu zero); se găseşte $I'_{ab} = 0,141$ A, $I'_{cb} = -0,028$ A; $I'_{be} = 0,113$ A. Se presupune numai sursa din dreapta: $I''_{cb} = 0,170$ A, $I''_{ab} = -0,0563$ A; $I''_{be} = 0,114$ A. Suprapunând efectele se găseşte acelaşi rezultat ca mai sus.

5.9. Se pot forma două circuite independente. Se găseşte uşor $\overline{I}_{AEB} = 3 + j\,4$ A; $\overline{I}_{BRA} = 1,5 - j\,3$ A; $I_{BA} = 1,5 + j7$ A.

5.10. Se pot forma tot două circuite independente. Se găseşte $\overline{I}_{AE_1B} = 10 - j\,10$ A; $\overline{I}_{BE_2A} = 7,5 - j\,7,5$ A, $\overline{I}_{BA} = 2,5 - j\,2,5$ A.

5.11. Se pot forma trei circuite independente. Se găseşte $\overline{J}_{ABD} = 0,78 + -j1,97$ A; $\overline{J}_{BCD} = 3,42 + j\,1,23$ A; $\overline{J}_{ADCA} = 12,57 - j\,0,15$ A, de unde $\overline{I}_{AB} = = \dot{J}_{ABD}$; $\overline{I}_{BC} = J_{CDA}$ şi $\overline{I}_{BD} = -(2,64 - j\,0,74)$ A; $\overline{I}_{AD} = 11,79 - j\,2,12$ A; $\overline{I}_{DC} = 9,15 - j1,38$ A; $\overline{I}_{CA} = \overline{J}_{ADCA}$.

5.12. (*a*) Ecuaţiile circuitului sunt: $10,1\ V_a - 0,1\ V_h = 20$; $-0,1\ V_a + 0,35\ V_b - 0,05\ V_c = 0$ şi $-0,05\ V_b + 5,05\ V_c = 20$, de unde rezultă $V_a = 1,99$ V, $V_b = 1,14$ V, $V_c = 3,97$ V. Curenţii din laturi sunt $I_{ab} = G_{ab}\ (V_a - -V_b) = 0,0855$ A; $I_{cb} = G_{cb}\,(V_e - V_b) = 0,142$ A, $I_{be} = G_{be}\cdot V_b = 0,228$ A.

(*b*) Se presupune numai sursa din stânga; se găseşte $V'_a = 1,99$ V, $V'_{ab} = 1,42$ V, $V'_{be} = 0,568$; $V'_{cb} = -0,562$ V. Se presupune numai sursa din dreapta; se găseşte $V''_c = 3,97$ V, $V''_{cb} = 3,40$ V, $V''_{be} = 0,569$ V; $V''_{ab} = -0,563$ V. Suprapunând efectele se găseşte $V_{ab} = 0,86$ V, $V_{cb} = 2,84$ V; $V_{be} = V_b = 1,14$ V. Restul ca mai sus. S'a notat $V_{ab} = V_a - V_b$. A se compara cu problema 5.8.

5.13. *a*) punând $\overline{Z}_1 = R$, $\overline{Z}_2 = -\dfrac{j}{C\omega}$ $\overline{Z}_2 = j\,L\omega$, avem imediat $\overline{I}_L = \overline{U}_{ab} / \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_3\right)$.

$$\text{Cum}\quad \overline{Z}_{ab} = \overline{Z}_1\,\overline{Z}_2 / \left(\overline{Z}_1 + Z_2\right) \text{ şi } \overline{U}_{ab} = \overline{E}_c = \frac{\overline{E}}{\dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + 1}$$

E_e fiind tensiunea la bornele condensatorului la mers în gol (fără inductanţă) şi deoarece $\overline{E} = \overline{E}_R + \overline{E}_C$, rezultă imeadit $\overline{I}_L = \overline{E}\,\overline{Z}_2 / \left(Z_1\overline{Z}_2 + \overline{Z}_2\,\overline{Z}_3 + \overline{Z}_3\,\overline{Z}_1\right) = \overline{E}\left[R\,(1 - LC\omega^2) - j\,L\omega\right] / \left[R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2\right]$;

$$b)\ \text{se scrie } \overline{Z} = \overline{Z}_1 + \frac{\overline{Z}_2\,\overline{Z}_3}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} \text{ şi } I = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}};\ \text{apoi } \overline{I}_L = \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3}\,\overline{I}.$$

Calculând se găseşte aceeaşi expresie ca mai sus;

c) $I_L = -jE/L\omega$.

5.14. Dacă $\overline{Z}_{ab} = R = 20\,\Omega$, rezultă $\overline{I}_{ab} = \overline{U}_{ab} / \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_1\right)$ unde $\overline{U}_{ab}$ este tensiunea în gol la bornele lui $\overline{Z}_{ab}$, care tensiune este egală cu tensiunea de la bornele capacităţii. Avem:

$$\overline{U}_{ab} = -j\,15\,\frac{100 + j\,50}{11,0 + j\,9,5 - j\,15} = -j\,15\,\frac{100 + j\,50}{11 - j\,5,5}$$

Scanned with OKEN Scanner

$\overline{Z}_T$ este impedanţa totală privită dela bornele a şi b. Vom avea:

$$\overline{Z}_T = j\,25 + \frac{(11 + j\,9{,}5)\,(-j\,15)}{11 - j\,5{,}5} = \frac{280 + j\,110}{11 - j\,5{,}5}$$

Se găseşte $\overline{I}_{ab} = 1{,}5 - j\,3{,}0$ A (ca şi în problema 5.8).

5.15. $\overline{I}_c = 1{,}5 + j\,7$ A.

5.16. Introducându-se pila în ramura ab, se găseşte uşor că în ramura unde a fost pila curentul este $\overline{I} = 1{,}5 - j\,3$ A.

5.17. Linia fiind perfect simetrică, se poate trata numai pentru o fază. Fiind perfect izolată faţă de pământ şi neglijându-se capacitatea linia poate fi considerată ca un dipol. Luând $\overline{U}_2$ ca origine de fază, ecuaţia dipolului dă (1) $U_1 \underline{|\theta} = U_2 + Z\underline{|\psi}.I\ \underline{|-\varphi_2}$.

Introducând datele numerice $R = 0{,}35\ \Omega$/km, $X = 0{,}738\ \Omega$/km, rezultă $\overline{Z} = 49\ \underline{|64^0 38'}$; apoi $\overline{I} = 500\ \underline{|-25^0 50'}$ de unde ecuaţia dipolului (1) se poate scrie $U_1 \underline{|\theta} = 60000/\sqrt{3} + 24500\ \underline{|38^0 48'}$ V. Scriind explicit şi identificând părţile reale şi complexe, se găseşte uşor $\overline{U}_1 = 55{,}95\ \underline{|15^0 58'}$ kV; de aci $\varphi_1 = \theta - \varphi_2 = 41^0 48'$ şi $\eta = 74{,}87\%$. Diagrama cerută se construeşte uşor; raza cercurilor este $r = \dfrac{U_1 U_2}{Z} = 39{,}6$ MVA; centrul cercului O_1 se găseşte la $\overline{O\,O_1} = \dfrac{U_1^2}{Z} = 63{,}9$ MVA; centrul cercului O_2 la $\overline{O\,O_2} = \dfrac{U_2^2}{Z} = 24{,}6$ MVA; se ia scara 1 cm = 10 MVA. Trebue ţinut seama că diagrama este construită numai pentru o fază. Pentru a obţine puterea totală în sistem, rezultatele se înmulţesc cu 3 sau se împarte modulul scării cu 3.

5.18. Problema se rezolvă grafic cu ajutorul diagramei cu doi poli de tensiune. Avem $\overline{Z} = 1 + j\,10 = 10{,}05\ \underline{|84^0 17'}$. Raza comună cercurilor este $r = \dfrac{EU}{Z} = 10{,}95$ MVA. Centrul cercului O_2 se găseşte la $\overline{OO_2} = U^2/Z = 9{,}94$ MVA. Centrul cercului O_1 se găseşte la $\overline{OO_1} = E^2/Z = 12{,}05$ MVA. Diagrama se construeşte luând scara 25 mm = 10 MVA (fig. 5.18). *)

Când vectorul $\overline{O_2N_2}$ este paralel cu axa OP puterea debitată este maximă. Se găseşte astfel OP_2, proiecţia vectorului $\overline{S}_2$ pe axa puteri reale. Luând $S_2 = 5000$ kVA ca unitate, se găseşte $P_2 = 3390$ kW. Randamentul este $\eta = \overline{OP_2} : \overline{OP_1} = 80\%$, deoarece OP_1 reprezintă puterea absorbită de maşină.

5.19. Problema se rezolvă ca şi cea de mai sus, cu ajutorul diagramei cu doi poli de tensiune a dipolului. Trebue să se lucreze cu tensiunea pe fază. Procedând ca în cazul precedent se găseşte: $\overline{Z} = 0{,}2 + j\,2{,}2 = 2{,}21\ \underline{|84^0 48'}\,\Omega$; $\overline{OO_1} = 234$ kVA; $\overline{OO_2} = 150$ kVA; $r = 188$ kVA. Diagrama s'a construit luând scara 10 mm = 100 kVA (fig. 5.19).

---

*) Scările indicate în soluţii nu se potrivesc în general cu scările figurilor

P_2 s'a luat cu semnul (—) deoarece este o putere negativă. Deasemenea, diagrama fiind construită numai pentru o fază, s'a luat o treime, din puterea absorbită totală. Din diagramă se găsește acum $S_2 = 86{,}5$ kVA, de unde $I = 150$ A, $\cos\varphi = 0{,}960$ capacitiv, deoarece motorul sincron produce putere reactivă.

5.20. $\overline{Z} = 10 \underline{|15^0} = 9{,}659 + j\,2{,}588\ \Omega$; $\overline{Y_1} = 0.014 - j\ 0{,}026 = 0{,}030 \underline{|-61^0 40'}$ S; $\overline{Y_2} = 0{,}019 - j\ 0{,}055 = 0{,}058 \underline{|-71^0}$ S; $\overline{Z_0} = 5{,}345 + j\,7{,}057 = 8{,}852 \underline{|52^0 55'}\ \Omega$.

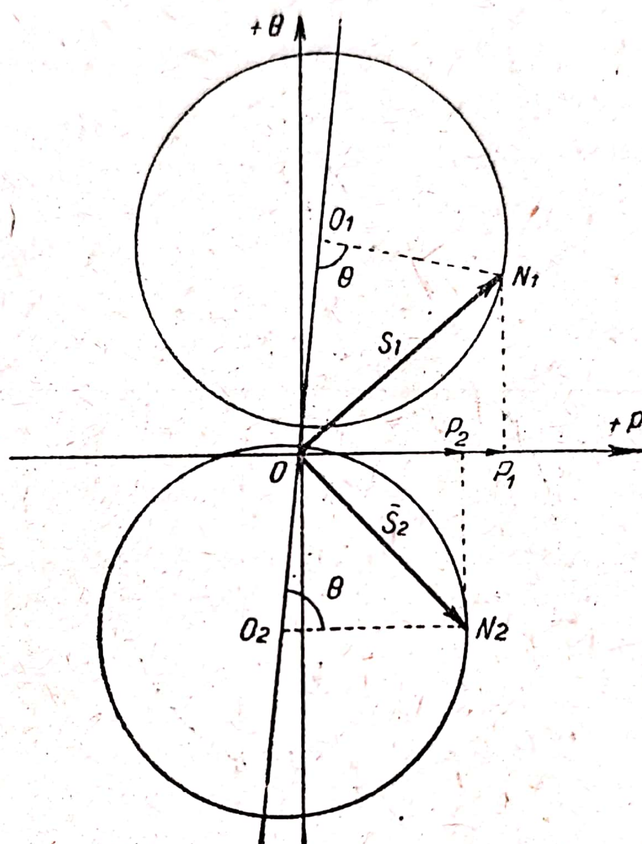


Fig. 5.18

5.21. $\overline{Y} = \frac{1}{10} \underline{|-75^0}$ S; $Z_1 = 5{,}523 + j\ 1{,}945 = 5{,}856 \underline{|19^0 24'}\ \Omega$; $= 2{,}596 + j\,1{,}416 = 2{,}957 \underline{|28^0 32'}\ \Omega$. Impedanța caracteristică este egală cu cea din problema 5.20.

5.22. Cablul fiind scurt, poate fi asemuit cu un cuadripol în T în care $\overline{Z_1} = \overline{Z_2} = \frac{1}{2}(R_T + j\ \omega L_T)$ și $\overline{Y} = j\,\omega C_T$. Constantele cuadripolului se deduc din $\overline{A} = \overline{D} = 1 + \overline{Z}\overline{Y}$, $\overline{B} = 2\,\overline{Z} + \overline{Z}^2\ \overline{Y}$, $\overline{C} = \overline{Y}$. Ecuațiile cuadripolului devin $\overline{U_1} = \left[\overline{A}\overline{Z}_0 + \overline{B}\right]\overline{I_2}$ și $\overline{I_1} = \left[\overline{C}\ \overline{Z}_0 + \overline{A}\right]\overline{I_2}$ (căci $\overline{U_2} = \overline{Z}_0\,\overline{I_2}$), de unde se deduc $\overline{I_1}$, $\overline{I_2}$ și curentul de încărcare $\overline{I_i} = \overline{I_1} - \overline{I_2}$. Pentru datele numerice se găsește ușor $\overline{I_2} = 419 + j\ 820 = 920 \underline{|62^0 58'}$ A; $\overline{I_1} = 450 + j\ 1056 = 1145 \underline{|66^0 46'}$ A; $\overline{I_i} = 31 + j\,236 = 238 \underline{|81^0 56'}$ A.

5.23. Ca şi în cazul precedent se asimilează linia cu un cuadripol în T. Se găseşte: $\overline{U}_1 = 39{,}011 + j\,1{,}788 = 39{,}052 \underline{|2^0 38'}$ kV, $\overline{I}_1 = 191{,}91 - j\,140{,}05 = 238 \underline{\,-36^0 29'}$ A; $\varphi_1 = \theta - (-\varphi'_1) = 2^0 38' + 36^0 29' = 39^0 07'$; $\cos\varphi_1 = 0{,}776$; $\eta = 92{,}6\,\%$.

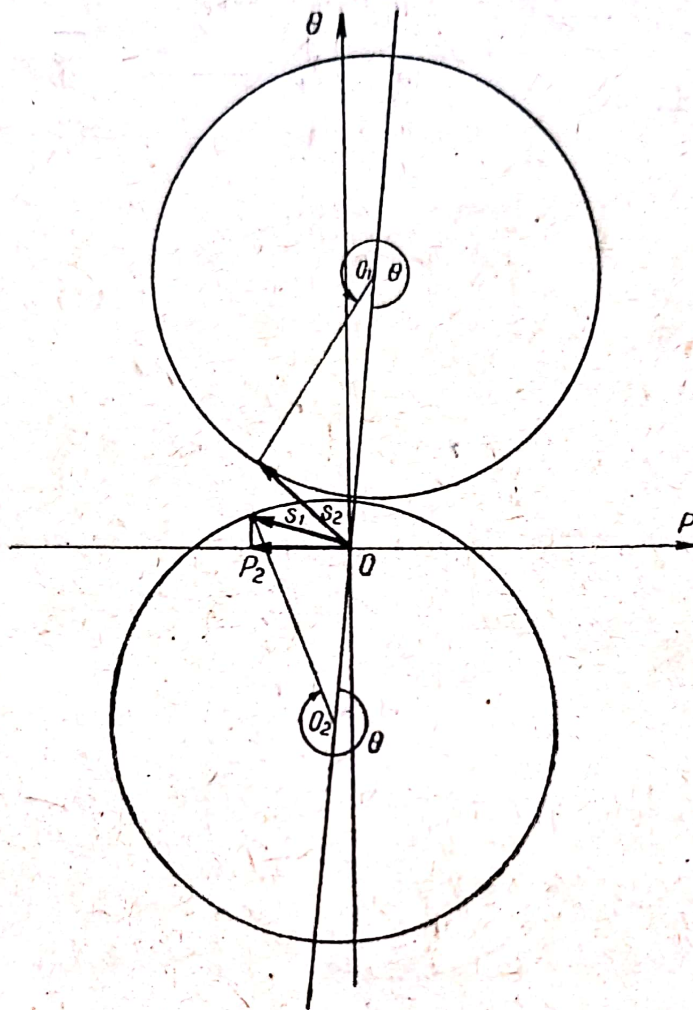


Fig 5.19

5.24. $\overline{U}_1 = 37{,}095 - j\,0{,}023 = 37{,}095 \underline{|-0^0 02'}$ kV; $\overline{I}_1 = 192{,}7 - j\,49{,}0 = 198{,}8 \underline{|-14^0 15'}$ A; $\varphi_1 = -14^0 17'$; $\cos\varphi_1 = 0{,}969$ ind; $\eta = 92\,\%$.

Observaţie: Deşi randamentul este puţin mai scăzut în cazul de faţă, transmiterea energiei prin cablu are avantajul unui factor de putere mult mai ridicat şi deci o solicitare mai mică a generatoarelor din centrală.

5.25. Prin reducerea succesivă a diverselor impedanţe expresia curentului devine:

$$\overline{I} = \overline{U}_1 \left[\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\overline{Z}} + \dfrac{1}{\overline{Z}_3}}} \right]$$

sau numeric:

$$\overline{I} = \left[\frac{1}{5} + \cfrac{1}{1 - j2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3+j4} + \cfrac{1}{4-j2+\lambda(1+j3)}}}\right] .120 \underline{|30^0}$$

a) *Determinarea analitică a locului.* Făcând toate calculele, se obţine:

$$\overline{I} = \frac{106{,}312 - 23{,}804\,\lambda + j\,(29{,}856 + \lambda\, 53{,}228)}{31 - 2\lambda + j\,(-2 + 14\,\lambda)} \times 21 = x + j\,y.$$

Pentru a găsi ecuaţia cercului, eliminăm numitorul, identificăm părţile reale şi complexe şi eliminăm pe λ între cele două ecuaţii obţinute. Se găseşte:

$$x^2 + y^2 - 158{,}747\,x - 85{,}689\,y + 7753{,}054 = 0$$

un cerc cu centrul în punctul de coordonate $a = 79{,}373$ A, $b = 42{,}844$ A şi raza $r = 19{,}637$ A. Pentru $\lambda = \infty \therefore Z = \infty$ şi deci $\overline{I}\infty = 86{,}2 \underline{|16^0}$ A $= 83{,}244 + j\,23{,}814$ A. Pentru $\lambda = 0 \therefore \overline{Z} = 4 - j2\,\Omega$ şi $\overline{I}_3 = 69{,}28 + j\,58{,}5 = 90{,}7 \underline{|40^0 10'}$A.

Pentru $\lambda = 1$, $\overline{I}_1 = 85{,}057 + j\,61{,}171 = 104{,}5 \underline{|35^0 20'}$ A.

b) *Determinarea locului prin inversiune* (planşa I), Inversiunea s'a efectuat din aproape în aproape: se inversează conjugata dreptei $\Delta \equiv 4 - j2 + \lambda(1 + j3)$ faţă de un cerc unitar (α_1) de rază $k = 10$ cm obţinându-se un cerc (C_1) (—·—·—·—). Dacă dreapta a fost construită la o scară de modul $[a] = 2$ cm., atunci modulul scării cercului este $[x] = \frac{[k^2]}{[a]} = 50$ cm. [scara *2*]. Faţă de acelaşi cerc unitar se inversează şi $\overline{Z} = 3 + j4$. Pentru a face suma acestor admitanţe se mută axele în punctul O_2. Se inversează acest cerc în raport cu O_2, luându-se un cerc unitar cu raza de 10 cm, deci $\overline{O_2S_1} \times \overline{O_2T_1} = 100$ iar modulul noii scări rezultă $[y] = 2$ cm: scara va fi aceeaşi cu prima scară *1*. Luând simetricul acestui cerc faţă de axa reală, se obţine cercul C_2 al impedanţelor ramurilor în paralel (—··—··—). Mutând axele în punctul O_3, vârful vectorului $-\overline{Z}_2$, l-am adunat cu acesta. Se inversează acum cercul C_2 faţă de O_3 luându-se un cerc unitar (α_3) cu raza de 8 cm, deci $\overline{O_3S_2} \times \overline{O_3T_2} = 64$ şi modulul noii scări $[z] = 32$ cm [scara *3*]. Se ia simetricul acestui cerc faţă de axa reală, obţinându-se cercul C_3; mutând origina în punctul O_4, obţinem astfel cercul admitanţei totale (—). Pentru a avea cercul curentului, înmulţim cu $U\underline{|\varphi} = 210 \underline{|30^0}$, ceeace revine în a roti ultimele axe cu -30^0 şi a găsi modulul noii scări. Aceasta se obţine din scara *3* înmulţind elementele cu 210 (scara *4*). Verificare $\overline{I}_1 = 105 \underline{|36^0 20'}$ A: eroare de $+ 0{,}5\,\%$.

c) *Determinarea locului prin inversiune simplificată, cu un singur cerc* (planşa II). Construcţia cercului C_1 şi mutarea originii în punctul O_2 se face ca mai sus. Scările *1* şi *2* rămân aceleaşi. Pentru a inversa în raport cu O_2 pe C_1 în el însuşi luăm raza cercului unitar $k^2_2 = \overline{O_2T}^2 = \overline{11{,}5}^2$. Modulul noii scări $[x'] = 2{,}655$ [scara *3'*]. Pentru a avea efectuată inversiunea se ia inversul axei complexe. Se mută originea în O_3, vârful vectorului $-\overline{Z}_2$, faţă de care se ia acum inversul luând $k^2_3 = \overline{O_3T_1}^2 = \overline{12{,}7}^2$. Modulul noii scări $[y'] = 61$ cm [scara *4'*]. Se schimbă din

nou sensul axei complexe obţinându-se cercul C_3; restul ca în prima metodă. Verificare $\overline{I}_1 = 104{,}6 \,|\underline{35^0 30'}$ eroarea 0,095 %.

d) *Determinarea locului prin metoda industrială* (planşa III). Chestiunea nu prezintă nici o dificultate şi a mai fost tratată (problemele 4.21 şi 4.24).

e) *Trasarea caracterist ii* se face uşor calculând sau luând din epură valoarea diverşilor curenţi şi trasând apoi curba $I = f(\lambda)$.

f) Cercul C_2 dă admitanţa ramurilor în paralel. Calculul analitic nu prezintă nici o dificultate.

5.26. Raportul de transformare este $k = \dfrac{578\sqrt{3}}{370} = 2{,}7 \therefore k^2 = 7{,}3$. Din încercarea de scurtcircuit se deduce $R_1 = R_2' = 0{,}0715\ \Omega \therefore R_2 = 0{,}00982\ \Omega$. Apoi $X_1 = X_2' = 0{,}522\ \Omega \therefore X_2 = 0{,}0715\ \Omega$. Din proba de mers în gol se deduce (se ia curentul pe fază) $p_0 = 3306$ W, $g_0 = 0{,}0033$ S şi $b_0 = 0{,}1035$ S.

5.27. $k = 3{,}33 \therefore k^2 = 11{,}1$ $R_1 = R_2' = 0{,}1623\ \Omega \therefore R_2 = 0{,}01465\ \Omega$; $X_1 = X'_2 = 0{,}9345\,\Omega \therefore X_2 = 0{,}084\ \Omega$; $p_0 = 3145$ W, $g_0 = 0{,}00314$ S, $b_0 = 0{,}0502$ S.

5.28. Ca şi în cazul motorului asincron, datele experimentale permit determinarea globală a inductanţei şi rezistenţei. Astfel, în unităţile date (a se verifica) avem $R = (R_1 + R_2') = \dfrac{P_{sc}}{10^3 S} \cdot \dfrac{U^2}{S}$; tensiunea de scurtcircuit ne dă impedanţa totală:

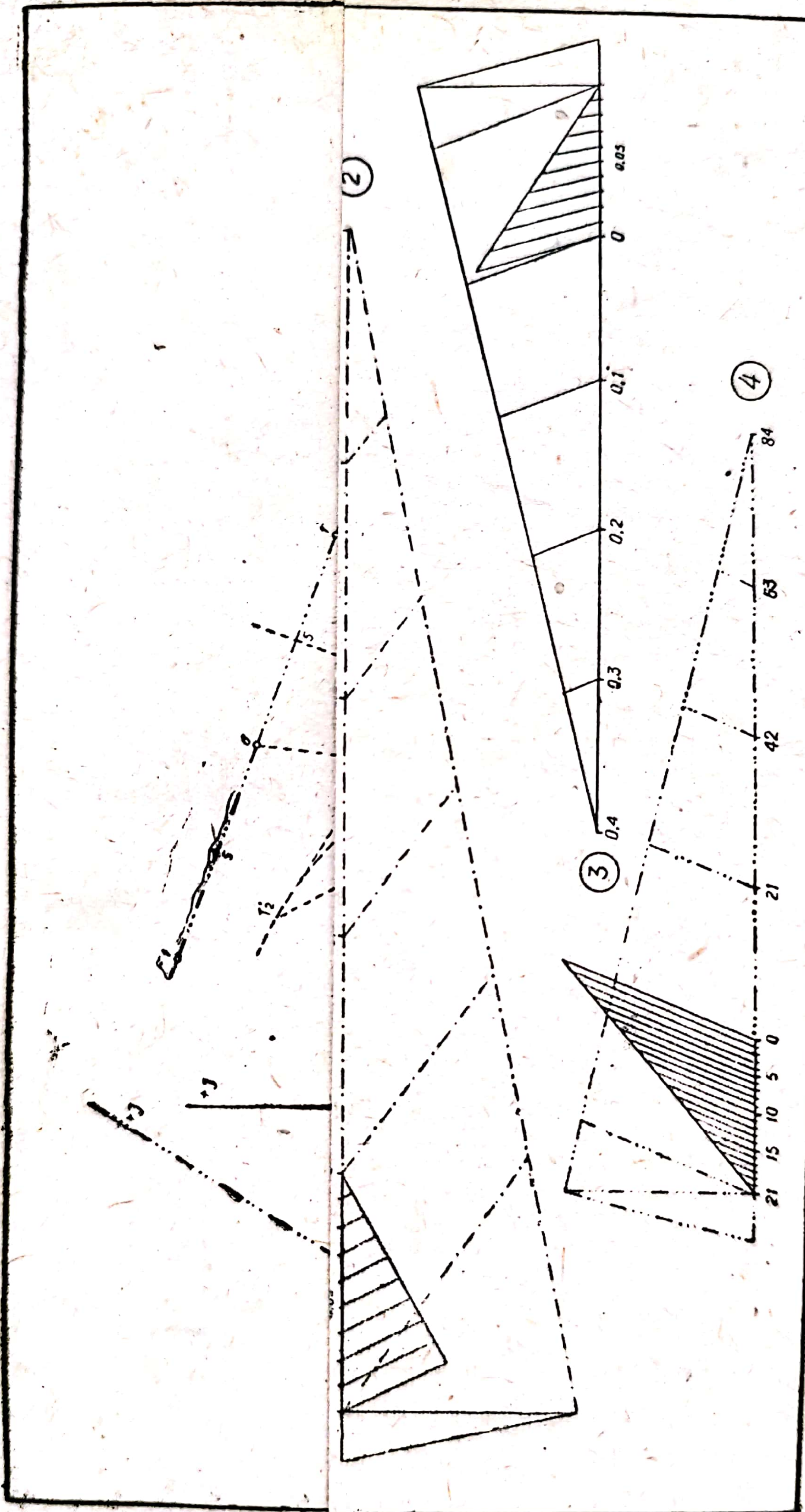
$$Z = \frac{e_{sc}}{100} \cdot \frac{U^2}{S}$$

de unde se deduce reactanţa globală $X = (X_1 + X_2') = \sqrt{Z^2 - R^2}$; pierderile de mers în gol determină conductanţa $g_0 = \dfrac{P_0}{10^3 S} \cdot \dfrac{S}{U^2}$ iar susceptanţa este determinată de curentul de mers în gol $b_0 = \dfrac{I_0}{100} \cdot \dfrac{S}{U^2}$.

Notă. S'a pus în evidenţă factorul U^2/S (în care U este în kV şi S în MVA) care intră în calculul tuturor elementelor caracteristice ale transformatorului. U se mai numeşte şi tensiunea de referinţă. Ea poate fi una din tensiunile transformatorului, sau o tensiune oarecare. Pentru calculul numeric luăm $U_1 = 110$kV. Se găseşte uşor: $R = 2{,}43\ \Omega \therefore R_1 = R_2' = 1{,}215\ \Omega \therefore R_2 = \left(\dfrac{10{,}5}{110}\right)^2 \times 1{,}215 = 0{,}0111\ \Omega$; $Z = 40{,}25\Omega \therefore X = 40{,}18\ \Omega \therefore X_1 = X_2' = 20{,}09\ \Omega \therefore X_2 = 0{,}183\Omega$; $g_0 = 6{,}2 \times 10^{-6}$ S; $b_0 = 104 \times 10^{-6}$ S.

Pentru determinarea constantelor cuadripolului avem $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2' = 1{,}25 + j20{,}09\ \Omega$ şi $\overline{Y} = (6{,}2 - j\,104) \times 10^{-6}$ S. Se găseşte $\overline{A} = \overline{D} = 1{,}002$; $\overline{B} = 2{,}433 + j\,40{,}222\ \Omega$; $\overline{C} = \overline{Y} = (6{,}2 - j\,104) \times 10^{-6}$ S.

5.29. 1° Se scriu ecuaţiile cuadripolului sub forma clasică (17) şi se găseşte: $\overline{A} = 1{,}25$; $\overline{B} = 12{,}5 + j\,10\ \Omega$; $\overline{C} = -j\ 0{,}025$ S; $\overline{D} = 1 - j\,0{,}25$. De aici



Scanned with OKEN Scanner

rezultă constantele circuitului $\overline{T}$: $\overline{Z}_1 = j\,10\,\Omega$; $\overline{Z}_2 = 10\,\Omega$; $\overline{Y} = -j\,0{,}025$ S.
2° Transformatorul fiind perfect, ecuaţia sa este:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2' + (\overline{Z}_1 + k^2\overline{Z}_2)\,\overline{I}_1$$

Dar $k = A = 1{,}25$ şi deci $\overline{U}_2' = 1{,}25 \times 10 = 12{,}5$ kV$_1$. Se găseşte analog $\overline{Z}_1 + k^2\overline{Z}_2 = 15{,}625 + j\,10$ şi $\overline{I} = 400\,(0{,}6 - j\,0{,}8)$ de unde $\overline{U}_1 = 19{,}45 - j\,2{,}6 = 19{,}26\,\underline{|-7°37'}$ kV.

5.30. 1° Se scrie ecuaţia transformatorului raportată la secundar în care se pun valorile cunoscute. Se găseşte $\overline{U}_1 = 13{,}6 + j\,63{,}4$ V, sau revenind la înalta tensiune, $\overline{U} = 81{,}6 + j\,380{,}4 = 389\,\underline{|77°52'}$ V, adică 3,26%. 2° $\cos\varphi = 0{,}211$ ind.
3° Curentul de magnetizare se găseşte $\overline{I}_{01} = 2\,\underline{|-80°30'}$ A. Dacă alimentarea se face pela partea de joasă tensiune $\overline{I}_{02} = 12\,\underline{|-75°05'}$ A. Se calculează apoi impedanţele $\overline{Z}_{01}, \overline{Z}_{sc}, \overline{Z}_{02}$ de unde se deduce $\overline{A} = 8{,}3\,\underline{|16°45'}$, $\overline{B} = 11{,}22\,\underline{|75°10'}\,\Omega$, $\overline{C} = 13{,}8 \cdot 10^{-2}\,\underline{|-63°45'}$ S, $\overline{D} = 1{,}02\,\underline{|-2°42'}$. Se calculează apoi constantele circuitului $\overline{T}$: $\overline{Z}_1 = 729 + j\,5243 = 5250\,\underline{|82°05'}\,\Omega$; $\overline{Z}_2 = 6^2\,(35{,}7 + j\,142{,}2) = 6^2 \cdot 146{,}6\,\underline{|75°55'}\,\Omega$; $\overline{Y} = \overline{C}$.

Notă. Impedanţa secundarului, trebuind să fie raportată la primar, s'a înmulţit cu $k^2 = 6^2$.

5.31. Se iau cca circuite independente circuitele *ABFA*, *AFDA*, *ADCA* şi *BCDB*. Condiţia de echilibru este ca în ramura *FD* să nu treacă niciun curent. Pentru uşurinţa calculului se ia $\overline{I}_{AFDA} = \overline{I}_2 + \overline{I}_3$. Calculul nu prezintă nicio dificultate şi, prin identificarea părţilor reale şi a celor complexe, se găsesc condiţiile de echilibru ale acestei punţi $L = SC\,(Q + r + \frac{Q}{P}r)$ şi $R = QS/P$. Numeric se găseşte $L = 1{,}4$ H şi $R = 500\,\Omega$.

5.32. Punând $\overline{Z}_c = R_C - j\,X_C$ şi $Z_L = R_L + j\,X_L$ neglijând impedanţa galvanometrului şi calculând printr'o metodă oarecare curentul din galvanometru se găseşte

$$\overline{I}_g = \frac{\overline{E}\,(\overline{Z}_C\overline{Z}_L - R_1R_2)}{R_1R_2\,(\overline{Z}_L + \overline{Z}_C) + \overline{Z}_L\overline{Z}_C\,(R_1 + R_2)}$$

Punând condiţia de echilibru $\overline{I}_g = 0$, rezultă $\overline{Z}_C\,\overline{Z}_L - R_1R_2 = 0$, de unde

$$L_L = \frac{C\,R_1\,R_2}{R_s^2\,C^2\omega^2 + 1}\,H \quad \text{şi} \quad R_L = \frac{C^2\omega^2\,R_1R_2\,R_C}{R_c^2\,C^2\omega^2 + 1}\,\Omega$$

Inductanţa L_L este independentă de rezistenţa sa proprie.

5.33. Transformatoarele fiind perfecte pot fi asemuite cu dipoli având aceleaşi tensiuni primare şi secundare. $\overline{I}_1$ şi $\overline{I}_2$ fiind curenţii debitaţi de transformatori, se găseşte uşor că $\overline{I}_1/\overline{I}_2 = \overline{Z}_2/\overline{Z}_1$ de unde se deduce apoi că $\overline{I}_1 = \overline{I}\overline{Z}_2/(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)$ şi $\overline{I}_2 = \overline{I}\overline{Z}_1/(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)$, $\overline{I}$ fiind curentul total debitat de ambele transformatoere. Se poate arăta uşor că $\overline{Z} = C\,(k' + k'')$, C fiind o constantă de proporţionalitate şi

k', k'' rezistența și reactanța exprimate în procente. Numeric se găsește $I = 92,5 - j\,69,4$ A; $\overline{I_1} = 31,5 - j\,33,2$ A; $\overline{I_2} = 61,1 - j\,36,2$ A; având respectiv modulele 45,7 A și 71 A. Rezultă că transformatorul care are tensiunea de scurtcircuit mai mică se va încărca cu 12,3 % mai mult decât sarcina nominală și cu 55 % mai mult decât celălalt.

5.34. Alternatorul se asemuește cu un dipol, tensiunea de intrare fiind E și cea de eșire U. Se utilizează diagrama cu doi poli de tensiune. Deoarece se neglijează rezistența proprie a alternatorului, $\psi = 90^0$. Se găsește ușor $\overline{OO_2} = 7200$ kVA și $\overline{OO_1} = 10375$ kVA, $R = 8650$ kVA. Diagrama se construește numai pentru o fază. Se va lua deci $S/3$. Se găsește $P_2' = 3250$ kW/fază și $Q_2' = 750$ kVAR/fază sau total $P_2 = 9750$ kW și $Q_2 = 2250$ kVAR; $\cos\varphi_2 = 0,975$ inductiv, mașina *producând* putere reactivă. Pentru ca alternatorul să *absoarbă* putere reactivă, trebue să funcționeze subexcitat. Se ia simetricul lui N_2, se găsește noua rază $\overline{ON_2'}$, din care se deduce $E' = 3500$ V; rezultă că excitația trebue redusă cu 15,5 %.

5.35. Se scrie că tensiunea, respectiv curentul de ieșire a primului cuadripol este egală cu tensiunea, respectiv curentul, de intrare a celui de al doilea cuadripol. Se găsește $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} + \overline{B_1}\overline{C_2}$; etc. Numeric se găsește: $\overline{A} = 0,9727 + j\,0,0042$; $\overline{B} = 22,05 + j\,106,36\,\Omega$; $\overline{C} = (0,123 + j2,54)\,10^{-4}$ S; $\overline{D} = 0,9957 + j\,0,0023$.

5.36. Același procedeu ca mai sus extins la trei cuadripoli. Se găsește $\overline{A} = \overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3} + \overline{A_1}\overline{B_2}\overline{C_3} + \overline{B_1}\overline{C_2}\overline{A_3} + \overline{B_1}\overline{D_2}\overline{C_3}$, etc.

5.37. Ca mai sus. Se găsește $\overline{A} = 0,9788 + j\,0,0032$; $\overline{B} = 21,906 + 161,09\,\Omega$; $\overline{C} = (0,085 + j\,2,164)\,10^{-4}$ S; $\overline{D} = 0,9799 + j\,0,0030$.

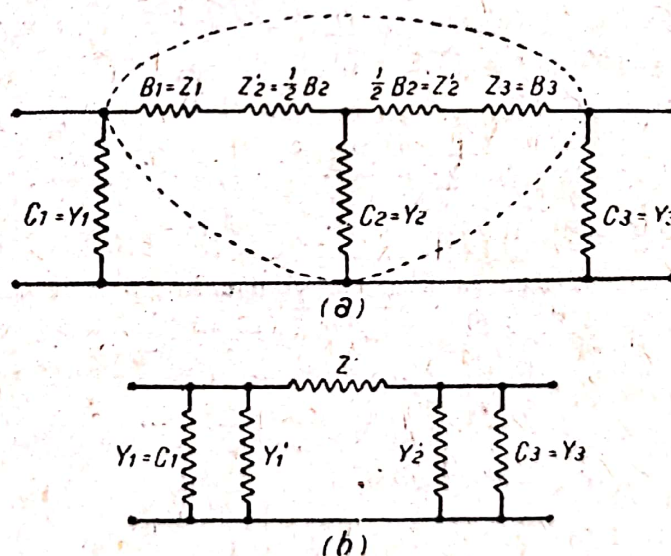


Fig 5.38

5.38. Schema echivalentă circuitului este dată în fig. 5.38 *a*. Se transfigurează circuitul în T central într'un circuit π echivalent (steaua în triunghi). Se obține $\overline{Z}' = \overline{Z}'_1 + \overline{Z}'_3 + \overline{Z}'_1\,\overline{Z}'_3\,\overline{Y}'_2$ în care $\overline{Z}'_1 = \overline{Z}_1 + \overline{Z}'_2 = \overline{B}_1 + \overline{B}_2/2$; $\overline{Z}'_3 = \overline{Z}_3 + \overline{Z}'_2 = \overline{B}_3 + \overline{B}_2/2$; $\overline{Y}' = \overline{Y}_1 + \overline{Y}'_1$; $\overline{Y}'' = \overline{Y}_3 + \overline{Y}'_2$ în care $\overline{Y}'_1 = \overline{Z}'_3\,\overline{Y}_2/\overline{Z}'$ și $Y'_2 = \overline{Z}'_1\,\overline{Y}_2/\overline{Z}'$. Se obține astfel un circuit echivalent în π cu aju-

torul căruia se determină constantele căutate. Numeric se găseşte $\bar{A} = \bar{D} = 0{,}8872 + j\,0{,}0137$; $\bar{B} = 29{,}41 + j\,286{,}4\ \Omega$; $\bar{C} = (0{,}079 + j\,7{,}391)\ 10^{-4}$ S.

5.39. Asemuind linia cu un dipol, tensiunea la sosire este $\bar{U}_2 = \bar{U}_1 - \bar{Z}\bar{I}$, în care se ia ca origine de fază tensiunea la alternator. Puterea la plecare fiind $\bar{U}_1\bar{I}_c$ şi la sosire $\bar{U}_2\bar{I}_c$, randamentul este (real $\bar{U}_2\bar{I}_c$)/(real $\bar{U}_2\bar{I}_c$). Sistemul fiind trifazat, se va lucra pe fază. Numeric se obţine: $\bar{I} = 28{,}8 - j\,21{,}6$ A, circuitul fiind inductiv. $\bar{U}_2 = 3264{,}16 - j\,207{,}36$ V; $P_1 = 100$ kW, $P_2 = 98{,}485$ kW; $\eta = 98{,}5\%$.

5.40. Luând ca origine de fază tensiunea la sosire şi presupunând că factorul de putere la utilizare este egal cu 1, ecuaţia tensiunilor este $U\,(\cos\theta + j\sin\theta) = \bar{U} + \bar{Z}\bar{I}$. Se deduce $\operatorname{tg}\theta = XI/(U + RI)$ şi randamentul căutat $U\cos\theta\cdot I/UI = \cos\theta$. Numeric $\eta = 99{,}60\%$. R şi X sunt rezistenţa şi reactanţa liniei.

5.41. Se ia ca origine de fază tensiunea simplă la bornele motorului. Circuitul este un dipol cu ecuaţia $U_1\ (\cos\theta + j\sin\theta) = \bar{U}_2 + \bar{Z}\bar{I}$. Curentul $\bar{I}$ se determină din relaţia $\bar{I} = \dfrac{P_2}{3\,U_2\cos\varphi}(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \dfrac{P_2}{3U_2} + j\dfrac{P_2\operatorname{tg}\varphi}{3U_2}$. Inmulţind cu $\bar{Z}$, făcând înlocuirile în ecuaţia de mai sus şi identificând părţile reale şi complexe se obţin două ecuaţii cu două necunoscute (θ şi U_2). Se deduce $U_2 = 3460$ V, deci tensiunea la bornele motorului sincron este egală cu tensiunea la barele uzinei. Explicaţia fenomenului constă în faptul că motorul sincron supraexcitat lucrează ca un compensator de fază.

5.42. Motorul sincron trebue să compenseze motorul asincron, factorul de putere minim corespunde cazului în care motorul asincron ar funcţiona numai reactiv, adică ar absorbi $49{,}5/0{,}86 = 57{,}5$ kVAR. In acest caz, factorul de putere al motorului sincron este dat de relaţia $Q/P = \operatorname{tg}\varphi$; cunoscând Q, P se deduce din $\bar{S} = P + jQ$. Se găseşte $P = 17{,}1$ kW şi $\cos\varphi = 0{,}3$.

5.43. Circuitul este un dipol cu ecuaţia $\bar{U}_1 = \bar{U}_2 + \bar{Z}\,(\bar{I}_R + \bar{I}_M)$. Se ia ca origine de fază U_2. Curentul $\bar{I}_M = \dfrac{P\cdot 10^3}{3\ U_2} + j\dfrac{P\cdot 10^2\operatorname{tg}\varphi}{3\ U_2}$. Numeric se găseşte $\bar{U}_1 = 255{,}48 + j\,18{,}635 = 256{,}6\,\lfloor 4^0 11'$ V.

5.44. (*a*) Se transfigurează circuitul *abc* într'o stea obţinându-se $\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_1 = \bar{Z}_2 = 2{,}89 + j\,281\ \Omega$ şi $\bar{Z}_c = \bar{Z}_2 = -1{,}45 - j\,1{,}915\ \Omega$.

(*b*) Aplicând relaţiile (21) se găseşte $\bar{Z}_{1c} = \bar{Z}_{2c} = 0 - j\,354\ \Omega$, $\bar{Z}_{12} = 4{,}95 + j\,521\ \Omega$.

(*c*) Aplicând relaţiile (20) se găseşte $\bar{A} = \bar{D} = 0{,}853 + j\,0{,}0014$, $\bar{B} = 4{,}97 + j\,520\ \Omega$, $C = (-0{,}396 + j\,521).\ 10^{-6}$ S.

Notă. Trebue rezolvat în prealabil punctul (*c*) apoi (*b*).

5.45. Considerând 3 din cele 4 încercări posibile de mers în gol şi în scurt circuit, se obţin ecuaţiile:

$$\bar{Z}_{10} = \frac{\bar{A}}{\bar{C}} = R(1-n)\,;\ Z_{1sc} = \frac{\bar{B}}{\bar{C}} = R\,;\ Z_{20} = -\frac{\bar{D}}{\bar{C}} = n\,R$$

care cu $\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = 1$ dau soluţiile; $\bar{A} = \dfrac{1}{n}$; $\bar{B} = R(1-n)$ $\bar{C} = \dfrac{1}{n\,R}$ S; $\bar{D} = 1$.

5. 46. Ca mai sus. Se obţine $\bar{A} = 2{,}35$; $\bar{B} = 2200\ \Omega$; $\bar{C} = 0{,}00275$ S; $\bar{D} = 3$.

Scanned with OKEN Scanner

5.47. Ca în problema precedentă. $\overline{A} = 2 + j\,9$: $\overline{B} = 280 + j\,30\,\Omega$; $\overline{C} = 0{,}1$ S : $\overline{D} = 1 - j\,3$.

5.48. Se știe că la cuadripolul simetric $\overline{A} = \overline{D}$ (1) ; $\overline{Z}_{10} = \dfrac{\overline{U}_{10}}{\overline{I}_{10}} = \dfrac{U_{10}\,|\underline{\theta}}{I_{10}\,|\underline{\theta - \varphi}} = \dfrac{U_{10}}{I_{10}}\,|\underline{\varphi} = \dfrac{\overline{A}}{\overline{C}}$ (2), unde $\cos\varphi = \dfrac{P_{10}}{U_{10} \cdot I_{10}}$; $\overline{Z}_{1sc} = \dfrac{\overline{U}_{1k}}{\overline{I}_{1k}} = \dfrac{U_{1k}\,|\underline{\theta'}}{I_{1k}\,|\underline{\theta' + \varphi'}} = \dfrac{U_{1k}}{I_{1k}}\,|\underline{-\varphi'} = \dfrac{\overline{B}}{\overline{D}}$ (3), unde $\cos\varphi' = \dfrac{P_{1k}}{U_{1k} \cdot I_{1k}}$; $\overline{AD} - \overline{BC} = 1$ (4). Rezolvând sistemul de 4 ecuații, cu 4 necunoscute se obține $\overline{A} = \overline{D} = 0{,}988\,\varepsilon^{j25'}$; $C = 0{,}000198\,\varepsilon^{j21^\circ\,45'}$ S ; $B = 148\,\varepsilon^{j69^\circ\,35'}\,\Omega$.

5.49. Pentru primul cuadripol avem :

$$\overline{U}_1' = \frac{\overline{A}_1}{\overline{C}_1}\overline{I}_1' - \frac{1}{\overline{C}_1}\overline{I}_2' \text{ întrucât } \overline{U}_2' = \frac{1}{\overline{C}_1}\overline{I}_1' - \frac{\overline{D}_1}{\overline{C}_1}\overline{I}_2'$$

pentru cel de al doilea

$$\overline{U}_1'' = \frac{\overline{A}_2}{\overline{C}_2}\overline{I}_1'' - \frac{1}{\overline{C}_2}\overline{I}_2'' \text{ întrucât } \overline{U}_2'' = \frac{1}{\overline{C}_2}\overline{I}_2'' - \frac{\overline{D}_2}{\overline{C}_2}\overline{I}_2''.$$

Adunând valorile obținute și ținând seama că :

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_1' + \overline{U}_1'' \;;\; \overline{U}_2 = \overline{U}_2' + \overline{U}_2'' \;;\; \overline{I}_1' = \overline{I}_1'' \;;\; \overline{I}_2' = \overline{I}_2'' \;;$$

se obține :

$$\overline{U}_1 = \frac{\overline{A}_1\overline{C}_2 + \overline{A}_2\overline{C}_1}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}\overline{U}_2 + \frac{(\overline{A}_1\overline{C}_2 + \overline{A}_2\overline{C}_1)\ (\overline{D}_1\overline{C}_2 - \overline{D}_2\overline{C}_1) - (\overline{C}_1 + \overline{C}_2)^2}{\overline{C}_1\ \overline{C}_2\,(\overline{C}_1 + \overline{C}_2)}\overline{I}_2$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{C}_1\ \overline{C}_2}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}\overline{U}_2 + \frac{\overline{D}_1\overline{C}_2 + \overline{C}_1\overline{D}_2}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}\overline{I}_2$$

de unde coeficienții cuadripolului echivalent

$$\overline{A} = \frac{\overline{A}_1\overline{C}_2 + \overline{A}_2\overline{C}_1}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2} \;;\; \overline{B} = \frac{(\overline{A}_1\overline{C}_2 + \overline{A}_2\overline{C}_1)\,(\overline{D}_1\overline{C}_2 + \overline{D}_2\overline{C}_1) - (\overline{C}_1 + \overline{C}_2)^2}{\overline{C}_1\overline{C}_2\ (\overline{C}_1 + \overline{C}_2)}$$

$$\overline{C} = \frac{\overline{C}_1\ \overline{C}_2}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2} \;;\; \overline{D} = \frac{\overline{D}_1\overline{C}_2 + \overline{D}_2\overline{C}_1}{\overline{C}_1 + \overline{C}_2}.$$

Dacă cei doi cuadripoli sunt identici :

$$\overline{A} = \overline{A}' \;;\; \overline{B} = \overline{B}' \;;\; \overline{C} = \frac{\overline{C}'}{2} \;;\; \overline{D} = \overline{D}'.$$

5.50. Din schema de montaj rezultă egalitățile:

$$\overline{I}_1' = \overline{I}_1'' = \overline{I}_1;\ \overline{U}_2' = \overline{U}_2'' = \overline{U}_2;\ \overline{I}_2 = \overline{I}_2' + \overline{I}_2'';\ \overline{U}_1 = \overline{U}_1' + \overline{U}_1''.$$

Prin identificarea ecuațiilor care se obțin introducând în egalitățile de mai sus expresiile lui $\overline{U}_1'$, $\overline{U}_2''$, $\overline{I}_1'$ și $\overline{I}_1''$ (prin scrierea ecuațiilor fiecărui cuadripol în parte) se obține:

$$\overline{A} = \frac{(\overline{D}_1 + \overline{D}_2)^2 + (\overline{B}_1\overline{D}_2 + \overline{D}_1\overline{B}_2)(\overline{C}_1\overline{D}_2 + \overline{C}_2\overline{D}_1)}{\overline{D}_1\overline{D}_2(\overline{D}_1 + \overline{D}_2)};\ \overline{B} = \frac{\overline{B}_1\overline{D}_2 + \overline{D}_1\overline{B}_2}{\overline{D}_1 + \overline{D}_2}$$

$$\overline{C} = \frac{\overline{C}_1\overline{D}_2 + \overline{C}_2\overline{D}_1}{\overline{D}_1 + \overline{D}_2};\ \overline{D} = \frac{\overline{D}_1\overline{D}_2}{\overline{D}_1 + \overline{D}_2}.$$

Pentru cuadripoli identici $\overline{A} = 2\overline{A}$; $\overline{B} = \overline{B}'$; $\overline{C} = 2\overline{C}'$; $\overline{D} = \frac{\overline{D}'}{2}$.

5.51. Se deduc din ecuațiile cuadripolului valorile lui $\overline{U}_2$ și $\overline{I}_2$. Făcând produsul $\overline{U}_2 \cdot \overline{I}_2$ și luând partea reală a acestui produs se obține

$$P_2 = 17{,}1 \text{ kW}$$

5.52. Transfigurând triunghiul $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_2$. $\overline{Z}_5$ în stea se obține o schemă echivalentă în T dela care se poate trece imediat la constantele cuadripolului echivalent și apoi la constantele circuitului în π

$$\overline{A} = 1 + \frac{\overline{Z}'}{\overline{Z}''} = 1 + Z\pi\ \overline{Y}\pi$$

$$\overline{B} = 2\,\overline{Z}' + \frac{\overline{Z}'^2}{\overline{Z}''} = \overline{Z}\pi$$

$$\overline{Z}\pi = 5\ (1 + j\,3)\Omega \text{ și } Y\pi = (2 - j)\,10^{-2}\text{ S}.$$

5.53. Se determină constantele cuadripolului; cunoscând $\overline{U}_2$ și $\overline{I}_2$ se determină prin ecuațiile cuadripolului $\overline{U}_1$ și $\overline{I}_1$ apoi P_1. Numeric se găsește $U_1 = 8{,}9$ kV; $I_1 = 101{,}5$ A; $P_1 = 679$ kW.

5.54. Din teoria liniilor lungi (vezi orice curs de transport a energiei electrice) se găsesc ecuațiile cuadripolului sub forma:

$$\overline{U}_1 = \overline{U}_2\ \text{ch}\gamma + \overline{I}_2\overline{Z}\ \text{sh}\gamma$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_2}{\overline{Z}}\ \text{sh}\gamma + \overline{I}_2\ \text{ch}\gamma$$

se obține:

$I_2 = 158$ A; $U_2 = 101$ kV; $P_2 = 12{,}44$ MW; $\cos\varphi_2 = 0{,}78$; $\eta = 73{,}2\,\%$.

5.55. Problema se rezolvă ca și problema 5.45. Se găsește $I_2 = 5{,}2$ A; $U_2 = 4230$ V; $P_2 = 16{,}2$ kW; $\eta = 0{,}54$; $\cos\varphi = 0{,}48$.

5.56. *a*) Constantele cuadripolului se determină din ecuațiile sale generale. La mers în gol $\overline{I}_2 = 0 \therefore \frac{E_{10}}{E_{20}'} = A = 2$ și $\frac{I_{10}}{E_{20}'} = C = \frac{1}{2}$ S. La scurtcircuit $E_{20}' = 0 \therefore \frac{I_1}{I_2} = D = 2 \therefore B = 1$.

(*b*) Aplicând relația (19) se obține $\overline{Z}_1 = 2\,\Omega$, $\overline{Z}_2 = 2\,\Omega$ și $\overline{Y} = C = 0{,}5$ S.

(*c*) Circuitul în *T* echivalent se obține transfigurând triunghiul centra al sistemului în lanț într'o stea. Se găsește $\overline{Z}_1 = \overline{Z}_2 = 1\,\Omega$, $\overline{Y} = 2$ S.

Pentru circuitul în π echivalent se transfigurează una din stelele sistemului în lanț într'un triunghi, obținându-se un cuadripol în π în lanț cu un dipol. Se transfigurează apoi acest element, care formează un *T* în sistem, într'un triunghi obținându-se cuadripolul în π căutat cu elementele $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 = 4$ S și $\overline{Z} = 24\,\Omega$. Se poate obține direct aceasta dacă din parametrii cuadripolului *T* echivalent obținut se calculează parametrii cuadripolului general.

$$(d)\ \overline{A} = \overline{D} = 7,\quad \overline{B} = 24\,\Omega,\quad \overline{C} = 2\ \text{S}.$$

5.57. Tensiunea $\overline{E}_2' = \overline{Z}_s\ \overline{I}_2$. Dar, conform teoremei lui Thévenin,

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{20}}{\overline{Z}_{20} + \overline{Z}_s} = \frac{\overline{E}_1/\overline{A}}{\overline{B}/\overline{A} + \overline{Z}_s} = \frac{\overline{E}_1}{\overline{B} + \overline{A}\ \overline{Z}_s}.$$

Calculând raportul E_1/E_2' se găsește tocmai relația de condiție dată de enunț.

5.58. Ținând seama de transformatoare, schemele (*a*) și (*c*) respectiv (*b*) și (*d*) sunt echivalente, Pentru primele scheme se poate scrie $\overline{A}\ \overline{I}_1 = \overline{I}' + \overline{I}_2$

$$\overline{I}' = \frac{\overline{E}_1}{\overline{A}} \cdot \overline{A}\ \overline{C} = \overline{E}_1\overline{C},\ \frac{\overline{E}_1}{\overline{A}} = \overline{E}_2' + \overline{I}_2\frac{\overline{B}}{\overline{A}}\ \therefore\ \overline{E}_1 = \overline{A}\ \overline{E}_2' + \overline{B}\ \overline{I}_2 \text{ și } \overline{I}_1\overline{I} = \overline{C}\overline{E}_2' + \overline{D}\overline{I}$$

circuitele se reduc astfel la cuadripoli cu constantele $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$.

Pentru schemele (*b*) și (*d*) se scrie $\overline{I}_1 = \overline{I}' + \overline{D}\overline{I}_2$, $\overline{I}' = \dfrac{\overline{E}_2'}{\overline{D}} \cdot \overline{D} \cdot \overline{C} =$

$$= \overline{E}_2'\overline{C},\ \overline{E}_1 = \frac{\overline{B}}{\overline{D}}\ \overline{I}_1 + \frac{\overline{E}_2'}{\overline{D}}\ \therefore\ \overline{I}_1 = \overline{C}\ \overline{E}_2' + \overline{D}\ \overline{I}_2 \text{ și } \overline{E}_1 = \overline{A}\ \overline{E}_2' + \overline{B}\ \overline{I}_2,$$ adică același cuadripol ca mai sus.

5.59. Linia fiind perfect simetrică și izolată poate fi tratată ca un dipol. Pentru determinarea puterilor se construește diagrama cu 2 poli de tensiune, luându-se s. ex. 1 MVA = 5 mm. Caracteristicile liniei sunt $R = 15{,}6\,\Omega$; $X = 24\,\Omega$; $\overline{Z} = 28{,}6\ \underline{|57°}\ \Omega$. Din diagramă se găsește $P_2 = 6{,}3$ MW, $Q_2 = 6{,}3$ MVAR; $P_1 = 7{,}2$ MW; $Q_1 = 7{,}8$ MVAR; $\eta = 87{,}5\%$. Pierderile în linie $p = P_1 - P_2 = 0{,}9$ MW sau 14,25 %; $q = 1{,}5$ MVAR sau 23,80 % (pierderile sunt raportate la puterile sosite). $\varphi = 47°$ $\therefore$ $\cos\varphi_1 = 0{,}68$ Pentru studierea randamentului în funcție de factorul de putere se duc pe diagramă ON_2 la diverse decalaje, deducând unghiurile θ și deci vectorii ON_1.

Notă. Diagrama se construește pentru o singură fază, puterile calculându-se însă pentru tot sistemul.

5.60. Se utilizează metoda circuitelor independente. $I_1 = I_2 = 2$ A; $P_2 = 4{,}19$ kW; $P_1 = -1{,}02$ kW. Mașina 1 lucrează în regim de motor, absorbind energie dela generatorul al doilea. Puterea totală, cerută de motor, este egală cu 1,46 kW, din care 0,44 kW se consumă pentru încălzirea înfășurării și 1,02 kW pentru învârtirea motorului.

5.61. Problema se rezolvă fără dificultate prin următoarele două metode (*a*) Reducerea rețelei la o impedanță unică; (*b*) Circuite independente.

5.62. Problema se poate rezolva prin trei metode: (*a*) circuite echivalente; (*b*) perechi de noduri; (*c*) cuadripol echivalent. La ultima chestiune, mașina 1 funcționează tot ca generator.

5.63. (*a*) Se aplică teorema lui Thévenin. Pentru determinarea impedanței rețelei se transfigurează un triunghi în stea. Se găsește:

$$V_{22'0} = \frac{\overline{E}_1}{R}(R + 2jX),\ \overline{I}_2 = \frac{\overline{E}_1(R + 2jX)}{R\overline{Z}_s - 2jX(R + jX)}$$

$$\text{şi}\quad \overline{Y}_{12} = \frac{R + 2jX}{R\overline{Z}_s - 2jX(R + jX)}.$$

(b) Pentru $R = 0$ rezultă $I_2 = \dfrac{j\overline{E}_1}{X}$.

(c) Rezultă imediat din (a).

(d) $\overline{Y}_{11} = -\dfrac{2jX}{R}(R + jX)$

(e) $Z_s = 0\ \therefore\ Y'_{12} = -\dfrac{R + j2X}{j2X(R + jX)}$.

5.64. $R_{cond} = \dfrac{10}{57 \cdot 50000} = 3{,}5\ 10^{-6}\,\Omega$;

$R_{fază_{total}} = R_{fază} + R_{cond} = 253.5.10^{-6}\,\Omega$.

Inductanța proprie si mutuală se pot deduce în modul următor:
F.e.m. indusă în faza de mijloc

$$e_B = -L\frac{di_B}{dt} - M\left(\frac{di_A}{dt} + \frac{di_C}{dt}\right) = -(L-M)\frac{di}{dt} \qquad \text{(A)}$$

unde L este inductanța proprie, iar M inductanța mutuală dintre faza de mijloc și fiecare din cele 2 faze extreme. Aceiași f.e.m. $e = -\dfrac{d\Phi_s}{dt}$ cu $k = \dfrac{r_0}{2\pi}l$

$$\therefore \Phi_B = \int_r^\infty ki_B\frac{dx}{x} + \int_a^\infty k\ (i_A + i_C)\frac{dx}{x}\Phi_B = ki_B\ \ln\frac{a}{r}.$$

Aici a = distanța dintre axele fazelor vecine; r = raza conductorilor.

$$e_B = -k\ln\frac{a}{r}\ \frac{di_s}{dt} \qquad (B)$$

Compararea relaţiilor (A) şi (B) dă $L-M = k\ \ln\dfrac{a}{r}$.

Ţinând seama şi de inductanța internă şi făcând substituţia $k = 2{,}10^{-9}\,l$ cm se obţine

$$L - M = \left(0{,}5 + 2\ \ln\frac{a}{r}\right)10^{-4}\ l. \qquad \text{(C)}$$

F.e.m. indusă într'una din fazele extreme (d. ex. A)

$$e_A = -L\frac{di_A}{dt} + M\frac{di_B}{dt} - (M-S)\frac{di_C}{dt} = (L-M)\frac{di_B}{dt} + (L-M+S)\frac{di_C}{dt} \qquad (D)$$

($M-S$) fiind inductanţa mutuală dintre fazele extreme.

Pe de altă parte

$$e_A = -\frac{d\Phi_A}{dt}$$

$$\Phi_A = \int_r^{\infty} k i_A \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} k i_B \frac{dx}{r} + \int_{2a}^{\infty} k i_C \frac{dx}{x} = -(L-M)\, i_B - k i_C \, \ln\frac{2a}{r}$$

$$e_A = (L-M)\frac{di_B}{dt} + k \ln\frac{2a}{r}\frac{di_C}{dt} \qquad (E)$$

Compararea relaţiilor (D) şi (E) dă

$$L - M + S = k \ln\frac{2a}{r}$$

de unde

$$S = k\left(\ln\frac{2a}{r} - \ln\frac{a}{r}\right) l = k \ln 2 l = 1{,}385 . 10^{-4}\ l \text{ km}.$$

Obţinem astfel:

$$X = \omega (L-M) = 314 \left(0{,}5 + \ln\frac{3000}{150}\right) \cdot 10^{-4}\ 10 . 10^{-3} = 2{,}04 \cdot 10^{-3}\,\Omega$$

$$X_s = \omega S = 314 \cdot 1{,}385 \cdot 10^{-4}\ 10 . 10^{-3} = 0{,}435 \cdot 10^{-3}\ \Omega$$

$$\overline{Z} = R + j X = (0{,}253 + j\,2{,}04)\ 10^{-3}\ \Omega$$

$$\overline{Z}_s = j X_s = j\,0{,}435 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

Ecuaţiile fundamentale:

$$\overline{U}_A = \overline{U}_0 + \overline{I}_A (R + j\omega L) + \overline{I}_B\, jM\omega + \overline{I}\, j(M-S)\,\omega$$

$$\overline{U}_B = \overline{U}_0 + \overline{I}_B (R + jL\omega) + (\overline{I}_A + \overline{I}_C)\, jM\omega$$

$$\overline{U}_c = \overline{U}_0 + \overline{I}_c (R + jL\omega) + \overline{I}_B\, jM\omega + \overline{I}_A\, j(M-S)\,\omega$$

$$\overline{I}_A + \overline{I}_B + \overline{I}_C = 0$$

Efectuând calculele se obţine

$$\overline{I}_A = 124{,}5\ \underline{|43^\circ}\ \text{kA};\quad \overline{I_B} = 151\ \underline{|-82^\circ 20'}\ \text{kA};\quad I_C = 128\ \underline{|150^\circ}\ \text{kA}.$$

Dacă se ia ca origină de fază tensiunea U_B, sistemul tensiunilor va fi:

$$\overline{U}_A = 289\ \underline{|120^\circ};\quad \overline{U}_B = 289\ \underline{|0};\quad \overline{U}_C = 289\ \underline{|24^\circ}$$

şi deci

$$P_A = 8\,100\ \text{kW};\quad P_B = 5800\ \text{kW},\quad P_C = 0.$$

PARTEA II

6. 6.1. $y = 120 \sin(\omega t + 110^0)$

6.2. $y = 100 \sin(\omega t + 150^0)$

6.3. $150 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

6.4. $220 \sin(\omega t + 70^0)$.

6.5. $380 \sin\left(\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$

6.6. -13^0.

6.7. $y_1 = 5 \sin(\omega t + 75^0)$ şi $\varphi = 195^0 = -165^0$

6.8. $i = 5 \sin(\omega t + 90^0)$ şi $\varphi = -210^0 = 150^0$.

6.9. $\varphi = 270^0 = -90^0$.

6.10. $\varphi = -270^0 = +90^0$.

6.11. 11^0.

6.12. $y_5 = 2 \sin(5\omega t + 70^0)$ şi deci $\varphi_5 = -14^0$.

6.13. $y_4 = 3 \sin(4\omega t - 120^0)$.·. $\varphi_4 = 30^0$.

6.14. $y_{17} = 1{,}2 \sin(17\,\omega t + 93^0 30')$.·. $\varphi_{17} = -5^0 30'$.

6.15. A transforma armonicele înseamnă a determina unghiul φ_n de decalaj astfel ca el să fie mai mic decât $\frac{\pi}{n}$. Se găseşte: $y_3 = 12 \sin 3(\omega t + 50^0)$.

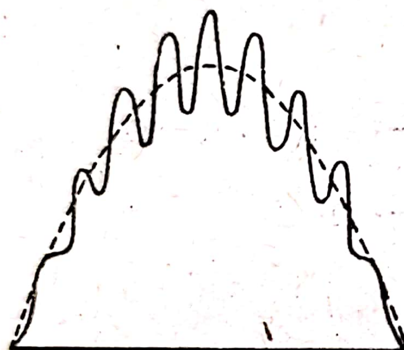


Fig. 6.25.

6.16. $y_7 = 100 \sin(7\,\omega t - 148^0)$.

6.17. $y_{11} = 5 \sin(11\,\omega t + 85^0)$.

6.18. $y_5 = 2 \sin 5(\omega t - 24^0)$.

6.19. -41^0.

6.20. -18^0.

6.21. 40^0.

6.22. $A_3 \cong 7{,}98$ $\varphi_3 \cong 20^0 36'$.

6.23. $A_1 = 133$ $\varphi_1 = 39^0 45'$.

6.24. $A_5 = 3{,}94$ $\varphi_5 = 36^0 50'$.

6.25. Se compun analitic armonicele $3 \sin 17\,\omega t + 3 \sin(19\,\omega t + 180^0) = 3(\sin 17\,\omega t - \sin 19\,\omega t) = -3 \times 2 \cos 18\,\omega t \times \sin \omega t = 6 \sin \omega t \sin(18\,\omega t - 90^0)$ care trebue privită ca o armonică de ordinul 18 având amplitudinea $6 \sin \omega t$. Curba rezultantă se construeşte grafic (fig. 6.25).

6.26. Se procedează ca mai sus şi se găseşte compunând armonicele: $4 \cos \omega t \sin 18\,\omega t$, curba rezultantă construindu-se grafic.

6.27. Se procedează ca în cazurile precedente. Curba rezultantă a armonicelor este $4 \cos(\omega t + 5^0) \times \sin(12\,\omega t + 11^0)$. Se consideră amplitudinea variabilă a armonicei de ordinul 12. Curba rezultantă se construeşte grafic.

6.28. $2 \cos 2\,\omega t\, E_n \times \sin(n + 2)\,\omega t$.

6.29. Curba rezultantă se construeşte grafic prin puncte (fig. 6.29) şi este o curbă pară.

6.30. Curba se construeşte grafic şi este o curbă deasemenea pară.

6.31. Idem, curbă impară.

6.32. Idem, curbă pară.

6.33. Se construeşte mai întâi suma armonicelor, apoi se adaugă termenul constant deplasându-se axa absciselor înspre amplitudinile negative cu valoarea termenului constant.

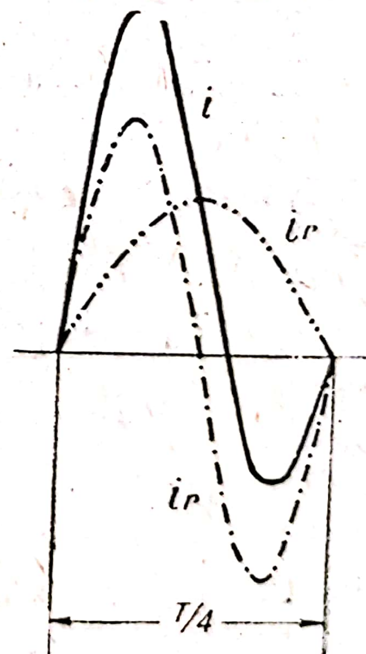


Fig. 6.29.

6.34. Se construeşte prin puncte, găsindu-se pentru jumătate perioadă curbele din fig. 6.34.

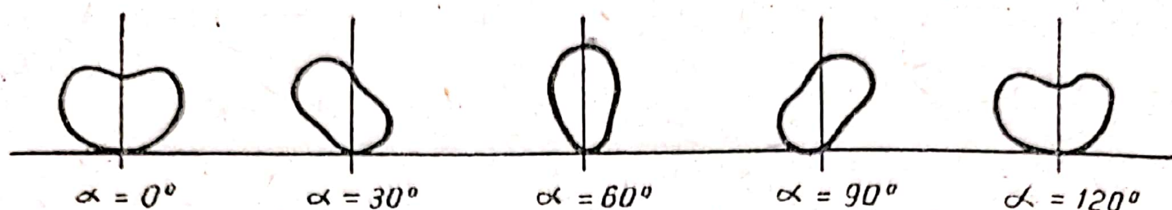


Fig. 6,34.

6.35. Idem, curbele din fig. 6.35.

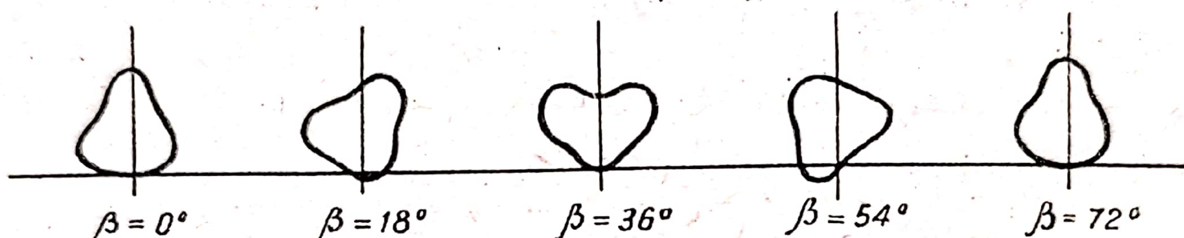
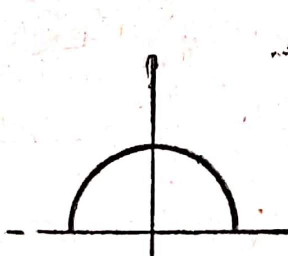


Fig. 6.35.

6.36. Aceeaşi construcţie ca mai sus. Se obţine un semicerc (fig. 6.36).
6.37. Se obţine un ovoid (fig. 6.37).
6.38. Se obţine curba reprezentată în fig. 6.38.



Fig, 6.36.

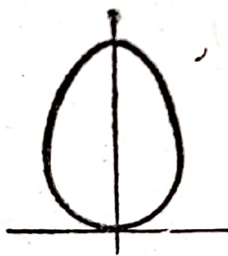


Fig. 6.37.

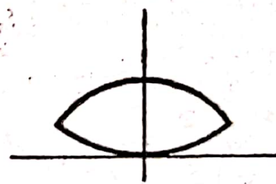


Fig. 6.38.

6.39. Pentru diversele valori ale lui φ $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \text{ etc.}\right)$ se construesc grafic curbele rezultante corespunzătoare.
6.40. Se procedează ca mai sus.

7. 7.1. Problema poate fi rezolvată prin orice metodă analitică sau grafică. Metoda cea mai indicată este aceea a discontinuităţilor. Prin metoda integrări se obţine $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{25x}{\pi} + 100\right) \times \sin nx dx = \frac{50}{\pi n}$, $B_n=0$ şi $C_0=75$.
Prin metoda discontinuităţilor se găseşte deasemenea $A_n = \frac{1}{n}\sum S_i^{(0)} \cos nx_i - \frac{1}{n^2}\sum S_i^{(1)} \sin nx_i = \frac{50}{n}$, căci avem numai salturi de ordonată în punctele $n_{st} = 0$ şi $n_{dr} = 2\pi$. Se găseşte uşor $B_n = 0$ şi $C_0 = 75$.

7.2. Funcţia prezintă simetria $f(x) = f(2\pi - x)$ şi nu are decât armonice în cosinus. Prin integrare $B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Y}{\pi^2} x\ (2\pi - x) \times \cos nx dx = -\frac{4Y}{\pi^2 n^2}$. $C_0 = \frac{2Y}{3}$. Prin metoda discontinuităţilor se observă că funcţia nu prezintă discontinuităţi decât la extremităţile perioadei ($x = 0$ şi $x = 2\pi$) şi numai discontinuităţii în derivatele de ordinul 1 şi 2, căci derivatele de ordinul 3 sunt nule şi salturi de ordonată nu există. Expresia coeficientului se reduce la $\pi B_n = -\frac{1}{n^2} \times \sum S_i^{(1)} \cos nx_i + \frac{1}{n^3} S_i^{(2)} \sin nx_i$, care calculat dă aceeaşi valoare ca mai sus.

7.3. Se calculează uşor cu ajutorul formulelor generale prin integrare obţinându-se

$$A_n = \frac{2Y}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2n} \cos n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$B_n = \frac{2Y}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2n} \sin n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \cos n\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad C_0 = \frac{Y}{8}.$$

7.4. $$y = \frac{Y}{4} + \frac{4Y}{\pi^2}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots\right) - \frac{8Y}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \frac{\cos 10x}{10^2} + \ldots\right).$$

La calculul prin metoda discontinuităţilor, se observă că funcţia nu are decât salturi de tangentă.

7.5. Funcţia este bisimetrică şi calculul se face numai asupra unui sfert de perioadă. Funcţia nu are decât armonice impare în sinus. Se găseşte $A_n = \frac{4Y}{n\pi}$ (n impar). Pentru metoda discontinuităţilor se observă că funcţia nu are decât salturi de ordonată.

7.6. Funcţie bisimetrică. $A_n = \frac{8Y}{\pi^2 n^2} \sin n\frac{\pi}{2}$ (n impar). Pentru metoda discontinuităţilor se observă că funcţia, *considerată pe un sfert perioadă*, prezintă salturi de ordonată şi de tangentă. Considerată pe întreaga perioadă, prezintă numai salturi de tangentă în punctele $\pi/2$ şi $3\pi/2$.

7.7. Funcţia bisimetrică $A_n = \frac{4Y}{n^2\pi\alpha} \sin n\alpha$ (n impar).

7.8. Funcţie bisimetrică. Se obţine $A_n = \frac{32Y}{\pi^3 n^3}$ (n impar). Prin metoda discontinuităţilor, se va observa că, lucrându-se asupra unui sfert de perioară, va avea salt de ordonată numai pentru $x = \pi/2$, care însă dă o contribuţie nulă. Deasemenea, curba fiind de gradul doi are numai salturi de ordinul 1 (tangentă) şi ordinul 2 (curbură).

7.9. Prin metoda integrării se găseşte $A_n = \frac{Y}{2\pi}\left[\frac{\sin (1-n)\pi}{1-n} - \frac{\sin (1+n)\pi}{1+n}\right]$. Se observă că pentru $n = 1$, $A_n = \frac{Y}{2}$; pentru $n \neq 1\ A_n = 0$.

Pentru B_n se găsește deasemenea

$$B_n = \frac{Y}{2\pi}\left[\frac{1 - \cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{1 - \cos(1-n)\pi}{1-n}\right],$$

de unde rezultă că funcția nu conține decât armonice *pare* în cosinus, și se poate scrie $B_n = \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n^2)} = \frac{2Y}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-n)\,(1+n)}$ în care n este par. Termenul constant este $C = \frac{Y}{\pi}$. Desvoltarea în serie se poate scrie

$$y = Y\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi \cdot 1 \cdot 3}\cos 2x - \frac{2}{\pi \cdot 3 \cdot 5}\cos 4x - \ldots\ldots\right].$$

7.10. Funcția prezintă simetria $f(x) = f(2\pi - x)$, desvoltarea ei va conține, în afară de termenul constant, numai armonice pare în cosinus. Se găsește $C_0 = \frac{2Y}{\pi}$ și $B_n = \frac{4Y}{\pi} \cdot \frac{1}{1-n^2}$.

7.11. Problema se reduce la a arăta că armonicele pare se anulează. O curbă electrotehnică are simetria $f(x) = -f(\pi + x)$. Impărțindu-se perioada în 12 părți (s. ex.) se obține $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7 = -Y_1, Y_8 = -Y_2, Y_9 = -Y_3, Y_{10} = -Y_4, Y_{11} = -Y_3, Y_{12} = -Y_6$. Pentru orice armonică pară, construcția grafică, dă rezultanta zero.

7.12. *a*) Curba este bisimetrică și impară: nu are decât armonice impare în sinus. Se găsește $y = U + \frac{4U}{T}t$ de unde, prin integrare,

$$A_n = \frac{4U}{n\pi}\left(1 + \frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}\right),\ n \text{ impar}.$$

b) Valoarea eficace se calculează grafic (fig. 7.12). Se găsește $U_{ef} = 0{,}745\ U_1 = 1{,}49\ U$.

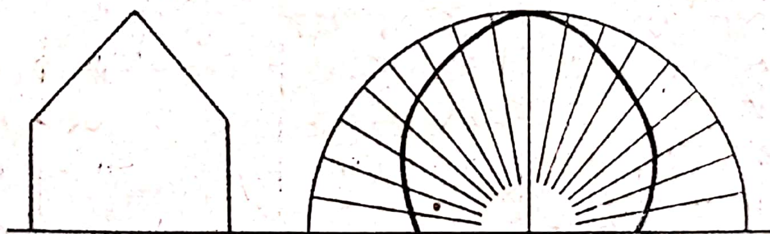


Fig. 7.12.

c) Rezidiul deformant se calculează din $U_d = \sqrt{U_{ef}^2 - \frac{1}{2}U_1^2}$. Cum $U_1 = \frac{4U}{\pi}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) = 2{,}08\ U$, rezultă $U_d = 0{,}24\ U$. *d*) $\delta = \frac{U_d}{U_{ef}} = \frac{0{,}24}{1{,}49} \times 100 = 16{,}11\,\%$. (Vezi și problema 8.41).

7.13. *a*) Curba este electrotehnică deci va conție numai armonice impare în sinus și cosinus. Se găsește prin integrare.

$$A_{2n+1} = \frac{2U}{(2n+1)\pi} \quad \text{și} \quad B_{2n+1} = -\frac{4U}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

b) Valoarea eficace se calculează grafic (fig. 7.13) sau analitic găsindu-se $U_{ef} = 0,58\ U$.

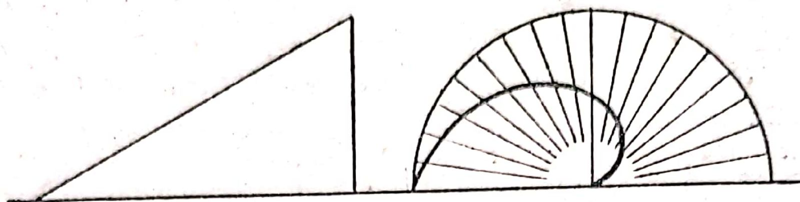


Fig. 7.13.

c) Pentru calculul rezidiului deformant trebue calculat termenul C_1. Se găseşte $C_1 = \sqrt{A_1^2 + B_2^2} = \frac{2U}{\pi}\sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}} = 0,76\ U$ şi deci $U_d = 0,21\ U$.

d) $\delta = 36,33\,\%$.

7.14: Curba dată fiind o funcţie electrotehnică nu are decât armonice impare în sinus şi cosinus. Se vor calcula numai tabelele M şi E. Semiperioada se împarte în 18 părţi egale. Se realizează tabela I pentru calculul lui M_k şi E_k. Cu aceste date se întocmesc tabelele de calcul E şi M, din care, cu ajutorul cartoanelor ajurate se calculează sumele P_n, Q_n, R_n, T_n

Tabela I

Calculul coeficienţilor M_k, E_k

Y_k		$Y_1 = 32,0$	$Y_2 = 26,5$	$Y_3 = 24,0$
Y_{p-k}	$Y_{18} = -36,8$	$Y_{17} = -25,0$	$Y_{16} = -25,5$	$Y_{15} = -28,0$
$M_k = Y_k - Y_{p-k}$	$M_0 = 36,8$	$M_1 = 57,0$	$M_2 = 52,0$	$M_3 = 52,0$
$E_k = Y_k + Y_{p-k}$		$E_1 = 7,0$	$E_2 = 1,0$	$E_3 = -4,0$

(urmare) *Tabela I*

$Y_4 = 21,5$	$Y_5 = 21,2$	$Y_6 = 18,3$	$Y_7 = 18,5$	$Y_8 = 24,0$	$Y_9 = 9,5$
$Y_{14} = -10,6$	$Y_{13} = -9,7$	$Y_{12} = -7,2$	$Y_{11} = 19,0$	$Y_{10} = 10,0$	
$M_4 = 32,1$	$M_5 = 30,9$	$M_6 = 25,5$	$M_7 = -0,5$	$M_8 = 14,0$	$M_9 = 9,5$
$E_4 = 10,9$	$E_5 = 11,5$	$E_6 = 11,1$	$E_7 = 37,5$	$E_8 = 34,0$	$E_9 = 9,5$

Scanned with OKEN Scanner

E

CALCULUL ARMONICELOR IMPARE IN SIN
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENTELE DIFERENTELOR

$E_K = d_K + d_{p-K}$ SI SIN $(K\pi/p)$ – $(K = 1, 2, \ldots, p/2)$.

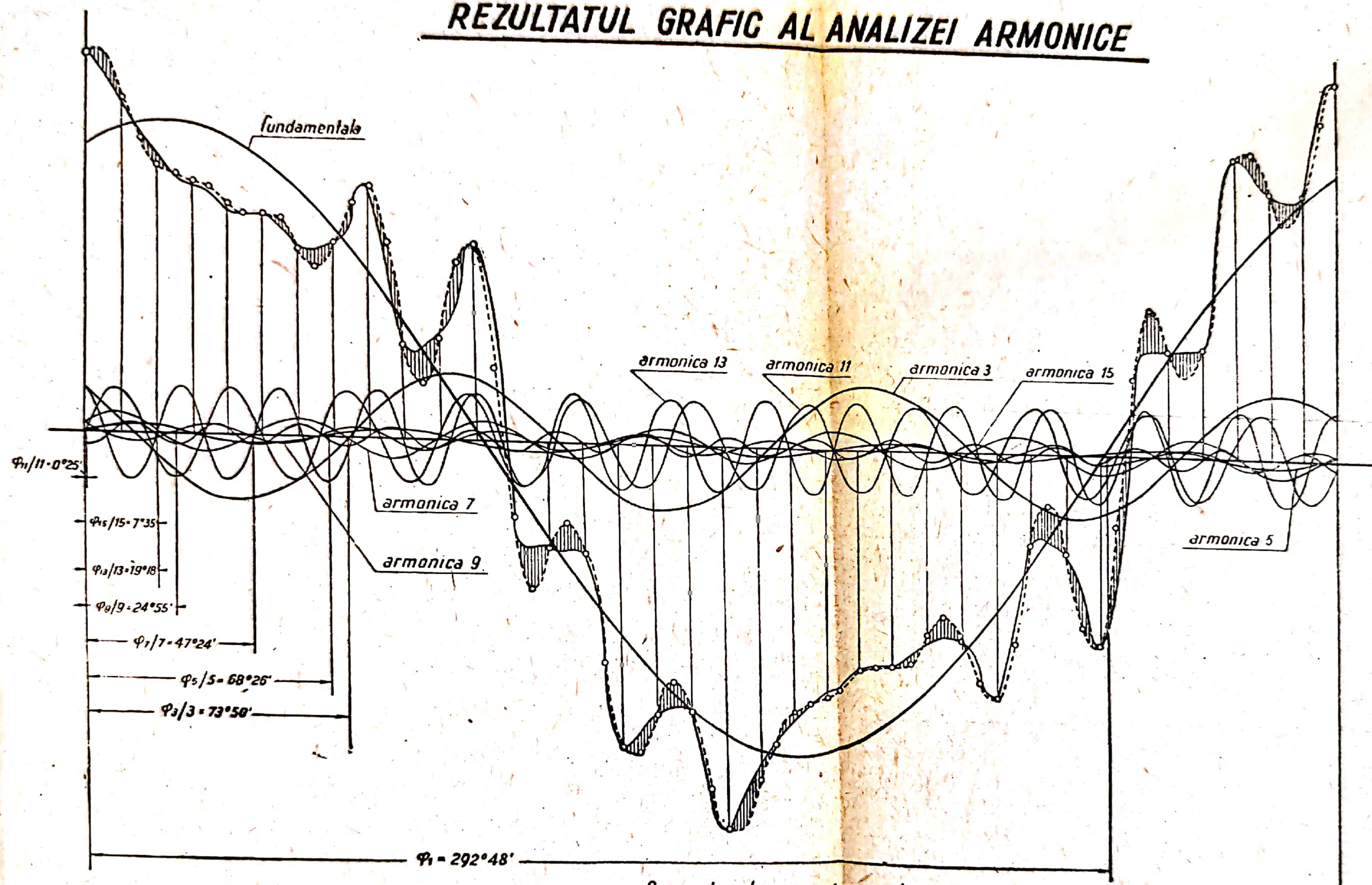
	sin 90° 1,00000	sin 80° 0,98481	sin 70° 0,93969	sin 60° 0,86603	sin 50° 0,96604	sin 40° 0,6427	sin 30° 0,50000	sin 20° 034203	sin 10° 0,17365	sin 0° 0,00000	
E_1	7,0		6, 57783		5, 36228		3. 50000		1, 21555		
E_2	1,0	0. 98481		0, 86603		0, 64279		0. 34202		0	
E_3	-4,0						-2, 00000				
E_4	10,9	10, 73443		9, 43973		7, 00641		3, 72802		0	
E_5	11,5		10, 80643		8, 80946		5. 75000		1. 99697		
E_6	11,1			9, 61293						0	
E_7	37,5		35. 23837		28, 72650		18, 75000		6, 51187		
E_8	34,0	33. 48354		29. 44502		21, 85426		11. 62868		0	
E_9	9,5										

M

CALCULUL ARMONICELOR IMPARE IN COS
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENȚELE SUMELOR $M_K = S_K - S_{0-K}$
SI COS $(K\pi/p)$ – $(K = 1,2, \dots, p/2)$

	COS 0° 1,00000	COS 10° 0,98481	COS 20° 0,93969	COS 30° 0,86603	COS 40° 0,76604	COS 50° 0,64279	COS 60° 0,50000	COS 70° 0,34202	COS 80° 0,17365	COS 90° 0,00000	
M_0	36,8										
M_1	57,0	56.13417		49.36371		36,63903		19.49514		0	
M_2	52,0		48,86388		39,83408		26.00000		9.02980		
M_3	52,0			45,03356						0	
M_4	32,1		30,16405		24,58988		16,50000		5,57416		
M_5	30,9	30,43063		26,76033		19.86221		10,56842		0	
M_6	25,5						12 75000				
M_7	-0,5	-0,49240		-0,43301		-0,32140		-0,17101		0	
M_8	14 0		13,15566		10,72456		7,00000		2,43110		
M_9											
:											

Scanned with OKEN Scanner



Scara abciselor : 1mm = 1A
Scara ordonatelor : de trei ori scara diagramei date

Scanned with OKEN Scanner

Tabela II

Sumele P_n, Q_n, R_n, T_n calculate cu cartoanele ajurate şi tabelele M şi E

P_n	$P_1=120{,}85893$	$P_3=23{,}03639$	$P_5=-19{,}45535$	$P_7=5{,}21361$	$P_9=0{,}00000$
Q_n	$Q_1=125{,}43486$	$Q_3=14{,}25000$	$Q_5=21{,}08071$	$Q_7=2{,}13442$	$Q_9=5{,}40000$
R_n	$R_1=52{,}76338$	$R_3=-23{,}00000$	$R_5=-4{,}45602$	$R_7=25{,}80736$	$R_9=-5{,}50000$
T_n	$T_1=50{,}44490$	$T_3=-19{,}13926$	$T_5=9{,}49872$	$T_7=-12{,}10739$	$T_9=0{,}00000$

Tabela III

Verificarea sumelor P_n, Q_n, R_n, T_n

$P_1 \cos 10^0 + P_3 \cos 30^0 + P_5 \cos 50^0 + P_7 \cos 70^0$		$\frac{9}{4} M_1 = \frac{9}{4} \times 57$
$120{,}85893 \times 0{,}98481 + 23{,}03639 \times 0{,}86603 + (-19{,}45535) \times 0{,}64279 + 5{,}21361 \times 0{,}34202 =$	128,25696	$= 128{,}25000$
$Q_1 + Q_3 + Q_5 + Q_7 + \frac{1}{2} Q_9$		$\frac{9}{2} M_0 = \frac{9}{2} 36{,}8$
$125{,}43486 + 14{,}25000 + 21{,}08071 + 2{,}13442 + \frac{1}{2} \times 5{,}40000 =$	165,59999	$=165{,}60000$
$R_1 - R_3 + R_5 - R_7 + \frac{1}{2} R_9$		$\frac{9}{2} E_9 = \frac{9}{2} \times 9{,}5$
$52{,}76338 + 23{,}00000 - 4{,}45602 - 25{,}80736 + \frac{1}{2} \times (-5{,}50000) =$	42,750000	42,75000
$T_5 \sin 80^0 + T_3 \sin 60^0 + T_7 \sin 40^0 + T_9 \sin 20^0$		$\frac{9}{4} E_2 = \frac{9}{4} =$
$9{,}49872 \times 0{,}98481 + (-19{,}13926) \times 0{,}86603 + (-12{,}10739) \times 0{,}64279 + 50{,}44490 \times 0{,}34202 =$	2,24985	2,25000

Scanned with OKEN Scanner

Tabela IV

Rezultate finale

n	1	3	5	7	9	11	13	15	17
A	11,46759	− 4,68214	0,56030	1,52222	− 0,61111	4,21275	− 1,55053	− 0,42897	0,25761
B	27,36598	4,14293	0,18059	0,81645	0,60000	− 0,34213	4,50401	− 0,97627	0,50844
A^2	131,50562	21,92243	0,31394	2,31715	0,43456	17,74726	2,40414	0,18402	0,06636
B^2	748,8 686	17,16387	0,03261	0,66659	0,36000	0,11705	20,27610	0,95310	0,25851
A^2+B^2	880,40248	39,08630	0,34655	2,98374	0,79456	17,86431	22,68024	1,13712	0,32487
$C=\sqrt{A^2+B^2}$	29,6715	6,2519	0,5886	1,7270	0,8913	4,2266	4,7623	1,0663	0,5700
$\operatorname{tg}\varphi_n=-B/A$	− 2,386	+ 0,885	−0,322	−0,536	+ 0,982	+ 0,081	+ 0,291	−2,275	−1,974
$\sin\varphi_n$	−	−	−	−	−	+	−	+	−
$\cos\varphi_n$	+	−	+	+	−	+	−	−	+
Cadran	IV	III	IV	IV	III	I	III	II	IV
φ'_n	67°12′	41°30′	17°52′	28°12′	44°28′	4°36′	71°00′	66°17′	63°08′
φ_n	292°48′	221°30′	342°08′	331°48′	224°28′	4°36′	251°00′	113°43′	296°52′
φ_n/n	292°48′	73°50′	68°26′	47°24′	24°55′	0°25′	19°18′	7°35′	17°28′

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatul analizei armonice poate fi pus sub una din formele de mai jos:

$$i = 27{,}36598 \cos x + 4{,}14293 \cos 3x + 0{,}18059 \cos 5x + 0{,}80645 \cos 7x + 0{,}60000 \cos 9x - 0{,}34213 \cos 11x + 4{,}50401 \cos 13x - 0{,}97627 \cos 15x + 0{,}50844 \cos 17x + 11{,}46759 \sin x - 4{,}68214 \sin 3x + 0{,}56030 \sin 5x + 1{,}52222 \sin 7x - 0{,}61111 \times \sin 9x + 4{,}21275 \sin 11x - 1{,}55053 \sin 13x - 0{,}42897 \sin 15x + 0{,}25761 \sin 17x;$$

sau:

$$i = 29{,}6715 \sin (x - 292^0 48') + 6{,}2519 \sin (3x - 221^0 30') + 0{,}5886 \sin (5x - 342^0 08') + 1{,}7270 \sin (7x - 331^0 48') + 0{,}8913 \sin (9x - 224^0 28') + 4{,}2266 \sin (11x - 4^0 36') + 4{,}7623 \sin (13x - 251^0) + 1{,}0663 \sin (15x - 113^0 43') + 0{,}5700 \sin (17x - 296^0 52');$$

sau, cum funcţia este o funcţie periodică de timp:

$$i = 29{,}6715 \sin (\omega t - 292^0 48') + 6{,}2519 \sin 3 (\omega t - 73^0 50') + 0{,}5886 \sin 5(\omega t - 68^0 26') + 1{,}7270 \sin 7 (\omega t - 48^0 24') + 0{,}8913 \sin 9 (\omega t - 24^0 55') + 4{,}2266 \sin 11 (\omega t - 0^0 25') + 4{,}7623 \sin 13 (\omega t - 19^0 18') + 1{,}0663 \sin 15 (\omega t - 7^0 35') + 0{,}5700 \sin 17 (\omega t - 17^0 28').$$

In planşa IV s'a dat rezultatul grafic al analizei armonice, trasându-se curba dată, armonicele componente ale acestei curbe şi curba rezultantă din sumarea acestor armonice. (Nu s'a trasat pe diagramă armonica 17 având amplitudinea prea mică). In planşa V s'a dat calculul grafic al valorii eficace, din care rezultă $I_{ef} = 21{,}3$ A. Calculul analitic al valorii eficace este $I_{ef}^2 = \sum I_{kef}^2 = \frac{1}{2} \sum C_k^2$.

Se găseşte $I_{ef} = 21{,}97$ A. Aplicând metoda grafică a lui Crug se obţin rezultate ce diferă foarte puţin de calculul analitic (fig. 7.14, *a* — 7.14, *i*).

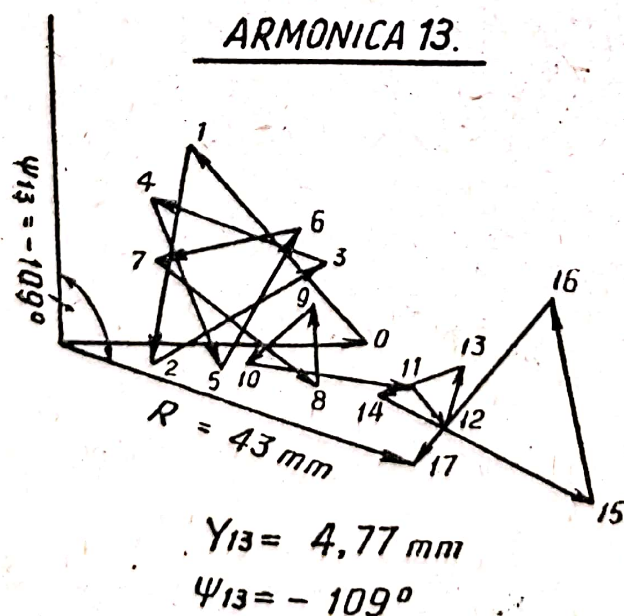


Fig. 7.14 *b*

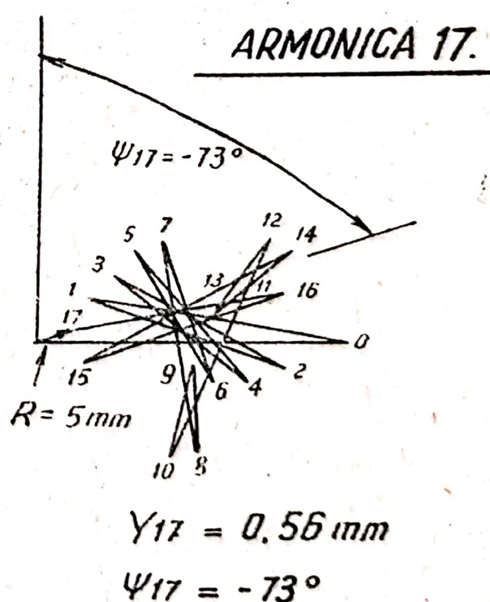
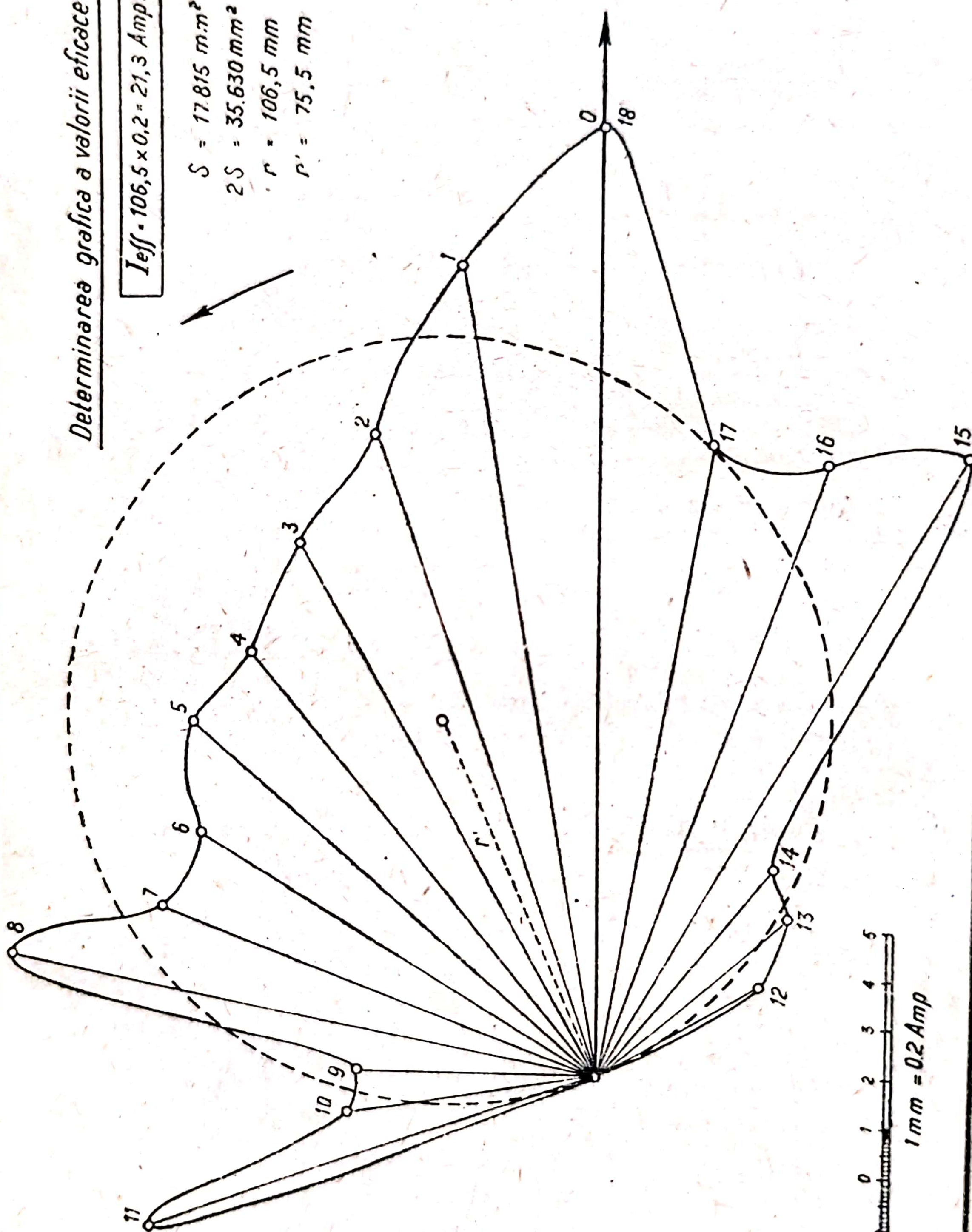


Fig. 7.14 *c*



Scanned with OKEN Scanner

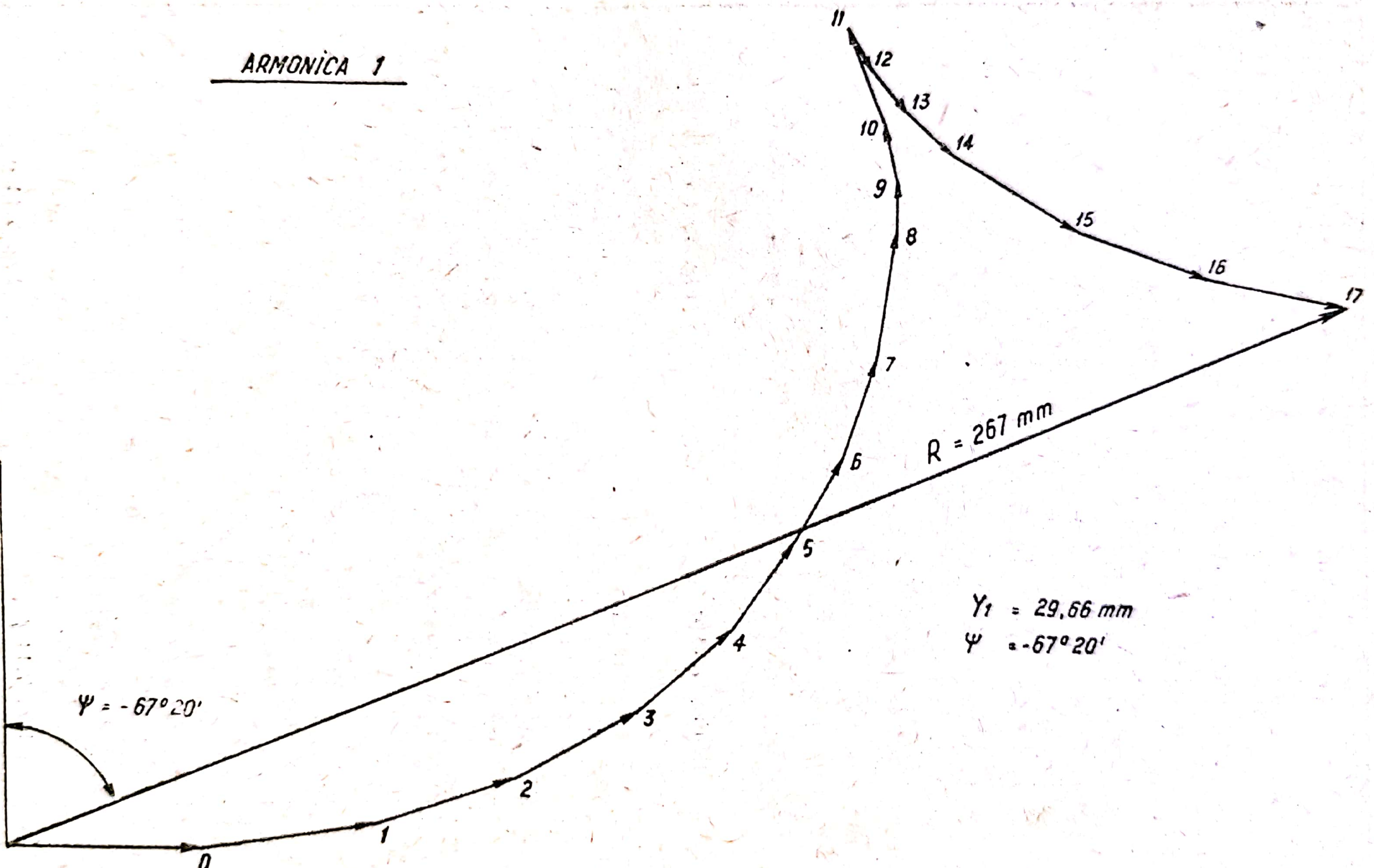
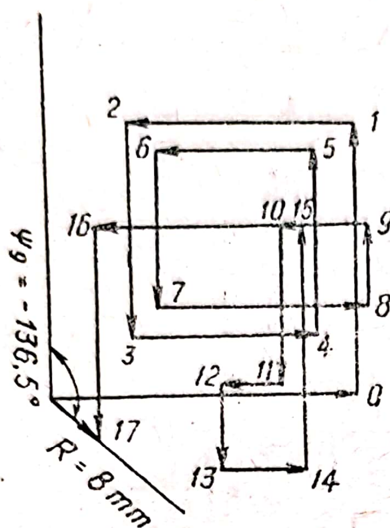


Fig. 7.14, a

Scanned with OKEN Scanner

ARMONICA 9

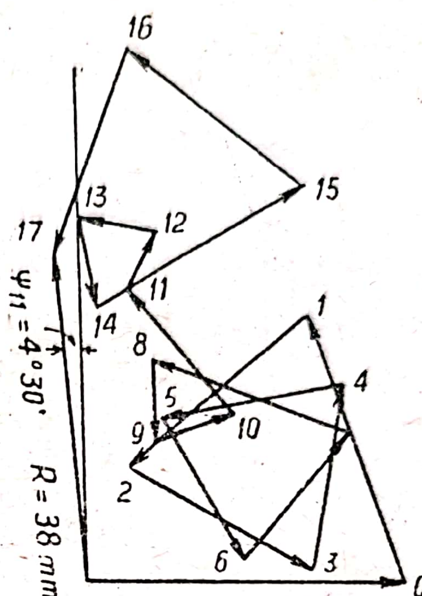


$Y_9 = 0,88\ mm$

$\psi_9 = -136,5°$

Fig. 7.14 *d*

ARMONICA 11

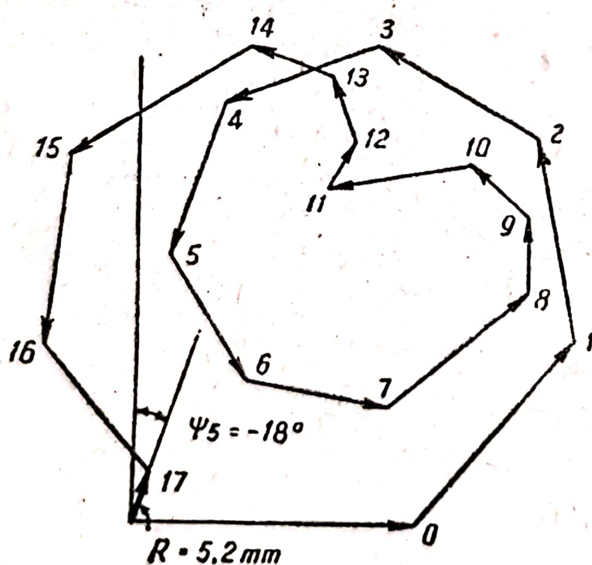


$Y_{11} = 4,22\ mm$

$\psi_{11} = 4°30'$

Fig. 7.14 *e*

ARMONICA 5

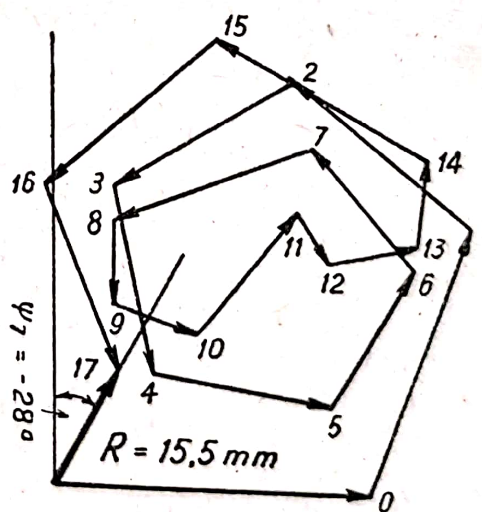


$Y_5 = 0,58\ mm$

$\psi_5 = -18°$

Fig. 7.14 *f*

ARMONICA 7



$Y_7 = 1,725\ mm$

$\psi_7 = -28°$

Fig. 7.14 *g*

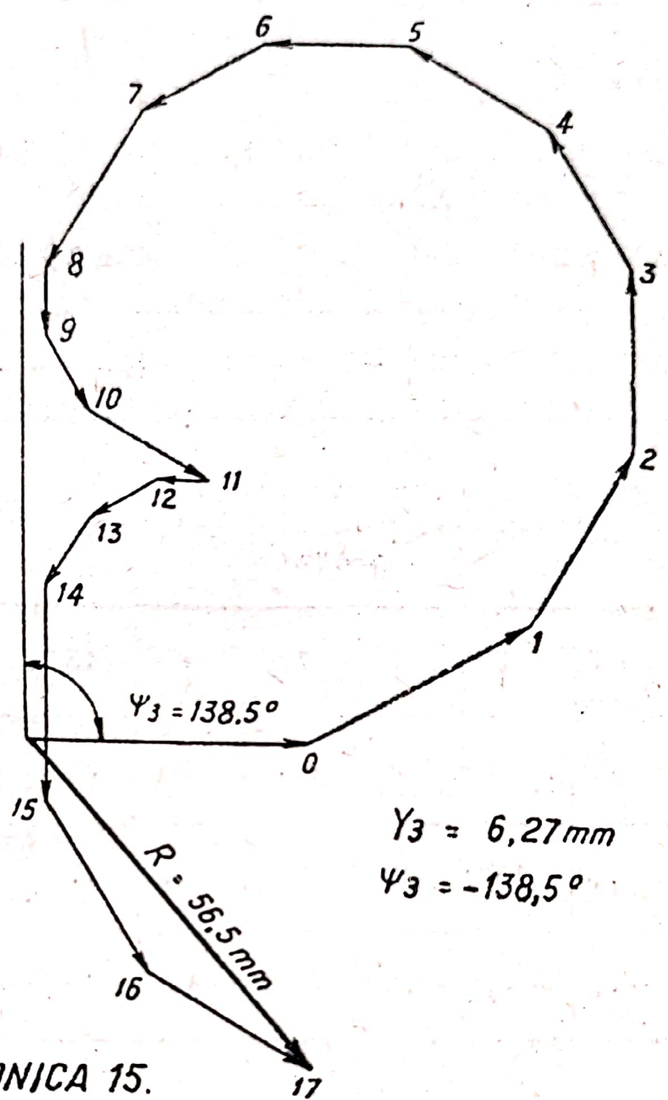
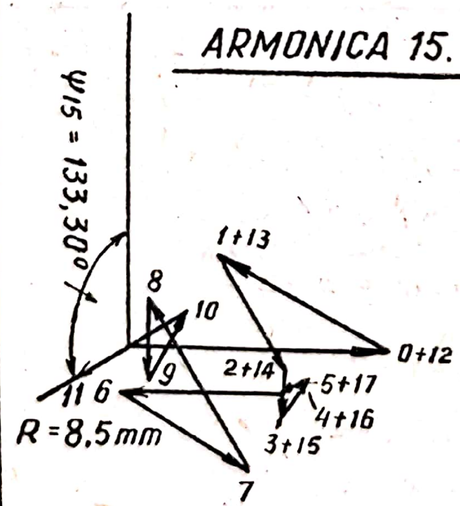


Fig. 7.14 *h*



$Y_{15} = 1{,}06\,mm$

$\Psi_{15} = 133{,}30^{\circ}$

Fig. 7.14 *i*

Scanned with OKEN Scanner

7.15. *a*) Ambele curbe sunt electrotehnice şi calculele se fac la fel ca mai sus. *Curba tensiunii*. Tabela pentru calculul lui M şi E:

Y_k		−36,5	−35	−33	−29,5	−22,5	−14	− 7	− 3	5
Y_{p-k}	39,5	38,5	37	37	34,5	30	23,5	19,5	13	
$E_k = Y_k + Y_{p-k}$	39,5	2	2	4	5	7,5	9,5	12,5	10	5
$M_k = Y_k - Y_{p-k}$	−39,5	−75	−92	−70	−64	−52,5	−37,5	−26,5	−16	5

Calculul armonicelor se face cu ajutorul tabelelor de calcul date alăturat (tabelele I şi II). Rezultatul calculului analizei armonice este dat în tabela III. *Curba curentului* se calculează ca mai sus.

Y_k		3	3,2	4	5,5	9	13	20	31	44,5
Y_{p-k}	0	6,5	12	19	24	28	34	41	45,5	
$E_k = Y_k + Y_{p-k}$	0	9,5	15,2	23	29,5	37	47	61	76,5	44,5
$M_k = Y_k - Y_{p-k}$	0	−3,5	− 8,8	−15	−18,5	−19	−21	−21	−14,5	44,5

Rezultatul analizei armonice este:

$$u = 211{,}9215 \sin (x - 82^0 28') + 4{,}418732 \sin 3(x - 75^0 41') +$$
$$+ 4{,}016584 \sin 5 (x - 50^0) + 2{,}699668 \sin 7 (x - 49^0 23') +$$
$$+ 6{,}035476 \sin 9(x - 11^0 15') + 1{,}735310 \sin 11(x - 31^0 47') +$$
$$+ 1{,}383657 \sin 13(x - 5^0 4') + 0{,}868427 \sin 15 (x - 7^0 44') +$$
$$+ 1{,}656372 \sin 17 (x - 0^0 30') \text{ volţi};$$

şi

$$i = 6{,}736849 \sin (x - 14^0 7') + 1{,}976439 \sin 3 (x - 76^0 19') +$$
$$+ 0{,}734237 \sin 5 (x - 2^0 15') + 0{,}404222 \sin 7 (x - 76^0 19') +$$
$$+ 0{,}177374 \sin 9 (x - 2^0 44') + 0{,}047272 \sin 11 (x - 16^0 33') +$$
$$+ 0{,}106624 \sin 13 (x - 26^0 57') + 0{,}044217 \sin 15 (x - 15^0 23') +$$
$$+ 0{,}024908 \sin 17 (x - 20^0 46') \text{ amperi.}$$

b) Valorile eficace *calculate* sunt $U_{ef} = 150{,}003$ V şi $I_{ef} = 5{,}002$ A. Rezidiul deformant: $U_d = 6{,}63$ V şi $I_d = 1{,}53$ A. Coeficientul de distorsiune: $\delta_u = 4{,}4\,\%$ şi $\delta_I = 30{,}51\,\%$.

Problema 7.15

CALCULUL ARMONICELOR CURBEI DE TENSIUNE

(Tabelele I—III)

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1

Armonicile impare în sin

Problema 7.15

$k\frac{\pi}{18}$	$\sin k\frac{\pi}{18}$	E_k	A_1	A_{17}	A_3	A_{15}	A_5	A_{13}	A_7	A_{11}	A_9	
0°	0	39,5	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0 0 0 0
10°	0,17365	2	0,3473	—	—	—	−2,170625	—	−1,302375	—	—	—
20°	0,34202	2	—	0,68404	—	—	—	− 1,71010	—	−3,4202	—	—
30°	0,5	4	2	—	3,75 −6,25	—	2	—	−2	—	—	—
40°	0,64279	5	—	3,21395	—	—	—	6,4279	—	1,28558	—	—
50°	0,76604	7,5	5,7453	—	—	—	1,53208	—	9,5755	—	—	—
60°	0,86603	9,5	—	8,326285	—	1,73206 4,33015 −8,6603	—	−8,326285	—	8,326265	—	=
70°	0,93969	12,5	11,746125	—	—	—	−7,047675	—	1,87938	—	—	—
80°	0,9481	10	—	9,8481	—	—	—	−1,96962	—	−4,92405	—	—
90°	1	5	5	—	4 −5	—	5	—	−5	—	2 −4 1,5 12,5 ; 6	—

R_n	24,838725	22,072375	−2,5	−2,59809	−0,68622	−1,638865	3,152505	1,267595	−2	
T_n	22,072375		−2,59809		−1,638865		1,267595			
$R_n + T_n$	46,911100		−5,09809		−2,325085		4,420100		−2	
$R_n - T_n$	2,766350		0,09809		0,952645		2,884915			
$A_n = \frac{R_n + T_n}{9}$	5,212344		−0,56534		−0,258342		0,491122		−0,22222	
$A_{p-n} = \frac{R_n - T_n}{9}$	0,307472		0,010898		0,105849		0,320546			

Verificarea sumelor R_n şi T_n

Sume R_n impare		Sume T_n impare	
R_1	24,838725	$T_5 \times 0,98481$	−1,613952
$- R_3$	2,5	$T_3 \times 0,86603$	−2,250023
$+ R_5$	−0,68622	$T_7 \times 0,64279$	0,814797
$- R_7$	−3,152505	$T_1 \times 0,34202$	7,549192
$+ \frac{1}{2} R_9$	−1		
$\Sigma = \frac{9}{2} E_9$	22,5 = 22,5	$\Sigma = \frac{9}{4} E_2$	4,500013 ≅ 4,5

Tabela 11

Armonicile impare în cos

Problema 7.15

$k\frac{\pi}{18}$	$\cos k\frac{\pi}{18}$	M_k	B_1	B_{17}	B_3	B_{15}	B_5	B_{13}	B_7	B_{11}	B_9	
0°	1	—39,5	— 39,5	—	—39,5 37,5	—	— 39,5	—	—39,5	—	—39,5;37,5 92;—16 —64;	—
10°	0,98481	—75	—	— 73,86075	—	—	—	—26,097465	--	—51,702525	—	—
20°	0,93969	—72	— 67,65768	—	—	—	60,14016	—	15,03504	—	—	—
30°	0,86603	—70	—	— 60,62210	—	—64,95225 45,466575 22,949795	—	60,62210	—	60,6221	—	—
40°	0,76604	—64	— 49,02656	—	—	—	—12,25664	—	55,15488	—	—	—
50°	0,64271	—52,5	—	—33,746475	—	—	—	—48,201925	—	17,933935	—	—
60°	0,5	—37,5	— 18,75	—	—36 32 8	—	— 18,75	—	—18,75	—	—	—
70°	9,34202	—26,5	—	— 9,063530	—	—	—	17,956050	—	—25,6515	—	—
80°	0,17365	—16	— 2,77840	—	—	—	12,50280	—	—11,1135	—	—	—
90°	0	5	—	0	—	0 0	—	0	—	0	—	0 0 0 0

Q_n	−177,71264	−177,29285	2	3,46412	2,13632	4,271435	0,82632	0,30201	−10	—
P_n	−177,292855		3,46412		4,271435		0,30201		—	
Q_n+P_n	−355,005495		5,46412		6,407755		1,12833		−10	
Q_n-P_n	−0,419785		−1,46412		−2,135115		0,52431		—	
$B_n=\frac{Q_n+P_n}{9}$	−39,445055		0,60712		0,711972		0,12538		−1,11111	
$B_{p-n}=\frac{Q_n-P_n}{9}$	−0,046531		−0,16268		−0,237235		0,05825		—	

Verificarea sumelor P_n și Q_n

Sume Q_n impare		Sumr P_n impare	
Q_1	−177,71262	$P_1\times 0,98481$	— 174,599776
Q_3	2	$P_3\times 0,86603$	3,000031
Q_5	2,13632	$P_5\times 0,64271$	2,745635
Q_7	0,82632	$P_7\times 0,32202$	0,103293
$\frac{1}{2}Q_9$	−5	—	—
$\Sigma=\frac{9}{2}M_0$	−177,75 = −177,75	$\Sigma=\frac{9}{2}M_1$	−168,750815 ≅ — 168,75

Tabela 111

Tabloul de calcul al armonicelor de tensiune

Problema 7.15

n	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	Unitatea	Observații
A_n		5,212344	−0,565340	−0,258342	0,491122	−0,222222	0,320546	0,105849	0,010898	0,307472	mm	
B_n		−39,445055	0,60712	0,711972	0,12537	−1,111111	0,05825	−0,237235	−0,16268	−0,046531	mm	
A_n^2		27,168529	0,319609	0,066740	0,2412008	0,049381	0,102749	0,011204	0,000118	0,094539		
B_n^2		1555,912363	0,368594	0,506904	0,015717	1,234565	0,003393	0,059280	0,026464	0,002165		
$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$		1583,08089	0,688204	0,573644	0,256918	1,283947	0,106142	0,067484	0,026583	0,096704		
$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$		39,78793	0,82958	0,75408	0,50684	1,13311	0,32579	0,25977	0,16304	0,31097	mm	
C_n		211,929215	4,418732	4,016584	2,699668	6,035476	1,735310	1,383657	0,868427	1,656372	volți	
$\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$		7,56762	1,0739	2,75592	−0,25525	−5,00004	−0,18172	2,24126	−14,92750	−0,15133		
φ_n'		82°28′	47°2′	70°3′	14°19′	78°41′	10°14′	65°57′	86°11′	8°36′		
$\sin \varphi_n = -\frac{B_n}{C_n}$		> 0	< 0	< 0	< 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0		
$\cos \varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$		> 0	< 0	< 0	> 0	< 0	> 0	> 0	> 0	> 0		
φ_n		82°28′	227°2′	250°3′	345°41′	101°19′	349°46′	65°57′	86°11′	8°36′		
φ_n / n		82°28′	75°41′	50°	49°23′	11°15	31°47′	5°4′	7°44′	0°30′		

Problema 7.15

CALCULUL ARMONICELOR CURBEI DE CURENT

(Tabelele IV–VI)

Scanned with OKEN Scanner

Tabela IV

Armonicile impare in sin

Problema 7.15

$k\frac{\pi}{18}$	$\sin k\frac{\pi}{18}$	E_k	A_1	A_{17}	A_3	A_{15}	A_5	A_{13}	A_7	A_{11}	A_9	
0^0	0	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0000
10^0	0,17365	9,5	1,649675	—	—	—	–10,59265	—	– 6,42505	—	—	
20^0	0,34202	15,2	—	5,198704	—	—	—	–10,08959	—	– 26,16453	—	
30^0	0,5	23	11,5	—	4,75 18,5 30,5	—	11,5	—	–11,5	—	—	
40^0	0,64271	29,5	—	18,962305	—	—	—	49,193435	—	9,770408	—	
50^0	0,76604	37	28,34348	—	—	—	7,279380	—	46,72844	—	—	
60^0	0,86603	47	—	40,70341	—	13,163656 25,547885 –66,251295	—	–40,70341	—	40,70341	—	
70^0	0,93969	61	57,32109	—	—	—	–34,76853	—	8,927055	—	—	
80^0	0,98481	76,5		75,337965	—	—	—	14,969112	—	–29,051895	—	
90^0	1	44,5	44,5	—	23 –44,5	—	44,5	—	44,5	—	9,5 ; –61 –23 37 44,5	

R_n	143,314245	140,202384	−28,75	−27,539754	17,91620	13,349547	−6,769555	−4,742607	7	
T_n	140,202384		−27,539754		13,349547		−4,742607			
$R_n + T_n$	283,516629		−56,289754		31,265747		−11,512162		7	
$R_n - T_n$	3,111861		− 1,210246		4,566653		− 2,026948			
$A_n = \frac{R_n + T_n}{9}$	31,501847		− 6,254417		3,473971		− 1,279129		0,77777	
$A_{p-n} = \frac{R_n - T_n}{9}$	0,345762		− 0,134471		0,507406		− 0,225216			

Veificarea sumelor R_n și T_n

Sume impare R_n		Sume T_n impare	
R_1	+ 143,314245	$T_5 \times 0,98481$	13,146095
$-R_3$	+ 28,75	$T_3 \times 0,866$	−23,848774
$+R_5$	+ 17,91620	$T_7 \times 0,6428$	− 3,048157
$-R_7$	+ 6,769555	$T_1 \times 0,342$	47,949084
$+\frac{1}{2} R_9$	+ 3,5		
$\Sigma = \frac{9}{2} E_9$	200,25 = 200,25	$\Sigma = \frac{9}{4} E_2$	34,19935 = 34,2

Scanned with OKEN Scanner

Tabela V

Armonicele impare în cos

Problema 7.15

$k\frac{\pi}{18}$	$\cos k\frac{\pi}{18}$	M_k	B_1	B_{17}	B_3	B_{15}	B_5	B_{13}	B_7	B_{11}	B_9	
0^0	1	0	0	—	0 21	—	0	—	0	—	8,8 ; 21 -18,5 ; -14,5	—
10^0	0,98481	— 3,5	—	— 3,446835	—	—	—	—20,68101	—	— 18,71139	—	—
20^0	0,93969	— 8,8	— 8,269272	—	—	—	17,384265	—	13,625505	—	—	—
30^0	0,86603	— 15	—	— 12,99045	—	—3,031105 16,45457 18,18663	—	12,99045	—	12,99045	—	—
40^0	0,76604	—18,5	—14,171740	—	—	—	—11,10758	—	6,741152	—	—	—
50^0	0,64271	— 19	—	— 12,21301	—	—	—	—2,249765	—	13,49859	—	—
60^0	0,5	— 21	—10,5	—	— 4,4 9,25 7,25	—	—10,5	—	—10,5	—	—	—
70^0	0,34202	— 21	—	— 7,18242	—	—	—	6,49838	—	— 1,19707	—	—
80^0	0,17365	—14,5	—2,517925	—	—	—	1,52812	—	— 3,21252	—	—	—
90^0	0	44,5	—	0	—	0 0	—	0	—	0	—	0000

Q_n	− 35,45893	−35,832715	33,1	31,610095	−2,695195	−3,441945	6,654132	6,58058	− 3,2
P_n	−35,832715		31,610095		−3,441945		6,58058		
$Q_n + P_n$	− 71,291652		64,710095		− 6,137140		13,234712		− 3,2
$Q_n - P_n$	0,373778		1,489905		0,746750		0,073552		
$B_n = \frac{Q_n + P_n}{9}$	− 7,921294		7,19001		− 0,681904		− 1,470523		0,35555
$B_{p-n} = \frac{Q_n - P_n}{9}$	0,041530		0,165545		0,082972		0,008173		

Verificarea sumelor P_n și Q_n

Sume Q_n impare		Sume P_n impare	
Q_1	− 35,458937	$P_1 \times 0,98481$	− 35,28735
Q_3	33,1	$P_3 \times 0,86603$	27,37426
Q_5	− 2,695195	$P_5 \times 0,6428$	− 2,211874
Q_7	6,654132	$P_7 \times 0,34202$	2,250558
$\frac{1}{2} Q_9$	− 2,6		
$\sum = \frac{9}{2} M_0$	0=0	$\sum = \frac{9}{4} M_1$	− 7,87441 ≅ − 7,875

Tabela VI

Tabloul de calcul al armonicelor de curent

Problema 7.15

n	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	Unitatea	Observații
A_n		31,501847	− 6,254417	3,473971	− 1,279129	0,77777	− 0,225216	0,507406	− 0,134471	0,345762	mm	
B_n		− 7,921294	7,19001	− 0,681904	1,470523	− 0,355555	0,008173	0,082972	0,165545	0,041530	mm	
A_n^2		992,365923	39,117644	12,068467	1,636173	0,604926	0,050724	0,257454	0,018082	0,119549		
B_n^2		62,746835	51,696243	0,464987	2,162429	0,126455	0,0000667	0,006884	0,027403	0,001724		
$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2$		1055,112758	90,813888	12,533455	3,798602	7,731341	0,0507907	0,264338	0,045485	0,121274		
$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$		32,48249	9,52962	3,54026	1,94900	0,85518	0,22536	0,51413	0,21327	0,34822	mm	
C_n		6,736849	1,976439	0,734237	0,404222	0,177374	0,047277	0,106624	0,044217	0,024908	amperi	
$\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$		0,251454	− 1,149490	0,196289	− 1,149634	0,457140	− 0,036289	− 0,163521	− 1,231083	− 0,120111		
φ_n'		14°7′	48°58′	11°7′	48°58′	24°35′	2°7′	9°17′	50°56′	6°53′		
$\sin \varphi_n = -\frac{B_n}{C_n}$		> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	< 0	< 0	< 0		
$\cos \varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$		> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0		
φ_n		14°7′	228°58′	11°7′	22 8°58′	24°35′	182°7′	350°43′	230°56′	353°7′		
φ_n/n		14°7′	76°19′	2°13′	76°19′	2°44′	16°33′	26°57′	15°23′	20°46′		

c) Calculul puterilor se face cu formulele cunoscute. Se găseşte: $P = 262{,}38$ W, $Q = -659{,}98$ VAR. Pentru puterea deformantă, deoarece $\delta_u < 20\%$ se ia $D = U_{ef} I_d = 228{,}99$ VAD.

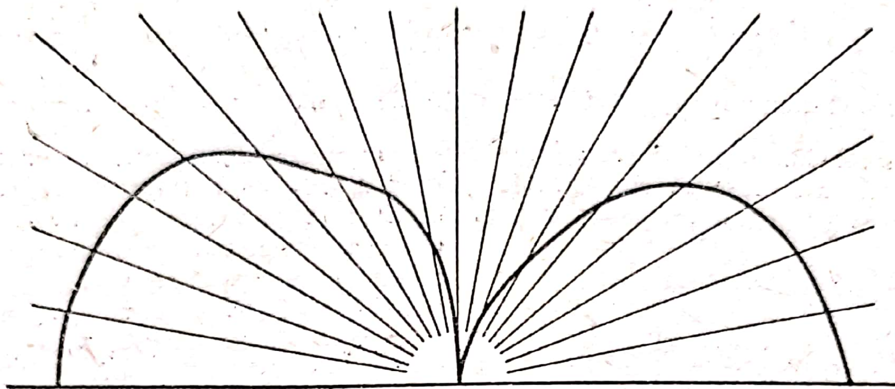


Fig. 7.15 *a*

Se găseşte apoi $S = 745{,}549$ VA, eroarea de determinare a puterii aparente (faţă de indicaţia aparatelor de măsură) este $-0{,}593\%$.

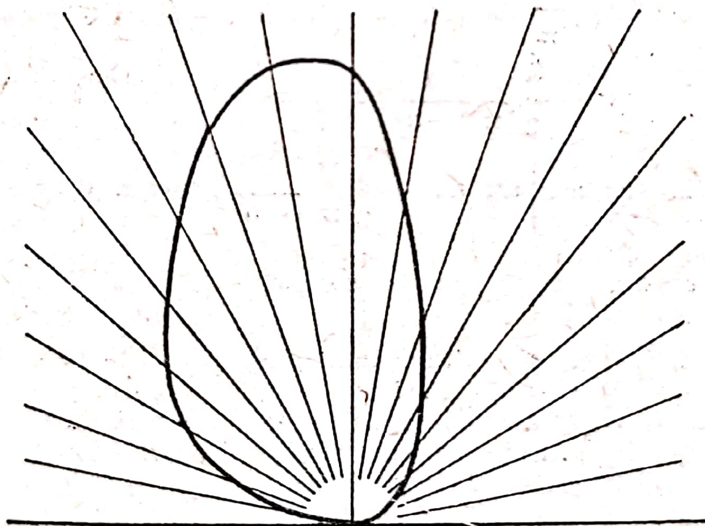


Fig. 7.15 *b*

d) Din calculul grafic (fig. 7. 15,*a* şi *b*), se găseşte: $U_{ef} = 149{,}83$ V cu eroarea $-0{,}18\%$ şi $I_{ef} = 4{,}98$ A cu eroarea $-0{,}431\%$.

7.16. Prin metoda integrării sau prin metoda salturilor, se găseşte uşor:

$$i = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{2(I_2 - I_1)}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{1}{3}\sin 3\,\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\,\omega t + \ldots\right)$$

7.17. Ca mai sus, se găseşte $i = \frac{2}{3} I - \frac{\sqrt{3}}{\pi 2} I \left(\cos \omega t - \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{3} \cos 4 \omega t - \ldots\right) + \frac{3}{2\pi} I \left(\sin \omega t + \frac{1}{2} \sin 2 \omega t + \frac{1}{3} \sin 4 \omega t + \ldots\right)$. *a*) Se foloseşte relaţia (32). *b*) Grafic. In ambele cazuri se găseşte $I_{ef} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, I$.

7.18. Tensiunea aplicată este dată de ecuaţia $u = Ri + L\frac{di}{dt}$. Curba căderii de tensiune ohmice are aceeaşi formă cu aceea a curentului. Curba căderii de tensiune inductive se construeşte ţinând seama că derivata curentului este constantă şi este egală cu panta curbei curentului: pe porţiunea Oa ea este egală cu Im/τ_1, iar pe porţiunea ab ea este Im/τ_2. Numeric se găseşte: valoarea maximă a lui $Ri = 10$ V. Din $\tau_1 + \tau_2 = 0{,}020$ s şi $\tau_1/\tau_2 = 4$, se găseşte $\tau_1 = 0{,}02$ s şi $\tau_2 = 0{,}005$ s; deci $L\frac{di}{dt}$ pe porţiunea Oa este egală cu 5 V, iar pe porţiunea ab este egală cu -20 V. Curba tensiunii este deci: pentru $0 < t \leqslant \tau_1, \leqslant u = 5 + 500\,t$ V; pentru $\tau_1 \leqslant t \leqslant T$, $u = 30 - 2000\,t$ V (fig. 7.18).

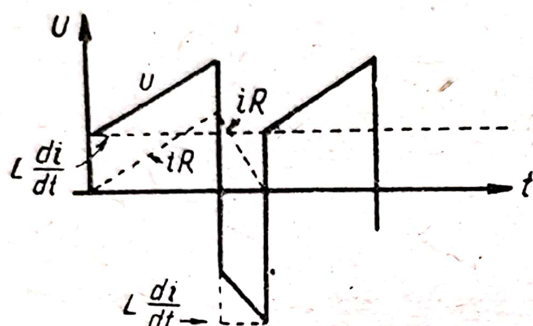


Fig. 7.18

7.19. Se aplică metodele de calcul (integrare sau salturi); se găseşte:

$$y = \frac{Y}{2\pi}(\cos\alpha + \cos\beta) + \frac{Y}{2\pi}(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \pi - \alpha - \beta)\sin x + \frac{Y}{2\pi}(\sin^2\beta - \sin^2\alpha)\cos x + \sum_{2}^{\infty}\frac{Y}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\Big[\cos n\pi\,(n\sin\beta\cos n\beta - \cos\beta\sin n\beta) + \cos\alpha\sin n\alpha - n\sin\alpha\cos n\alpha\Big]\sin nx + \sum_{2}^{\infty}\frac{Y}{\pi}\frac{1}{1-n^2}\Big[\cos n\pi\,(\cos\beta\cos n\beta + n\sin\beta\sin n\beta) + \cos\alpha\cos n\alpha + n\sin\alpha\sin n\alpha\Big]\cos nx.$$

7.20. Se aplică metoda Crug. Se găseşte: $i = 44{,}8 \sin(\omega t - 13^0 50') + 14{,}1 \sin(3\omega t + 53^0 30') + 2{,}74 \sin(5\omega t - 48^0 50)$.

7.21. Funcţie pară. Se poate rezolva fie prin metoda integrării, fie prin metoda discontinuităţilor. Se mai poate rezolva şi ţinând seama de soluția problemei 7.19, dublând rezultatele. Se găseşte:

$$y = \frac{Y}{\pi}(\cos\alpha + \cos\beta) + \sum_{2}^{2n}\frac{2Y'}{\pi}\cdot\frac{1}{1-k_2}\Big[k\sin\beta\cos k\beta - \cos\beta\sin k\beta + \cos\alpha\sin k\alpha - k\sin\alpha\cos k\alpha\Big]\sin kx + \sum_{2}^{2n}\frac{2Y}{\pi}\cdot\frac{1}{1-k^2}\Big[\cos\beta\cos k\beta + k\sin\beta\sin k\beta + \cos\alpha\cos k\alpha + k\sin\alpha\sin k\alpha\Big]\cos kx.$$

Scanned with OKEN Scanner

7.22. Se face calculul numai asupra sfertului de perioadă fie prin metoda discontinuităţilor (are numai salturi de ordonată), fie prin metoda integrării. Curba este electrotehnică. Se găseşte

$$A_n = \frac{4}{\pi \cdot n}\left[X\cos n\alpha + Z\cos n(\alpha+\beta) + W\cos n(\alpha+\beta+\gamma)\right], \; n \text{ impar.}$$

7.23. Curba este electrotehnică şi se procedează ca în cazul problemei precedente. Se găseşte :

$$A_n = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{Z}{\beta}-\frac{X}{\alpha}\right)\sin n\alpha - \frac{Z}{\beta}\sin n(\alpha+\beta)\right], \; n \text{ impar.}$$

7.24. Pentru curba în trapez se face $Z = 0$ şi rezultă $X = R$. Se găseşte rezultatul obţinut în problema 7.7.

Pentru curba în dreptunghi se face $Z = 0$ şi $\alpha = 0$, obţinându-se rezultatul din problema 7.5.

Pentru curba în triunghi isoscel se face $\frac{Z}{\beta} = \frac{X}{\alpha}$ şi $\gamma = 0$. Se găseşte rezultatul din problema 7.6.

7.25. Curba este formată numai din vârfurile sinusoidelor dintre două intersecţii consecutive. Se aplică metoda integrării numai unui singur arc. Ecuaţia curbelor este de forma $y = Y\sin\left(\omega t + k\frac{2\pi}{3}\right)$ în care $k = 0, \pm 1$. Se găseşte

$$i = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} I_m \left[1 + \frac{2}{9.1-1}\cos 3\omega t - \frac{2}{9.2^2-1}\cos 6\omega t + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{2(-1)^{k+1}}{9k^2-1}\cos 3k\omega t + \ldots\right]$$

8. 8.1. $I_{ef} = 6{,}5$ A; $I_d = 2{,}5$ A; $i = 6{,}5\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = \frac{I_{ef}}{I_{med}}$ dar $I_{med} = I_o + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum \frac{1}{k} I_k = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(6 + \frac{2}{3} + \frac{1{,}5}{5}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{20{,}9}{3}$.·. $\alpha = 6{,}5 \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{20{,}9} = 1{,}035$; $\delta_I = \frac{I_d}{I_{ef}} \times 100 = 38{,}46\%$.

8.2. $U_{ef} = 121{,}2$ V; $U_d = 17{,}3$ V; $u = 121{,}2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ luându-se origine de fază originea curbei nesinusoidale; $\alpha = 1{,}075$; $\delta_T = 14{,}25\%$.

8.3. $U_{ef} = 122{,}7$ V; $U_d = 100{,}3$ V; $u = 122{,}7\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 0{,}74$; $\delta_T = 82\%$.

8.4. $I_{ef} = 6{,}6$ A; $I_d = 5{,}57$ A; $i = 6{,}6\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 0{,}736$; $\delta_I = 84{,}5\%$.

8.5. $I_{ef} = 7{,}42$ A; $I_d = 5{,}48$ A; $i = 7{,}42\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$; $\alpha = 1{,}21$; $\delta_I = 74\%$.

8.6. a) Valoarea eficace se calculează grafic şi se găseşte (vezi problema 7.12): $U_{ef} = 0{,}745$; $U_M = 1{,}49\,U$ volţi;

b) $U_d = 0{,}24\,U$ volţi; $\delta = 16{,}11\%$.

Scanned with OKEN Scanner

8.7. Dacă $u_n = U_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \alpha_n)$ şi $i_n = I_n \sqrt{2} \sin(n\omega t - \beta_n)$, atunci $\varphi_n = \beta_n - \alpha_n$. Avem $\rho = \frac{Q}{P}$ şi $\tau = \frac{D}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ apoi $k = \cos\varphi . \cos\xi$ în care $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}$ şi $\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}}$. Puterile se calculează din $P = \Sigma U_n I_n \cos\varphi_n$, $Q = \Sigma U_n I_n \sin\varphi_n$. $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ şi $S = U_{ef} . I_{ef}$, în care $U_{ef} = \sqrt{\Sigma U^2_n}$, etc. Calculând se găseşte $P \cong 438$ W; $Q \cong 258{,}7$ VAR; $U_{ef} = 100{,}5$ V; $I_{ef} \cong 5{,}1$ A; $S \cong 512{,}6$ VA; $D \cong 63{,}1$ VAD; $\rho = 0{,}59$; $\tau = 0{,}1044$; $\cos\varphi = 0{,}862$; $\cos\xi = 0{,}995$; $K = 0{,}858$.

8.8. $P = 432{,}7$ W; $U_{ef} = 100$ V; $I_{ef} = 7{,}42$ A; $S = 742$ VA; $K = 0{,}584$; $Q = 249{,}7$ VAR; $\rho = 0{,}577$; pentrucă $\delta_I \cong 0{,}1\% < 20\%$, $D = U_{ef} I_d = 548$ VAD, căci $I_d = 5{,}48$ A; $\tau = 1{,}1$.

8.9. Formula exactă de calcul a puterii deformante este $D^2 = \Sigma\left[U_m^2 I_n^2 + U_n^2 I_m^2 - 2 U_m U_n I_m I_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)\right]$. Se găseşte $D = 357$ VAD; $I_d = 3{,}35$ A, $U_1 = 120$ V $\therefore$ $D' = 402$ VAD şi $\varepsilon = +12{,}6\%$.

8.10. Unda de curent fiind dată în cosinus, trebue transformată în sinus cu relaţia $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Se găseşte $i = 5 + 5 \sin(\omega t + 25^0) + 3 \sin(3\omega t - 145^0) + \sin(5\omega t - 10^0)$; $U_{ef} = 122{,}4$ V; $I_{ef} = 6{,}34$ A; $S = 778$ VA; $P = 723{,}3$ W; $Q = 132{,}5$ VAR; $D = 270$ VAD; $K = 0{,}93$; $\rho = 0{,}184$; $\tau = 0{,}368$.

8.11. $U_{ef} = 123$ V; $I_{ef} = 6{,}55$ A; $S = 806$ VA; $P = 726{,}8$ W; $Q = 136{,}0$ VAR; $D = 320{,}4$ VAD, $\rho = 18{,}74\%$, $\tau = 43{,}30\%$; $K = 0{,}9$.

8.12. Aplicând legea lui Ohm se obţine:

$$i = 2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}5 \sin\left(5\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$U_{voltmetru} = 50{,}5$ V.

8.13. Se aplică legea lui Ohm pentru fiecare armonică în parte, scriind cu cantităţi complexe impedanţa pentru fiecare armonică; se determină curentul total i, făcând suma curenţilor din ramuri. Se găseşte:

$$i_R = 30 \sin\omega t + 10 \sin(3\omega t + 20°)$$
$$i_L = 90 \sin(\omega t - 90°) + 10 \sin(3\omega t - 70°)$$
$$i_C = 10 \sin(\omega t + 90°) + 10 \sin(3\omega t + 110°)$$
$$i = 85{,}5 \sin(\omega t - 69°30') + 10 \sin(3\omega t + 20°)$$

8.14. Aplicând legea lui Ohm pentru fiecare armonică în parte şi scriind $I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$ se obţine $I = 1{,}61$ A.

8.15. (a) $i_1 = 35{,}3 \sin(\omega t - 45°) + 6{,}32 \sin(3\omega t - 71°30')$ A; $i_2 = 35{,}3 \sin(\omega t + 45°) + 19 \sin(3\omega t + 18°30')$ A; $i = i_1 + i_2 = 50 \sin\omega t + 20 \sin 3\omega t$ A; (b) $I_1 = 25{,}36$ A; $I_2 = 29{,}05$ A; $I = 38$ A; $U = 76{,}15$ V. (c) $\alpha_1 = 1{,}06$; $\alpha_2 = 1{,}09$; $\alpha_I = 1{,}055$; $\alpha_u = 1{,}05$; $f_{vI} = 1{,}28$; $f_{vu} = 1{,}18$; pentru curenţii din impedanţe se construesc oscilogramele corespunzătoare deducându-se valorile maxime respective.

$\delta_1 = 17{,}9\%$; $\delta_2 = 53{,}8\%$; $\delta_I = 40\%$; $\delta_T = 40\%$. (d) $P = 2165$ W.

8.16. Curentul se calculează prin metoda suprapunerii efectelor. Avem: $Z_1 = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5\ \Omega$; $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_L - X_C}{R} = -1{,}33$ $\therefore$ $\varphi_1 = -53^0 08'$;

$i_1 = \frac{U_1\sqrt{2}}{Z_1} \sin(\omega t - \varphi_1) = 56{,}4 \sin(\omega t + 53^0 08'); Z_3 = \sqrt{R_2 + (3X_L - \frac{1}{3}X_C)^2} =$

$= 20{,}22\ \Omega$; $\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{3X_L - \frac{1}{3}X_C}{R} = 4 \therefore \varphi_3 = 81^0 28'$; $I_3\sqrt{2} = 0{,}21$ A; $Z_5 =$

$= \sqrt{R^2 + (5X_L - \frac{1}{5}X_C)^2} = 47{,}7\ \Omega$; $\operatorname{tg}\varphi_5 = \frac{5X_L - \frac{1}{5}X_C}{R} = 15{,}16 \therefore \varphi_5 = 86^0 23'$;

$I_5\sqrt{2} = 0{,}074$ A. Curentul căutat este $i = 56{,}4 \sin(\omega t + 53^0 08') + 0{,}21 \sin(3\omega t - 81^0 28') + 0{,}074 \sin(5\omega t - 86^0 23')$; $U_{ef} = 200$ V; $I_{ef} = 40{,}0$A; $S = 8000$ VA; $I_d = 0{,}157$ A; $\delta = 0{,}394\%$ $P = 4775$ W; $Q = -6374$ VAR; $D = 500$ VAD; $K = 0{,}6$ cap.

8.17. Se transformă în prealabil curba tensiunii într'o curbă în sinus. Se găseşte: $U = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 20^0) + 2\sqrt{2}\sin(5\omega t - 40^0) + 10\sqrt{2}\sin(7\omega t - 60^0)$; $P = 705$ W; $Q = 104$ VAR; $P_c = 1773$ VA; $U_{ef} = 14{,}3$ V; $I_{ef} = 126{,}7$ A; $S = 1912$ VA; $D = 1774$ VAD.

8.18. Tensiunea eficace este $U_{ef} = \sqrt{\Sigma U_k^2}$ iar intensitatea eficace a curentului $I_{ef} = \sqrt{\Sigma I_k^2} = \sqrt{\sum \frac{E_k^2}{k^2 X^2_L}} = \frac{1}{X_L}\sqrt{\sum\left(\frac{E_k}{k}\right)^2}$. Reactanța aparentă a circuitului va fi $X'_L = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = X_L \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum\left(\frac{U_k}{k}\right)^2}}$.

8.19. Avem $\frac{X'_L}{X_L} = \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum\left(\frac{U_k}{k}\right)^2}}$. Dar $\Sigma U_k^2 = (1 + 0{,}25^2 + 0{,}15^2)\, U_1^2 =$

$= 1{,}0850\, U_1^2$ şi $\Sigma\left(\frac{U_k}{k}\right)^2 = U_1^2\left[1 + \left(\frac{0{,}25}{3}\right)^2 + \left(\frac{0{,}15}{5}\right)^2\right] = 1{,}0078\ U_1^2$

$\therefore (X'_L / X_L) = 1{,}0766$, adică X'_L este cu 7,66% mai mare decât X_L.

8.20. Din relația $Z = \frac{U_{ef}}{I_{ef}}$, ținând seama că $I_k = \frac{U_k}{Z_k}$ şi $Z_k^2 = R^2 + k^2 X_L^2$ se deduce uşor $Z = \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum\left(\frac{U_k}{Z_k}\right)^2}} = Z_1 \sqrt{\frac{\sum U_k^2}{\sum\left(\frac{Z_1}{Z_k} U_k\right)^2}}$.

In cazul particular al problemei se găseşte $Z_1 = 100\ \Omega$; $Z = 101{,}46\ \Omega$, adică creşte cu 1,46%; $X'_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 62{,}4\ \Omega$, adică creşte cu 4%.

8.21. Ținând seama că $U_k = kX_L I_k$, se găseşte uşor $X'_L = \frac{U_{ef}}{I_{ef}} = X_L \sqrt{\frac{\Sigma (k I_k)^2}{\Sigma I_k^2}}$.

8.22. $b'_c = b_c \sqrt{\frac{\Sigma (kU_k)^2}{\Sigma U_k^2}}$.

8.23. 17,5 %.

8.24. $Z = 99,1\ \Omega$, adică o scădere cu 0,9 %. $X'_c = 58,5\ \Omega$, adică o scădere cu 2,5 %.

8.25. Deoarece $E_k = \frac{I_k}{kX_c}$ se deduce ușor $X'_c = X_c \sqrt{\frac{\Sigma \left(\frac{I_k}{k}\right)^2}{\Sigma I_k^2}}$.

8.26. $Z' = 5,0125\ \Omega$, adică cu 0,25 %, mai mare decât cea reală.

8.27. Curenții capacitivi corespunzători celor trei armonice sunt $I_{1C} = 1$ A, $I_{3C} = 0,6$ A, $I_{5C} = 0,5$ A; curenții inductivi sunt analogi, $I_{1L} = 1$ A; $I_{3L} = 0,067$ și $I_{5L} = 0,02$ A. Curentul rezultant dat de sursă este zero pentru fundamentală; $0,6 - 0,067 = 0,573$ A pentru armonica 3 și $0,5 - 0,2 = 0,48$ A pentru armonica 5. Valoarea eficace a acestui curent este 0,72 A. Valoarea eficace a curentului capacitiv este 1,27 A iar aceea a curentului inductiv este 1 A.

8.28. Trebue îndeplinită condiția de rezonanță pentru fiecare armonică în parte. $LCn^2\omega^2 = 1$. Se găsește: pentru $n = 1$, $L = 319$ m H; $n = 3$, $L = 35,4$ mH; $n = 5$, $L = 12,76$ mH. In aceste trei cazuri, curenții care intră în buclele oscilografului sunt: $i_1 = 2,82 \sin \omega t + 0,247 \sin (3\omega t - 69^0 27') + 0,086 \sin (5\omega t - 88^0 48')$; $i_3 = 2,10 \sin (\omega t + 41^0 40') + 0,7 \sin 3\omega t + 0,41 \sin (5\omega t - 14^0 02')$; $i_5 = 2,02 \sin (\omega t + 89^0 20') + 0,685 \sin (3\omega t + 41^0 40') + 0,423 \sin 5\ \omega t$.
Oscilogramele curenților se trasează ușor prin puncte.

8.29. Din tensiunea de scurtcircuit u_k se deduce reactanța transformatorului care se presupune inductivă (se neglijează rezistența ohmică). Se găsește $X_L = \frac{u_k}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = 6,3\ \Omega$, în care s'a luat U în kV și S în MVA. Cablul având capacitatea de $0,31 \times 6 = 1,86\ \mu F$, condiția de rezonanță este $2nX_L = \frac{10^6}{n\ 314 \cdot 1,86}$ de unde $n = 11,66$. Rezultă că circuitul ar putea să intre în rezonanță pentru armonicele 11 sau 13.

8.30. Curentul căutat este dat de ecuația $i = C\frac{du}{dt}$. Se găsește $i = \frac{8\ C\ \omega\ U}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1) \frac{\pi}{2} \sin \left[(2k+1)\ \omega t + \frac{\pi}{2}\right]$ care este o curbă mai deformată decât unda formată din dreptunghiuri $Y = \frac{4\ Ym}{\pi} \cdot \sum_0^\infty \frac{1}{2k+1} \sin (2k+1)\ \omega t$. Curba de curent este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ *înaintea* curbei de tensiune. Calculul coeficienților de distorsiune se face aplicându-se metoda obișnuită. Seria de sub radical fiind foarte convergentă se poate calcula limitându-ne la 8 termeni. Se găsește $\delta_T = 12,01\ \%$ și $\delta_I = 41,03\ \%$. Prin urmare curba curentului este mai deformată decât aceea a tensiunii: condensatorul accentuează deformația.

8.31. Curentul se deduce din relația $u = L\frac{di}{dt}$ prin integrare. Se găsește ușor $i = \frac{8U}{\pi^2 L\omega}\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\sin\left[(2k+1)\omega t - \frac{\pi}{2}\right]$, curbă asemănătoare cu a parabolei $y = \frac{32\,Ym}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^3}\sin(2k+1)\,\omega t$. Coeficientul de distorsiune este $\delta_1 = 3{,}80\,\%$, mai mic decât acela al tensiunii: inductanța ameliorează situația regimului deformant.

8.32. Notând $\overline{Z}_1 = j\,L\omega$ și $\overline{Z}_2 = \frac{-j}{C\omega} = -j\,31{,}4\ \Omega$, unda fundamentală a curentului este dată de relația $\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_1}{\overline{Z} + \frac{\overline{Z}_1\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2}} = \frac{\overline{U}_1(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2)}{\overline{Z}\,(\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2) + \overline{Z}_1\overline{Z}_2}$

Pentruca $I_1 = 0$ trebue ca $\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = 0$ sau $j\omega L - j\frac{1}{C\omega} = 0$, de unde se deduce ușor $L = 0{,}1$ H.

Pentru calculul lui $\overline{Z} = R_x + j\,X_x$ se calculează curenții produși de armonicele 3 și 5. Impedanțele respective sunt $\overline{Z}_{1(3)} = j\,3.314.0{,}1 = j\,94{,}2\,\Omega$ și $\overline{Z}_{2(3)} = -j10{,}5\Omega$, de unde $\overline{Z}_{T(3)} = R_x + j\,3\,X_x = \frac{\overline{Z}_{1\,(3)}\overline{Z}_{2\,(3)}}{\overline{Z}_{1\,(3)} + \overline{Z}_{2(3)}} = R_x + j3\,(X_x - 3{,}95)\ \Omega$. In același mod se găsește $\overline{Z}_{T\,(5)} = R_x + j\,5\,(X_x - 1{,}31)\ \Omega$. Curenții respectivi sunt $I_3 = U_3/Z_{T\,(3)}$ și $I_5 = U_5/Z_{T\,(5)}$. Punând condiția $|I_5| = 0{,}05\ |I_3|$ se găsește relația $4\,[R_x^2 + 9\,(X_x - 3{,}95)^2] = R_x^2 + 25\,(X_x - 1{,}31)^2$ de unde $R_x^2 = \frac{25\,(X_x - 1{,}31)^2 - 36\,(X_x - 3{,}95)^2}{3}$. Condiția ca R_x să fie real și pozitiv conduce la relația:

$$25\,(X_x - 1{,}31)^2 - 36\,(X_x - 3{,}95)^2 \geqslant 0$$

de unde se găsește $2{,}9 \leqslant X_x \leqslant 16{,}1\ \Omega$. Dacă luăm $X_x = 3{,}95\ \Omega$, găsim $R_x = 7{,}6\ \Omega$ Cu aceste valori găsim $\sqrt{2}\,\overline{I}_3 = 1{,}315 + j\,0$ A. $\therefore$ $\varphi_3 = 0$ și $\sqrt{2}\,\overline{I}_5 = 0{,}033 - j0{,}057$ A cu $\sqrt{2}\ I_1 = 0{,}066$ A și $\varphi_5 = 59^0 54'$. Curentul căutat este $i = 1{,}315\sin 3\omega t + 0{,}066\sin(5\omega t - 59^0 54')$. Cum $I_{ef} = I_d$ rezultă $\delta = 100\,\%$.

8.33. Curentul se calculează pentru fiecare armonică în parte. Pentru fundamentală $\frac{1}{C\omega} = 30\ \Omega$. Impedanța între J și K: $\overline{Z}_3 = 15\,(1 - j)\ \Omega$; impedanța între H și K: $\overline{Z}_2 = 85 - j\,15\ \Omega$; impedanța ramurii FG: $\overline{Z}_1 = 20 + j\,88\ \Omega$; impedanța totală a circuitului $\overline{Z} = 51{,}3 + j\,32{,}6\ \Omega = 60{,}8\ \underline{|32^0 20'}\ \Omega$. Unda fundamentală a tensiunii fiind $\overline{U}_1 = 100\ \underline{|0}\ \therefore\ \overline{I}_1 = 1{,}64\ \underline{|-32^0 30'}$ A. Pentru armonică $\overline{Z}_3' = 3 - j\,9\ \Omega$; $\overline{Z}_2' = 73 - j\,9\ \Omega$; $\overline{Z}_1' = 20 + j\,264\ \Omega$; $\overline{Z}' = 71 + j\,10{,}8\ \Omega = 71{,}8\ \underline{|8^0 40'}\ \Omega$. $U_3 = 50\ \underline{|0}\ \therefore\ \overline{I}_3 = 0{,}7\ \underline{|-8^0 40^0}$ A.

Curba curentului este:

$$i = 23{,}15\sin(\omega t - 32^0 30') + 0{,}99\sin(3\omega t - 8^0 40')\ \text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$U_{ef} = 112$ V; $U_d = 50$ V; $\delta_T = 45{,}5\%$; $I_{ef} = 16{,}39$ A; $I_d = 0{,}7$ A; $\delta_I = 4{,}27\%$. Curentul este mai puțin deformat, deci circuitul este netezitor pentru curent.

8.34. *a*) $S = 800$ kVA; $S' = 783$ kVA $\xi = 2{,}17\%$

b) $p_D = 3R\dfrac{P^2 + Q^2 + D^2}{3U^2}$ W; $p_s = 3R\dfrac{P^2 + Q^2}{3U^2}$ W; $\zeta = \dfrac{p_D - p_s}{p_s}$

$$\frac{D^2}{P^2 + Q^2} = \tau^2 = 7{,}60\%.$$

8.35. *a*) $S = 7980$ VA; $S' = 7950$ VA; $\xi = 0{,}38\%$.

b) $\zeta = 1{,}08 \times 10^{-4}\%$. Regimul este foarte puțin deformant.

8.36. $e_I = E_1\sqrt{2}\sin\omega t + E_3\sqrt{2}\sin 3\omega t$; $e_{II} = E_1\sqrt{2}\sin(\omega t - 120^0) + E_3\sqrt{2}\sin 3\omega t$; $\therefore$ $e_I - e_{II} = e_{I-II} = E_1\sqrt{2}\sqrt{3}\sin(\omega t + 30^0)$. Valoarea eficace a tensiunii pe fază este $\sqrt{E_1^2 + E_3^2}$, iar a tensiunii între faze $\sqrt{3}E_1$.

Raportul căutat este $\xi = \dfrac{\sqrt{3}E_1}{\sqrt{E_1^2 + E_3^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{E_3}{E_1}\right)^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{k}{100}\right)^2}}$.

Se găsește ușor:

k	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ξ	1,732	1,723	1,698	1,659	1,608	1,549	1,485	1,420	1,351	1,287	1,227

8.37. Se pornește ca mai sus dela expresia tensiunii pe fază, care conține armonica 5. Se scrie apoi tensiunea între faze (aplicată wattmetrelor). Se determină puterea reală $3\ U_1 I_1 \cos\varphi_1 + 3\ U_5 I_5 \cos\varphi_5$ și puterea aparentă reală $3\sqrt{(U_1^2 + U_5^2)(I_1^2 + I_5^2)}$, deducându-se factorul de putere real. Wattmetrul 1 indică $W_1 = \sqrt{3}\ U_1 I_1 \sin(\varphi_1 + 120^0) + \sqrt{3}\,U_5 I_5 \sin(\varphi_5 + 60^0)$, iar wattmetrul 2 indică $W_2 = \sqrt{3}\,U_1 I_1 \sin(\varphi_1 + 60^0) + \sqrt{3}\ U_5 I_5 \sin(\varphi_5 + 120^0)$. Factorul de putere se deduce din relația $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}\dfrac{W_2 - W_1}{W_2 + W_1}$. Se găsește ușor

$$\frac{\text{factor de putere indicat}}{\text{factor de putere real}} = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U_5^2)(I_1^2 + I_5^2)}{U_1^2 I_1^2 + U_5^2 I_5^2 + 2U_1 I_1 U_5 I_5 \cos(\varphi_1 + \varphi_5)}}.$$

8.38. Procedând în același mod se găsește

$$\frac{K\ \text{indicat}}{K\ \text{real}} = \sqrt{\frac{(U_1^2 + U_7^2)(I_1^2 + I_7^2)}{U_1^2 I_1^2 + U_7^2 I_7^2 + 2U_1 I_1 U_7 I_7 \cos(\varphi_1 - \varphi_7)}}.$$

Dacă toate elementele au aceeași mărime, eroarea este mai mare în cazul armonicei 5.

8.39. Alternatorul fiind legat în stea, tensiunea de borne nu conține armonica 3; expresia ei este:

$$e_{12} = 220\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 20\sqrt{2}\sqrt{3}\sin\left(5\omega t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Impedanță aparentă este $Z' = U_{ef}/I_{ef} = 100{,}37\ \Omega$, adică cu 0,37 % mai mare decât impedanța circuitului. Reactanța aparentă este $X'_L = \sqrt{Z'^2 - R^2} = 60{,}61\ \Omega$ sau cu 1,015 % mai mare decât cea dată. Factorul de putere se determină din relația:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{X'_L}{R} = 0{,}7576 \qquad \therefore K = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}\psi}} = 0{,}797.$$

Pe de altă parte $K = \cos\varphi.\ \cos\xi$ și cum $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{X_L}{R} = 0{,}75$; $\therefore \cos\varphi = 0{,}8$ și deci $\cos\xi = 0{,}99625$. Din relațiile $\cos\varphi = P/(\sqrt{P^2 + Q^2})$ și $\operatorname{tg}\xi = D/\sqrt{P^2 + Q^2})$ se deduce $D = P\ (\operatorname{tg}\xi/\cos\varphi) = 126$ VAD, căci $P = RI^2_{ef} = 1162{,}6$ W. Din relația $\operatorname{tg}\varphi = Q/P \therefore Q = 872$ VAR. Spre verificare se calculează $S^2 = U^2_{ef}\ I^2_{ef} = P^2 + Q^2 + D^2$.

8.40. Curentul pe faza I este:

$$i_1 = 6\sin\omega t + 2{,}36\sin(3\omega t - 30^0)\ \text{A}.$$

Curentul pe faza II se deduce din relația $e = L\dfrac{di}{dt}$ și se găsește:

$$i_2 = 56\sin(\omega t + 150^0) + 0{,}78\sin(3\omega t - 120^0)\ \text{A}.$$

Curentul pe faza III se deduce din relația $u = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0 i dt$ și se găsește:

$$i_3 = 6\sin(\omega t - 150^0) + 7{,}08\sin(3\omega t + 60^0)\ \text{A}$$

curentul în firul neutru este:

$$i_0 = i_1 + i_2 + i_3 = -0{,}73\sin\omega t + 6{,}72\sin(3\omega t + 39^040')\ \text{A}.$$

8.41. *a*) Curba este bisimetrică impară. Termenul general se poate obține prin integrare sau prin metoda incidentelor geometrice. Se găsește ușor $y = 4(\gamma - 1)\dfrac{U}{T}t + U_1$, de unde:

$$U_k = \frac{4U}{k\pi}\left[1 + (\gamma - 1)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k\frac{\pi}{2}}\right].$$

b) Din $U_{ef} = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$ se găsește:

$$U_{ef} = \frac{U}{\sqrt{3}}\sqrt{\gamma^2 + \gamma + 1}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Rezidiul deformant este :

$$U_d = \sqrt{U_{ef}^2 - \frac{1}{2}U_1^2} = U\sqrt{\frac{1}{3}(\gamma^2+\gamma+1) - \frac{32}{\pi^4}\left(\gamma+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

8.42. a) Se calculează impedanțele corespunzătoare fundamentalei și armonicei, și se calculează apoi amplitudinile și defazajele cu relațiile (56). Se găsește :

$$i = 9{,}4\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^0) + 1{,}62\sqrt{2}\sin(3\omega t + 30^0)\ \text{A}.$$

b) Din $U_{ef} = 3467$ V și $I_{ef} = 9{,}54$ A, se găsește $\delta_T = 10\%$ și $\delta_I = 17\%$ Apoi $P = 16685$ W; $Q = -27680$ VAR; $D = U_{ef} I_d = 5640$ VAD; $S = \sqrt{P^2+Q^2+D^2} = 32833$ VA $\cong U_{ef} I_{ef}$.

c) $K = \dfrac{P}{S} = 0{,}506$ cap $\cong \cos\varphi \cdot \cos\xi = 0{,}50$ cap.

8.43. Se procedează ca mai sus și se găsește :

a) Curentul :

$$i = 16{,}6\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^0) + 0{,}94\sqrt{2}\sin(3\omega t - 60^0)\ \text{A}$$

b) $\delta_I = 5{,}65\%$; $P = 49762$ W; $Q = 28980$ VAR; $D = 3260$ VAD; $S = 57678$ VA;

c) $K = \dfrac{P}{S} = 0{,}862$ ind $= \cos\varphi \cdot \cos\xi$.

8.44. Pentru circuitul (a) se găsește : $I = 3{,}57$ A; $P = 256$ W; $K = 0{,}69$. Pentru circuitul (b) : $I = 4{,}5$ A; $P = 404$ W; $K = 0{,}86$.

8.45. Din relația (37) se deduce $U_1 = 200$ V, de unde rezultă $U_3 = 80$ V, $U_5 = 40$ V, $U_7 = 10$ V. Cu prima relație (56) se calculează $I_1 = 21{,}58$ A, $I_3 = 4{,}88$ A, $I_5 = 1{,}63$ A, $I_7 = 0{,}294$ A, de unde $I_{ef} = 22{,}5$ A. Rezultă $S = 4950$ VA și $P = R\,\Sigma I_k^2 = 4049{,}36$ W și deci $K = 0{,}815$.

8.46. Expresia curentului din circuit este

$$i = \frac{100}{\sqrt{4+(X_L-9)^2}}\sin\left[\omega t - \text{arc tg}\,\frac{X_L-9}{2}\right] + \frac{40}{\sqrt{4+(3X_L-3)^2}}\sin\left[3\omega t - \text{arc tg}\,\frac{3X_L-3}{2}\right]$$

cu valoarea eficace

$$I = 10\sqrt{2}\sqrt{\frac{25}{4+(X_L-9)^2} + \frac{4}{4+(3X_L-3)^2}}.$$

Factorul de putere al circuitului este

$$K = \frac{R(I_1^2+I_3^2)}{\sqrt{(U_1^2+U_3^2)(I_1^3+I_3^2)}} = R\sqrt{\frac{I_1^2+I_3^2}{U_1^2+U_3^2}}.$$

Pentru diverse valori ale lui X se obţin rezultatele din tabloul de mai jos :

X_L	0	1	3	9	∞
I_1	7,68	8,58	11,18	35,36	0
I_2	5,64	14,14	4,47	1,18	0
φ_1	– 77°20′	– 75°55′	– 71°35′	0	–
φ_2	– 56°20′	0	71°35′	85°15′	–
I	9,53	16,54	12,04	35,37	0
K	0,125	0,217	0,158	0,464	–

Curentul şi factorul de putere au două maxime corespunzătoare respectiv rezonanţei fundamentalei şi armonicei 3.

8.47. Din prima măsurătoare $U/L\omega = I \therefore L\omega = 10$

In cazul când există armonica 3 se pot scrie ecuaţiile

$$U_1^2 + U_3^2 = 100^2 \text{ şi } \left(\frac{U_1}{L\omega}\right)^2 + \left(\frac{U_3}{3L\omega}\right)^2 = 8^2. \text{ Se obţine } \beta = \frac{U_3}{U_1} = 0{,}83.$$

8.48. Se aplică metoda suprapunerii efectelor. Se găseşte $i = 2{,}5 + 0{,}849\sqrt{2}\sin(\omega t - 31^0 30')$ A şi $i = 0{,}232\sqrt{2}\sin(\omega t - 166^0 30')$ A.

8.49. $I_1 = 4{,}26$ A şi $I_2 = 1{,}18$ A.

8.50. Ecuaţia circuitului este $e = ri$ sau $E\sqrt{2}\sin\omega t = \frac{R}{\sqrt{i}} \cdot i = R\sqrt{i}$.

Se găseşte $i = \frac{E^2}{R^2}\left[1 + \sin(2x - 90^0)\right]$. Valoarea eficace este $\frac{E^2}{R^2}\sqrt{2}$.

8.51. Sistemul fiind cu neutrul izolat, armonica 3, care este homopolară, nu va da curent. Sistemul nu absoarbe deci putere deformantă. Deasemenea sistemul nu va absorbi nici putere activă sau reactivă datorită armonicei 3. Armonica 3 nu are ca efect decât să producă o oscilaţie a punctului neutru. (*a*) Deplasarea punctului neutru : Pentru armonica fundamentală $\overline{U}_{01} = 603 \underline{|120°}$ V; pentru armonica trei $\overline{U}_{03} = 53{,}6 \underline{|0}$ V. Potenţialul punctului neutru este $U_0 = 850\sin(\omega t + 120°) + 93\sin 3\omega t$ V.

(*b*) Curenţii pe fază sunt daţi numai de armonica fundamentală : $\overline{I}_A = 61 \underline{|45°} = 43 + j\,43$ A ; $\overline{I}_B = 61 \underline{|249°30'} = -59 - j\,15{,}7$ A ; $\overline{I}_c = 31{,}6 \underline{|300°30'} = 16 - j\,27{,}3$ A.

(*c*) $\overline{S}_A = -j\,3(2 + \sqrt{3})\frac{E^2}{R} = -j\,45130$ VA ; $\overline{S}_B = j\,3(2 + \sqrt{3})\frac{E^2}{R} = j\,45130$ VA ; $\overline{S}_C = 3\frac{E^2}{R} = 4033$ VA. $\overline{S} = \overline{S}_C$. Sistemul nu absoarbe decât putere reală.

Scanned with OKEN Scanner

PARTEA III

9. 9.1. Luăm ca scară 5 mm = 1 V. Diagrama topografică a tensiunilor se construeşte uşor:

Se găseşte $\overline{OA} = 5{,}4$ V; $\overline{OB} = 8{,}6$ V; $\overline{OC} = 6{,}8$ V; $\overline{AB} = 13{,}4$ V; $\overline{BC} = 13{,}2$ V; $\overline{CA} = 9{,}2$ V; $\overline{GA} = 6{,}2$ V; $\overline{GB} = 8{,}4$ V; $\overline{GC} = 6{,}0$ V; $\overline{OG} = 1{,}1$ V.

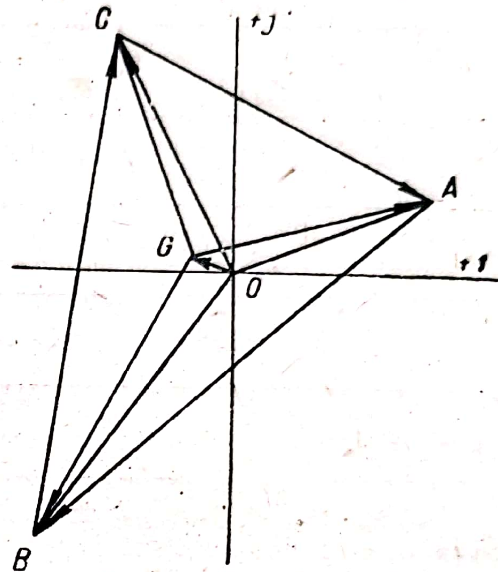


Fig. 9.1.

9.2. Cum $\overline{Y}_A = \overline{Y}_B = \frac{1}{\overline{Z}_A}$,

$\overline{Y}_C = \frac{1}{2\overline{Z}_A} = \frac{1}{2}\overline{Y}_A$ şi $\overline{U}_A + \overline{U}_B = -\overline{U}_C$.

se deduce $U_0 = -\frac{1}{5} U_C$. Cu aceste elemente diagrama topografică se construeşte uşor.

9.3. Punând $Y_A = Y_B = \frac{1}{R}$ şi $Y_C = \frac{1}{\alpha R}$, cum $\overline{U}_A + \overline{U}_B = -\overline{U}_C$, se găseşte $\overline{U}_0 = \frac{-\alpha + 1}{2\alpha + 1}\overline{U}_C$. Pentru $\alpha = 0$ ∴ $\overline{U}_0 = \overline{U}_C$, punctul neutru se găseşte în vârful C al triunghiului tensiunilor. Pentru $a = \infty$ ∴ $\overline{U}_0 = -\frac{1}{2}\overline{U}_C$, adică pe latura AB a triunghiului tensiunilor. Rezultă deci că în acest caz punctul neutru rămâne în permanenţă în interiorul triunghiului tensiunilor. Pentru $\alpha = 1$, punctul neutru coincide cu punctul de concurenţă al tensiunilor; pentru $\alpha = 2$, suntem în cazul problemei precedentă.

9.4. Avem $\overline{Y}_A = \frac{-j}{L\omega}$, $\overline{Y}_B = jC\omega$, $\overline{Y}_0 = \frac{1}{\alpha R}$.

Se găseşte

$$\overline{U}_0 = \frac{-j\alpha R\overline{U}_A + j\alpha RLC\omega^2\overline{U}_B + L\omega\overline{U}_C}{-j\alpha R + j\alpha RLC\omega^2 + L\omega} = \frac{aL\omega + j\alpha R(1 + a^2LC\omega^2)}{L\omega + j\alpha R(-1 + LC\omega^2)}\overline{U}_A$$

($a = 1\underline{/120^0}$). Punctul neutru se deplasează deci pe un cerc ce trece prin C, pentru $\alpha = 0$, şi prin punctul $\overline{U}_0 = \frac{-U_A + LC\omega^2\overline{U}_B}{-1 + LC\omega^2} = \frac{-1 + a^2LC\omega^2}{-1 + LC\omega^2}\overline{U}_A$, pentru $\alpha = \infty$. Centrul şi raza cercului se determină scriind ecuaţia sub forma *) $\overline{U}_0 = \overline{F} + \overline{R}\underline{|\varphi}$. In cazul rezonanţei punctul neutru se deplasează pe dreapta $\overline{U}_0 = \frac{aL\omega + j\alpha R(-1 + a^2)}{L\omega}\overline{U}_A$, care coincide cu vectorul tensiunii U_0.

Problemele 9.2, 9.3 şi 9.4 se rezolvă uşor şi grafic.

---

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotechnică, Bucureşti 1952, pag. 55.

9.5. Se determină $\overline{E}_0 = E\dfrac{\alpha + \sqrt{3}}{\alpha}$; $\overline{I}_1 = (\overline{E}_1 - \overline{E}_0)\,Y_1 \therefore \overline{I}_1 = -\dfrac{E\sqrt{3}}{R}$; $\overline{I}_2 = \dfrac{E}{R\cdot 2\alpha}\left[\sqrt{3}\,\alpha - j\,(3\alpha + 2\sqrt{3})\right]$; $\overline{I}_3 = \dfrac{E}{R\cdot 2\alpha}\left[\sqrt{3}\,\alpha + j\,(3\alpha + 2\sqrt{3})\right]$.

9.6. Avem $\overline{Y}_A = 0{,}1$ S, $\overline{Y}_B = 0{,}25$ S, $\overline{Y}_C = 0{,}04$ S, $\overline{Y}_0 = 0{,}12 - j0{,}16$ S; luând $\overline{E}_A = 120\,\underline{|0}$ V, avem $\overline{E}_B = 120\,\underline{|-120^0} = -60 - j60\sqrt{3}$ V și $\overline{E}_C = 120\,\underline{|120^0} = -60 + j\,60\sqrt{3}$ V. Se găsește ușor $\overline{U}_0 = \dfrac{\Sigma\,\overline{E}_A\,\overline{Y}_A}{\overline{Y}_0 + \Sigma\overline{Y}_A} = 2{,}6 - j\,42$ V.

Apoi tensiunile pe faze $\overline{U}_A = \overline{E}_A - \overline{U}_0 = 117{,}4 + j\,42 = 122\,\underline{|19^040'}$ V; $\overline{U}_B = -62{,}6 - j\,62 = 84{,}4\,\underline{|225^015'}$ V; $\overline{U}_C = -62{,}6 + j\,146{,}2 = 159\,\underline{|156^050'}$ V; curenții se obțin din $\overline{I}_A = (\overline{E}_A - \overline{U}_0)\,\overline{Y}_A = \overline{U}_A\,\overline{Y}_A = 11{,}7 + j\,4{,}2 = 12{,}2\,\underline{|190^040'}$ A; $\overline{I}_B = -15{,}8 - j\,15{,}5 = 22{,}1\,\underline{|225^015'}$ A; $\overline{I}_C = -2{,}5 + j\,5{,}8 = 6{,}2\,\underline{|156^050'}$ A; $\overline{I}_0 = -\overline{U}_0\,\overline{Y}_0 = 6{,}4 + j\,5{,}5 = 8{,}45\,\underline{|40^057'}$ A.

9.7. $\overline{U}_0 = -34{,}3 - j\,29{,}6$ V; apoi $\overline{U}_A = 154{,}3 + j\,29{,}6 = 160\,\underline{|10^050'}$ V; $\overline{U}_B = -25{,}7 - j74{,}6 = 78{,}7\,\underline{|251^002'}$ V; $\overline{U}_C = -25{,}7 + j\,133{,}6 = 136\,\underline{|100^053'}$ de unde $\overline{I}_A = \overline{U}_A\,\overline{Y}_A = 4\,\underline{|10^050'}$ A; $\overline{I}_B = 7{,}87\,\underline{|251^002'}$ A; $\overline{I}_C = 6{,}8\,\underline{|100^053'}$ A.

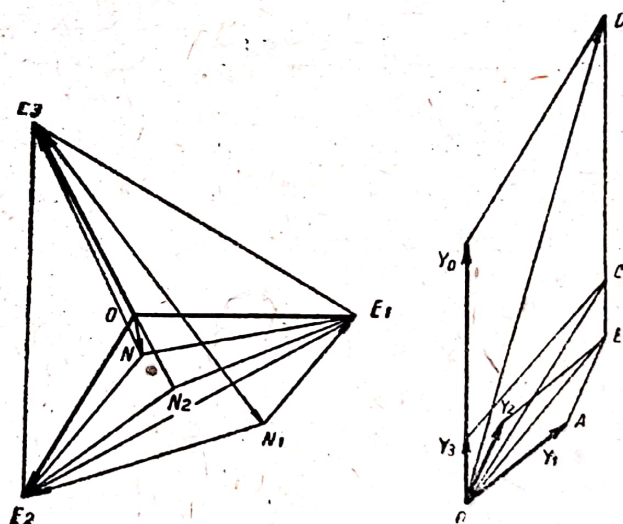


Fig. 9.8.

9.8. *Analitic.* $\overline{U}_0 = 0{,}715 - j\,22{,}6$ V; $\overline{U}_A = \overline{E}_A - \overline{U}_0 = 99{,}285 + j\,22{,}6$ V; $\overline{U}_B = -50{,}715 - j\,64$ V; $U_C = -50{,}715 + j\,109{,}2$ V. *Grafic*: vezi figura 9.8, care s'a construit cu scările 1 S = 5 cm; 100 V = 2 cm.

9.9. Se găsesc exact aceleași rezultate ca în cazul problemei precedente.

9.10. Se găsește $\overline{U}_0 = 22{,}4 + j\,65{,}5$ V; $\overline{U}_1 = \overline{E}_1 - \overline{U}_0 = 97{,}6 - j\,65{,}5$ V; $\overline{U}_2 = -37{,}6 - j\,169{,}5$ V; $\overline{U}_3 = -37{,}6 + j\,38{,}5$ V; $\overline{I}_1 = \overline{U}_1\,\overline{Y}_1 = 2{,}07 - j\,4{,}22$ A; $\overline{I}_2 = 4{,}66 - j\,7{,}25$ A; $\overline{I}_3 = -0{,}94 + j\,0{,}96$ A.

9.11. Se transfigurează triunghiul *102* într'o stea, obținându-se $\overline{Z}_{N1} = \overline{Z}_{N2} = 89{,}13 - j\,5{,}26\,\Omega$ și $\overline{Z}_{NO} = 5{,}26 + j\,89{,}13\,\Omega$; astfel că a treia impedanță

Scanned with OKEN Scanner

este $\overline{Z}_{03} + \overline{Z}_{NO} = 105{,}26 + j\,262{,}13\,\Omega$. In cazul încărcării simetrice, tensiunile pe fază sunt, luând ca origină de fază tensiunea $\overline{U}_1 = \overline{U}_{23} = 380\,\underline{|0}$: $\overline{V}_1 = j\,220$ V ; $\overline{V}_2 = 220\,\underline{|-30°}$ V ; $\overline{V}_2 = 220\,\underline{|-150°}$.
Deplasarea punctului neutru al sarcinii desechilibrate este $\overline{V}_0 = -191{,}6 - j\,90{,}9$V. Rezultă $\overline{V}'_1 = \overline{V}_1 - \overline{V}_0 = 191{,}6 + j\,310{,}9$ V ; $\overline{V}'_2 = 381{,}6 - j\,19{,}1$ V ; $\overline{V}'_3 = 1{,}6 - j\,19{,}1$ V. Curenţii pe fiecare fază, deci curenţii din linie sunt $\overline{I}_1 = \overline{Y}_1\overline{V}'_1 = 1{,}936 + j\,3{,}606$ A ; $\overline{I}_2 = 4{,}386 + j\,0{,}138$ A ; $\overline{I}_3 = -6{,}322 - j\,3{,}744$ A. Curenţii în impedanţele reale sunt $\overline{I}_{10} = 3{,}586 + j\,2{,}756$ A ; $\overline{I}_{20} = 2736 + j\,1{,}038$ A ; $\overline{I}_{30} = \overline{I}_3$; $\overline{I}_{12} = -1{,}65 + j\,0{,}85$ A. Aceşti curenţii se obţin scriind că între aceleaşi două puncte în triunghi şi în stea căderile de tensiune sunt aceleaşi.

9.12. Se observă că $\overline{Z}_A = 5\,(1 - j\,1{,}73) = 10\,\underline{|-60°}\,\Omega$; $\overline{Z}_B = 5\,(1{,}73 + j\,1) = 10\,\underline{|30°}\,\Omega$; $\overline{Z}_C = 20\,\underline{|-90°}\,\Omega$. Se găseşte uşor $\overline{U}_0 = -58{,}5 + j\,72{,}5$ V. Curenţii $\overline{I}_A = 14{,}18 + j\,13{,}7$ A ; $\overline{I}_B = -7{,}22 - j\,17{,}95$ A ; $\overline{I}_c = -7 + j\,4{,}25$ A.

9.13. Cele trei tensiuni formează un triunghi, luându-se ca origine de fază tensiunea $\overline{U}_{AB}$ care se găseşte uşor prin determinarea unghiurilor pe care le fac tensiunile $\overline{U}_{BC}$ şi $\overline{U}_{CA}$ cu $\overline{U}_{AB}$. Se găseşte $\overline{U}_{BC} = 120\,\underline{|-135°30'} = -85{,}6 - j\,84$ V; $\overline{U}_{CA} = 100\,\underline{|123°} = -54{,}3 + j\,83{,}8$ V. Sarcinile fiind egale, rezultă că tensiunile pe fază sunt concurente în centrul de greutate al triunghiului ABC. Vom avea deci : $\overline{U}_A = \dfrac{\overline{U}_{AB} - \overline{U}_{CA}}{3} = 64{,}8 - j\,27{,}9 = 70{,}8\,\underline{|-23°15'}\,V$;
$\overline{U}_B = -75{,}2 - j\,28 = 80{,}3\,\underline{|200°25'}$ V ; $\overline{U}_C = 10{,}4 + j\,55{,}9 = 56{,}4\,\underline{|79°20'}$ V. Curenţii vor fi $\overline{I}_A = \overline{U}_A : R = 7{,}08\,\underline{|-23°15'}$ A, etc., adică în fază cu tensiunile.

9.14. Rezistenţele celor trei faze sunt $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$. Tensiunile date $\overline{E}_1 = 127\,\underline{|0}$ V; $\overline{E}_2 = 127\,\underline{|-120°}$ V; $\overline{E}_3 = 127\,\underline{|120°}$ V.
a) se găseşte $\overline{U}'_0 = 23{,}1 - j\,20{,}0$ V; $\overline{U}'_1 = 103{,}9 + j\,20 = 105{,}8\,\underline{|10°58'}$ V; $\overline{U}'_2 = -86{,}6 - j\,90 = 124{,}9\,\underline{|226°}$ V; $\overline{U}'_3 = -86{,}6 + j\,130 = 156{,}2\,\underline{|123°47'}$V.
b) $\overline{U}''_0 = 12{,}1 - j\,10{,}5$ V; $\overline{U}''_1 = 114{,}9 + j\,10{,}5 = 115{,}4\,\underline{|42°23'}$ V; $\overline{U}''_2 = -75{,}6 - j\,99{,}5 = 125\,\underline{|232°\,44'}$ V; $\overline{U}''_3 = -75{,}6 + j\,120{,}5 = 142{,}3\,\underline{|122°10'}$ V

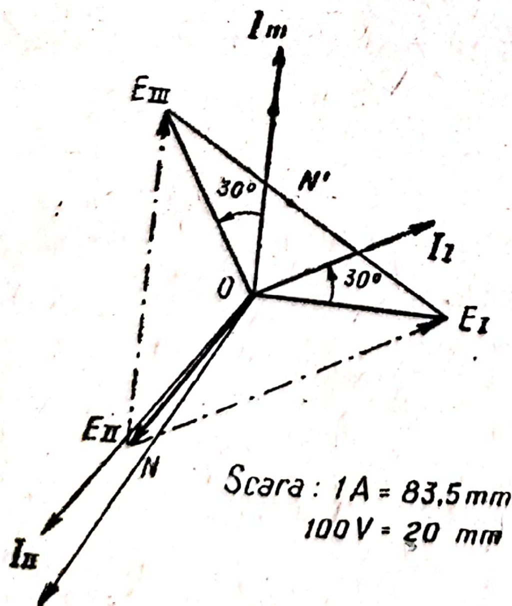


Fig. 9.15

9.15. Rezistenţele corespunzătoare celor două lămpi sunt $R_1 = \dfrac{(U\sqrt{3})^2}{P} = \dfrac{208^2}{60} = 721\,\Omega$, $R_3 = \dfrac{208^2}{75} = 577\,\Omega$. Putem considera aceste rezistenţe ca făcând parte dintr'un sistem de sarcini trifazat în stea, la care sarcina pe faza II este nulă. Presupunând faza II între-

ruptă, avem $\frac{\overline{E_{III}E_{N'}}}{\overline{E_I E_{N'}}} = \frac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = \frac{R_3}{R_1} = \frac{577}{721} = 0.8$. Punctul neutru N' se va găsi pe dreapta $E_1\ E_{III}$, împărţind-o pe aceasta în raportul 0,8 dela E_{III} către E_I. Dacă trecem la cazul real, faza II întreagă, avem $\frac{\overline{E_{II}E_N}}{\overline{E_{II}E_{N'}}} = \frac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3} = 0$, rezultă punctul neutru în E_{II}. Vom avea deci $\overline{I}_1 = \frac{120\sqrt{3}}{721} = 0{,}288$ A decalat cu 30° înaintea tensiunii E_I; $I_3 = \frac{120\sqrt{3}}{577} = 0{,}360$ A decalat cu 30° în urma tensiunii E_{III}. Curentul pe faza II este rezultanta acestora, $I_2 = 0{,}504$ A decalat cu 6° înaintea tensiunii E_{II}.

9.16. $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_3 = 0{,}1$ S, $\overline{Y}_2 = \infty \therefore \overline{E}_0 = \frac{\Sigma \overline{E}_1\ \overline{Y}_1}{\Sigma \overline{Y}_1} = \overline{E}_2 = 100 \underline{|-120^0}$.

$\overline{I}_1 = (\overline{E}_1 - \overline{E}_0)\,\overline{Y}_1 = \frac{E}{R}\sqrt{3}\,\underline{|30^0} = 17{,}3\,\underline{|30^0}$ A; $\overline{I}_3 = \frac{E}{R}\sqrt{3}\,\underline{|90^0} = 17{,}3\,\underline{|90^0}$;

$\overline{I}_2 = -\overline{I}_1 - \overline{I}_3 = \frac{3\,E}{R}\underline{|-120^0} = 30\,\underline{|-120^0}$ A.

Rezultă că I_1 este *capacitiv*, I_3 *inductiv*, I_2 în fază. Pentru compensarea sistemului, se va monta în paralel cu sarcina între fazele 1 şi 2 o *inductanţă*, iar în paralel cu sarcina între fazele 2 şi 3 o *capacitate*. Mărimea acestora se calculează din relaţiile $\text{tg}\,30^0 = \frac{L\omega}{R} \therefore L\omega = \frac{R}{\sqrt{3}} = 5{,}76\,\Omega$ şi $\text{tg}\,30^0 = \frac{1}{C\omega R}$. In acest caz curenţii vor fi în fază cu tensiunile, simetrici şi echilibraţi.

9.17. $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_3 = 0{,}08 - j\,0{,}06 = 0{,}1\,\underline{|-36^052'}$ S; $\overline{I}_1 = 17{,}3\,\underline{|-6^052'}$ A; $\overline{I}_3 = 17{,}3\,\underline{|53^008'}$ A; $\overline{I}_2 = 30\,\underline{|203^004'}$ A. De data aceasta ambii curenţi sunt inductivi. Compensarea se face cu ajutorul unor impedanţe capacitive pentru a fi aduşi în fază cu tensiunile.

9.18. $\overline{Y}_1 = 0{,}08 - j\,0{,}06 = 0{,}1\,\underline{|-36^052'}$ S, $\overline{Y}_3 = 0{,}06 - j\,0{,}08 = 0{,}1\,\underline{|-53^008'}$ S; $I_1 = 17{,}3\,\underline{|-6^052'}$ A; $\overline{I}_3 = 17{,}3\,\underline{|36^052'}$ A; $\overline{I}_2 = 30\,\underline{|195^0}$ A.

9.19. $\overline{U}_0 = \frac{E}{\sqrt{3}} \cdot \frac{j\,C\omega\,R - 1}{j\,C\omega\,R + 2}$. Scriem că $\overline{U}_3 = 0$ adică $\overline{E}_3 - \overline{U}_0 = 0$. Identificând părţile reale şi părţile complexe, găsim $C\omega R = 0$, şi $C\omega R = \frac{2}{\sqrt{3}}$; aceste relaţii trebuind să fie satisfăcute simultan, problema nu este posibilă în condiţiile enunţului. Se obţine doar o tensiune mai redusă pe o fază. Grafic aceasta se vede imediat.

9.20. Analitic: $\overline{U}_0 = -65{,}5 - j\,5{,}5$ V; $\overline{U}_1 = \overline{E}_1 - \overline{U}_0 = \frac{127}{\sqrt{3}} + 65{,}5 + j\,5{,}5 = 139{,}0 + j\,5{,}5$ V $\therefore |U_1| = 139$ V; $\overline{U}_2 = \overline{E}_2 - \overline{U}_0 = \frac{127}{\sqrt{3}}\underline{|-120^0} - \overline{U}_0 = 28{,}8 - j\,58{,}0$ V; $\therefore |U_2| = 64{,}7$ V. Se va aprinde lampa depe faza I (dreapta). *Grafic*: Avem $\frac{1}{R} = 8.10^{-4}$ S şi $C\omega = 15.10^{-4}$ S. Luăm 10^{-4} S =

$= 3$ mm și $5/\sqrt{3}$ V $= 1$ mm. $\dfrac{\overline{E_2 N}}{\overline{E_1 N'}} = \dfrac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = 1$, rezultă N' la mijloc între E_1 și E_2; apoi $\dfrac{\overline{E_3 N}}{\overline{E_3 N'}} = \dfrac{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2}{\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 + \overline{Y}_3}$. Rezultă și din diagramă că se va aprinde lampa depe faza 1, care are tensiunea cea mai mare.

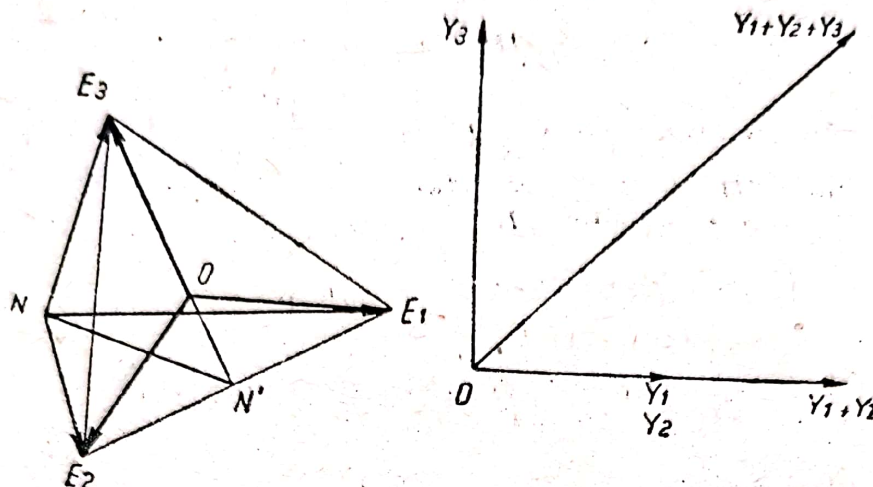


Fig. 9.20

9.21. $\overline{U}_0 = -28{,}5 + j\,7{,}7$ V; $\overline{U}_1 = 67{,}0 - j\;7{,}7$ V $\therefore |U_1| = 67{,}4$ V; $\overline{U}_2 = 9{,}5 + j\,20{,}8$ V $\therefore |U_2| = 23$ V. Se va aprinde tot lampa de pe faza I. Rezolvarea grafică analoagă cu precedenta.

9.22. $\overline{Y}_1 = \overline{Y}_2 = j\,C\omega$; $\overline{Y}_3 = j\,C\omega + g$, în care $g = 1/R$. Cum $\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + U_3 = 0 \;\therefore\; \overline{U}'_0 = \dfrac{g}{g + j\,3\,\omega\,C}\,\overline{U}_3$; $\overline{U}'_3 = \overline{U}_3 - \overline{U}_0 = \dfrac{j\,3\omega C}{g + j\,3\omega C}\cdot \overline{U}_3$ iar curentul care se scurge prin R este $\overline{U}'_3\,g$. Pentru a se anula acest curent se leagă pe nulul alimentării (transformator, alternator) o inductanță, numită *bobină de stingere*. Aceasta echivalează cu un fir neutru între nulul alimentării și nulul sarcinii de admitanță $\overline{Y}_0 = -\dfrac{j}{L\omega}$.

Vom avea acum

$$\overline{U}''_0 = \frac{g}{g + j\left(3\,\omega\,C - \dfrac{1}{L\,\omega}\right)}\,\overline{U}_3;\quad \overline{U}''_3 = \frac{j\left(3\omega C - \dfrac{1}{L\omega}\right)}{g + j\left(3\omega C - \dfrac{1}{L\omega}\right)}\,\overline{U}_3$$

și curentul $\overline{I}_g = \overline{U}''_3\,g$. Pentru ca $\overline{I}_g = 0$ trebue ca $3\omega C - \dfrac{1}{L\omega} = 0$ de unde $L = \dfrac{1}{3\omega^2 C}$. In cazul aplicației se găsește: $\overline{U}'_0 = 3{,}64 + j\,4{,}1$ kV; $\overline{U}'_1 = 13{,}66 - j\,4{,}1$ kV $\therefore |\overline{U}'_1| = 14{,}3$ kV; $\overline{U}'_2 = -12{,}3 - j\,19{,}1$ kV; $|U'_2| = 22{,}7$ kV; $\overline{U}'_3 = -12{,}3 + j\,10{,}9$ kV $\therefore |\overline{U}'_3| = 16{,}4$ kV; $\overline{I}_g = -12{,}3 + j\,10{,}9$ A $L = 1{,}06$ H.

9.23. $\overline{U}_{AB} = 220 \underline{|0} \text{ V}$; $\overline{U}_{BC} = 220 \underline{|-120^0} = -110 - j190 \text{ V}$; $\overline{U}_{CA} = 220 \underline{|120^0} = -110 + j190 \text{ V}$; $\overline{I}_{AB} = \dfrac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = 6{,}6 - j\,8{,}8 = 11 \underline{|-53^0 04'} \text{ A}$; $\overline{I}_{BC} = -9{,}17 - j\,15{,}8 = 18{,}3 \underline{|240^0} \text{ A}$; $\overline{I}_{CA} = 2{,}6 + j\,21{,}8 = 22 \underline{|83^0 13'} \text{ A}$.

9.24. Se transfigurează triunghiul în stea. Se găsește $Z'_A = Z'_B = 4\Omega$; $Z'_C = 8\,\Omega$. Rezultă $Z_A = Z'_A + Z''_A = 4 + 1 = 5\,\Omega$ ∴ $Y_A = 0{,}2$ S; $Z_B = 5\Omega$ ∴ $Y_B = 0{,}2$ Sm; $Z_C = 9\,\Omega$ ∴ $Y_C = 0{,}111$ S. Apoi $U_A = 120$ V; $\overline{U}_B = -60 - j\,104$ V; $\overline{U}_C = -60 + j\,104$ V; Se găsește $\overline{U}_0 = 10{,}4 - j\,18$ V. Apoi $\overline{I}_A = (\overline{U}_A - \overline{U}_0)\,Y_A = 21{,}9 + j\,3{,}6$ A; $\overline{I}_B = -14{,}1 - j\,17{,}2$ A; $\overline{I}_C = 7{,}8 + j\,13{,}6$ A. Calculăm căderea de tensiune pe fiecare impedanță a sarcinii (fără linie). Se găsește: $\overline{U}'_A = \overline{Z}'_A \overline{I}_A = 87{,}5 + j\,14{,}4$ V; $\overline{U}'_B = -56{,}4 - j\,68{,}8$ V; $\overline{U}'_C = -62{,}4 + j\,107{,}8$ V. Tensiunea între faze la bornele sarcinii este $\overline{U}'_{AB} = \overline{U}'_A - \overline{U}'_B = 143{,}9 + j\,83{,}2$ V; $\overline{U}'_{BC} = 6 - j\,176{,}6$ V; $\overline{U}'_{CA} = -149{,}9 + j\,93{,}4$ V; de aci, curenții în impedanțele reale: $\overline{I}_{AB} = \dfrac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{AB}} = 14{,}4 + j\,8{,}32$ A; $\overline{I}_{BC} = 0{,}3 - j\,8{,}83$ A; $\overline{I}_{CA} = -7{,}5 + j\,4{,}67$ A. Dacă cele trei impedanțe sunt egale sistemul este simetric, $\overline{U}_0 = 0$ și calculul nu prezintă nicio dificultate.

9.25. Se tansfigurează circuitul găsindu-se $\overline{Z}_{10} = j\,R$, $\overline{Z}_{20} = -jR$, $\overline{Z}_{30} = \alpha\,R$. Se studiază deplasarea punctului neutru în funcție de α. Se găsește ușor $\overline{V}_0 = \left(1 - \alpha\sqrt{3}\right)\overline{V}_3$, luându-se ca origine de fază vectorul $\overline{V}_3 \left(|V| = \dfrac{|U|}{\sqrt{3}}\right)$, ceeace înseamnă că punctul neutru se deplasează dealungul vectorului $\overline{V}_3$. Pentru diverse valori pozitive ale lui α, $\overline{V}_0$ variază dela $\overline{V}_3$ la $-\infty$. Curenții pe cele trei linii sunt $\overline{I}_1 = \left(-\dfrac{1}{2} + j\,\dfrac{\sqrt{3} - 2\alpha}{2}\right)\dfrac{U}{R}$; $\overline{I}_2 = \left(-\dfrac{1}{2} - j\,\dfrac{\sqrt{3} - 2\alpha}{2}\right)\dfrac{U}{R}$; $\overline{I}_3 = \dfrac{U}{R}$. In cazul particular $\overline{V}_0 = -5\,\overline{V}_3$; $\overline{I}_1 = 100 \underline{|-100^0 52'} \text{ A}$; $\overline{I}_2 = 100 \underline{|100^0 52'} \text{ A}$; $\overline{I}_3 = 38$ A.

9.26. S› transfigurează circuitul în funcționarea simetrică găsindu-se expresia curenților (modul). Se procedează la fel în funcționarea disimetrică. Se determină deplasarea punctului neutru, care este $\overline{E}_0 = \overline{E}_C$, dacă impedanța întreruptă este $\overline{Z}_{AB}$. Se determină tensiunile pe fază și curenții. Se găsește $|\overline{I}'_A| = |\overline{I}'_B| = 5{,}78$ A și $|\overline{I}'_C| = 10$ A.

9.27. Curentul din ampermetru se determină cu ajutorul teoremei lui Thévenin:

$$\overline{I}_A = \frac{\overline{E}_{NA} - \overline{E}_{NB}}{\overline{Z}_A + \overline{Z}_{AB}}$$

în care $\overline{E}_{NA}$ și $\overline{E}_{NB}$ sunt tensiunile punctelor neutre ale celor două sarcini și care se calculează cu ajutorul relației deplasării punctului netru, iar $\overline{Z}_{AB}$ este impedanța rețelei privită din punctele A și B și este:

$$\overline{Z}_{AB} = \frac{1}{\Sigma \overline{Y}_{IA}} + \frac{1}{\Sigma \overline{Y}_{IB}}$$

In cazul numeric se găsește $\overline{I} = 21{,}95 - j\ 12{,}71$ A $= 27{,}37 \underline{|-30°04'}$ A.

Problema se rezolvă ușor și direct ajungându-se la aceeași relație ca mai sus.

9.28. Problema se rezolvă imediat pe cale grafică. In acest caz este necesar să se construiască exact triunghiul tensiunilor astfel ca sistemul să fie direct. Aceasta se obține dacă, numerotându-se vârfurile triunghiului, cifrele se succed în sensul mersului acelor ceasornicului și în fața fiecărei cifre se așează vectorul respectiv. De exemplu: în fața cifrei 1, se găsește vectorul U_1. Analitic, se scriu tensiunile care trec prin centrul de greutate și în raport cu acesta se determină deplasarea punctului neutru cu care se determină apoi curenții căutați. Se găsește $\overline{V}_0 = -34{,}4 - j\,25{,}0$ V; $\overline{I}_1 = 667{,}5 \underline{|61°}$ A; $\overline{I}_2 = 863{,}5 \underline{|17°10'}$; $\overline{I}_3 = 1444 \underline{|217°30'}$ A.

9.29. Puterea aparentă este dată de relația $\overline{S} = \overline{U}_A \overline{I}_A^* + \overline{U}_B \overline{I}_B^* + \overline{U}_C \overline{I}_C^*$. în care $\overline{U}_A = \overline{E}_A - \overline{E}_0$. etc. $\overline{E}_0$ fiind deplasarea punctului neutru al sarcinii. Se găsește $\overline{E}_0 = \overline{E}_C$. Rezultă $\overline{U}_A = \overline{E}_A - \overline{E}_C$. $\overline{U}_B = \overline{E}_B - \overline{E}_C$. $\overline{U}_C = 0$. Prin transfigurare $\overline{Z}_A = j X_L$. $\overline{Z}_B = -j X_C$, $\overline{Z}_C = 0$. Apoi $\overline{I}_A = -j \dfrac{\overline{U}_A}{X_L}$, $\overline{I}_B = j \dfrac{\overline{U}_B}{X_C}$ $I_C = j\left(\dfrac{\overline{U}_A}{X_L} - \dfrac{\overline{U}_B}{X_C}\right)$. Rezultă $\overline{S} = 0$, $P = 0$, $Q = 0$*)

9.30. Problema este analoagă cu precedenta. (a) $\overline{I}_A = -j11$A, $\overline{I}_B = 11\sqrt{3}$ A; $\overline{I}_C = -11\sqrt{3} + j\,11$ A. (b) Wattmetrul măsoară puterea reală. Deci indicațiile sale vor fi $P = \Re\,(\overline{U}_{CA} \cdot \overline{I}_B^*) = -1210\sqrt{3} = -2100$ W. Semnul (—) arată că, așa cum este montat wattmetrul va bate invers. Trebuesc schimbate conexiunile la bornele de tensiune. (c) $W_1 = \Re\,(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_B^*) = 1210\sqrt{3} = 2100$ W. $W_2 = \Re\,(\overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}_B^*) = -1210\sqrt{3} = -2100$ W. Puterea reală totală absorbită de circuit este $P = W_1 + W_2 = 0$. rezultat analog cu acel din problema 9.29.

9.31. Circuitul dat este echivalent cu un circuit în stea la care impedanța pe faza A este nulă și impedanțele pe celelalte două faze sunt $\overline{Z}_B = \overline{Z}_{AN} + \overline{Z}_{NB} = 8{,}66 + j\,5{,}00 = 10 \underline{|30°}$ și $\overline{Z}_C = \overline{Z}_{AM} + \overline{Z}_{MC} = 8{,}66 - j\,5{,}00 = 10 \underline{|-30°}$. Luând ca origină de fază tensiunea $\overline{U}_{AB}$, se deduc tensiunile corespunzătoare pe fiecare fază [relațiile (66)] și se calculează deplasarea punctului neutru. Se găsește $\overline{V}_0 = \overline{V}_A$. Curenții căutați sunt $\overline{I}_B = (\overline{V}_B - \overline{V}_A)\overline{Y}_B = -\overline{U}_{AB}\overline{Y}_B = 7{,}33 \underline{|150°}$ A; $\overline{I}_C = (\overline{V}_C - \overline{V}_A)\overline{Y}_C = a\,\overline{U}_{AB}\,\overline{Y}_B = 7{,}33 \underline{|150°}$ A. Cei doi curenți sunt în fază; $\overline{I}_A = -\overline{I}_B - \overline{I}_C = 14{,}66 \underline{|-30°}$ A. Tensiunea între punctele M și N este $\overline{U}_{MN} = \overline{Z}_{AM}\overline{I}_C - \overline{Z}_{AN}\overline{I}_B = (\overline{Z}_{AM} - \overline{Z}_{AN})\overline{I}_C = j\,10.7{,}33 \underline{|150°} = 73{,}3 \underline{|240°}$ V.

9.32. Se transfigurează triunghiul sarcinilor găsindu-se $\overline{Z}_A = 50 + j\,50\Omega$, $\overline{Z}_b = 50 - j\,50\Omega$, $\overline{Z}_c = 50 + j\,0\,\Omega$. Pentru a găsi argumentele tensiunilor

---

*) A se vedea *L. S. Lurie*. Puterea aparentă a sistemelor trifazate, Elecricestvo 1/1951.

aplicate, se ia tensiunea U_{AB} ca origină de fază şi se aplică triunghiului relaţiile $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$, etc. Rezultă $A = 90°$, $B = C = 45°$. Deci tensiunile sunt $\overline{U}_{AB} = 200\,\underline{|0}$ V, $\overline{U}_{BL} = 141\,\underline{|-135°} = -100\,(1+j)$ V, $\overline{U}_{CM} = 141\,\underline{|90°} = j\,100\sqrt{2}$ V. Se determină cu relaţiile (66) tensiunile pe fază $\overline{U}_A = \frac{100}{3}(2 - j\sqrt{2})$ V, $\overline{U}_B = -\frac{100}{3}(3 + j)$ V, $\overline{U}_C = \frac{100}{3}[1 + j(1 + \sqrt{2})]$ V. Se găseşte $\overline{U}_0 = 5{,}9 - j\,20{,}9$ V. De unde curenţii pe linie $\overline{I}_A = (36{,}37 - j\,87{,}98)\cdot 10^{-2}$ A; $\overline{I}_B = -(93{,}23 + j\,115{,}88)\,10^{-2}$ A; $\overline{I}_C = (56{,}86 + j\,203{,}86)\,10^{-2}$ A. (*a*) $\overline{S}_{AB} = 200$ W. $\overline{S}_{BC} = 100 - j\,100$ VA, $\overline{S}_{CA} = 100 + j\,100$ VA. (*b*) $P = 400$ W. (*c*) Pentru wattmetrele montate pe faza *A* şi *C* se găseşte $W_1 = 93{,}74$ W şi $W_3 = 306{,}65$ W.

9.33. Problema se rezolvă ca şi precedenta. Se găseşte $\overline{U}_{AB} = 200\,\underline{|0}$ V, $\overline{U}_{BC} = 220\,\underline{|-114°40'}$ V, $\overline{U}_{CA} = 240\,\underline{|122°40'}$. Din puteri şi tensiuni se deduc $\overline{I}_{AB} = 57\,\underline{|-36°50'}$ A, $\overline{I}_{BC} = 97{,}5\,\underline{|-159°40'}$, A. $\overline{I}_{CA} = 41{,}6\,\underline{|-122°40'}$ A. Prin aplicarea primei legi a lui Kirchhoff la vârfurile triunghiului se deduce $\overline{I}_A = -68{,}06 + j\,69{,}14$ A; $\overline{I}_B = 137{,}06 - j\,0{,}37$ A; $\overline{I}_C = -69{,}00 - j\,68{,}77$ A. Un wattmetru indică $W_1 = \Re\,(\overline{U}_{AB}\cdot\overline{I}_B^{*}) = -14973{,}2$ W; $W_2 = -7423{,}57$ W. Se schimbă legăturile la bobina de tensiune. $P = W_1 + W_2 = 22396{,}77$ W.

9.34. Se ia ca origină de fază tensiunea U_{BC} şi se deduc celelalte tensiuni între faze, precum şi tensiunile pe fază în cazul încărcării simetrice. Faţă de acestea se deduce apoi defazajul curenţilor pe linie, defazajul faţă de tensiunea respectivă fiind dat de cos φ corespunzător. Pentru motorul monofazat se ia în raport cu tensiunea U_{BC}. Se găseşte $\overline{U}_{AB} = 380\,\underline{|120°}$ V, $\overline{U}_{BC} = 380\,\underline{|0}$ V, $\overline{U}_{CA} = 380\,\underline{|-120°}$ V; $\overline{U}_A = 220\,\underline{|90°}$ V, $\overline{U}_B = 220\,\underline{|-30°}$ V; $\overline{U}_C = 220\,\underline{|210°}$ V. (*a*) deoarece $\cos\varphi_1 = 0{,}8$, $\therefore\ \varphi_1 = -36°50'$; pentru motorul monofazat $\varphi_2 = -31°50'$. Rezultă curenţii absorbiţi de motorul trifazat $\overline{I}'_A = 21\,\underline{|53°10'}$ A, $\overline{I}'_B = 21\,\underline{|-66°50'}$ A, $\overline{I}'_C = 21\,\underline{|173°50'}$ A. Curenţii absorbiţi de motorul monofazat $\overline{I}''_B = -\overline{I}''_C = 18{,}7\,\underline{|-31°50'}$ A. Curenţii totali absorbiţi din linie: $\overline{I}_A$, $\overline{I}_B = \overline{I}'_B + \overline{I}''_B = 38{,}07\,\underline{|-59°20'}$ A; $\overline{I}_C = \overline{I}'_C - \overline{I}''_C = 48{,}1\,\underline{|139°30'}$ A. (*b*) $W_1 = \Re\,(\overline{U}_{AB}\overline{I}_A^{*}) = 3139{,}4$ W; $W_2 = \Re\,(\overline{U}_{CB}\cdot\overline{I}_C^{*}) = 13898$ W, şi deci $P = 17\,000$ W. (*c*) Se aplică metoda celor trei wattmetre. Se găseşte $W'_1 = \Re\,(\overline{U}_{BC}\cdot\overline{I}_A^{*}) = 4788$ VAR; $W_2 = \Re\,(\overline{U}_{CA}\cdot\overline{I}_B^{*}) = 5226{,}9$ VAR; $W_3 = \Re\,(\overline{U}_{AB}\cdot\overline{I}_C^{*}) = 17\,229{,}6$ VAR. Rezultă $Q = 27\,244{,}5$ VAR.

9.35. (*a*) Circuitul echivalent, în funcţionarea simetrică este dat în fig. 9.35. *a*

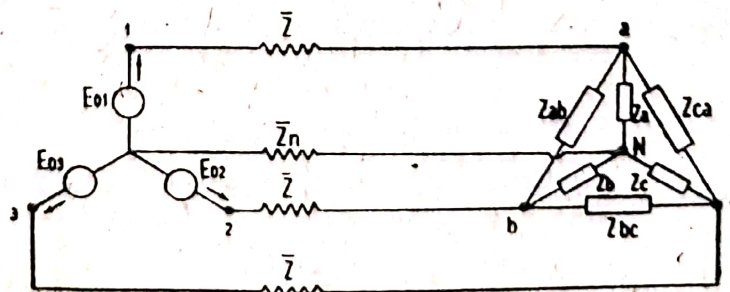


Fig. 9.35. *a*

La funcţionarea simetrică

$$Q_\Delta = P_\Delta \operatorname{tg}\varphi_\Delta = -73{,}0 \text{ kVAR}$$
$$Q_Y = P_Y \operatorname{tg}\varphi_Y = -83{,}6 \text{ kVAR}$$
$$Q \quad = -156{,}6 \text{ kVAR}$$

$\therefore\ S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 325$ kVA; $P = 285$ kW
$\therefore\ K = 0{,}878$ inductiv $\therefore\ \varphi = -28°36'$. Se calculează apoi, din $P_1 = P/3$, $I_{1a} = 46{,}8$ A şi deci curentul pe fază $\overline{I}_{1a} = 46{,}8 \underline{|-28°36'}$ A. Tensiunea simplă în staţie este $\overline{E}_{01} = \overline{Z}\,\overline{I}_{1a} + \overline{U}_{01} = 2580 \underline{|-0°12'}$ V. Defazajul între $\overline{E}_{01}$ şi $\overline{I}_{01}$ este $\varphi' = -28°36' - (-0°12') = -28°24'$ şi deci factorul de putere în staţie este 0,88 inductiv. Puterea totală în staţie $P_s = 318$ kW.

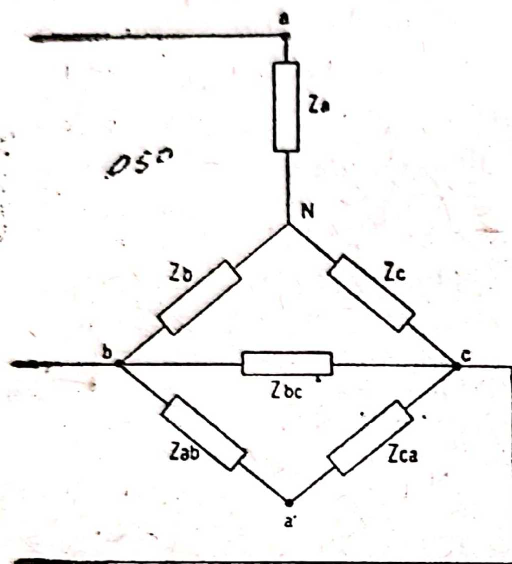


Fig. 9.35 *b*

(*b*) Intrerupându-se faza 1, sarcina raportată la punctul P apare sub forma din figura 9. 35*b*. Se determină impedanţele sarcinilor în stea şi în triunghi, din raportul tensiunilor şi curenţilor corespunzătoare sarcinii echilibrate. Se găseşte $\overline{Z}_a = \overline{Z}_b = \overline{Z}_c = 43{,}3 + j\ 23{,}6\ \Omega$ şi $\overline{Z}_{ab} = \overline{Z}_{bc} = \overline{Z}_{ca} = 259{,}8 + j\ 126{,}7\ \Omega$. Se calculează impedanţa echivalentă între b şi c: $\overline{Z}'_{bc} = 173{,}2 + j\ 84{,}6\ \Omega$. Se transfigurează triunghiul Nbc, se găseşte $\overline{Z}_{ON} = 7{,}2 + j\,4{,}2\ \Omega$, $\overline{Z}_{ob} = \overline{Z}_{oc} = 16{,}9 + j\,15\ \Omega$. Impedanţele totale pe cele trei faze sunt $\overline{Z}_1 = 55{,}6 + j\,30{,}4\ \Omega$, $\overline{Z}_2 = \overline{Z}_3 = 22{,}0 + j\,17{,}6\ \Omega$. Se calculează deplasarea punctului neutru la staţie găsindu-se $\overline{E}_0 = -15{,}2 + j\ 17{,}6$ V şi, cu ajutorul acesteia, curenţii din linii: $\overline{I}_1 = 34{,}6 - j\,20{,}6$ A, $\overline{I}_2 = -84{,}8 - j\,35{,}2$ A, $\overline{I}_3 = 14{,}0 + j\,89{,}7$ A, $\overline{I}_0 = -36{,}2 + j\,33{,}9$ A. Tensiunile pe fiecare fază şi pe neutru în punctul P sunt (fiecare fază este un dipol): $\overline{U}_1 = 2350{,}8 + j\,13{,}9$ V, $\overline{U}_2 = -956{,}0 - j\,1831$ V, $\overline{U}_3 = -1120{,}0 + j\,1744$ V, $\overline{U}_0 = 521{,}5 - j\,279{,}8$ V. Tensiunea între neutru şi fiecare fază este $\overline{U}_{N1} = \overline{U}_1 - \overline{U}_N = 1829{,}3 + j\,293{,}7$ V, $\overline{U}_{N2} = -1477{,}5 - j\,1551{,}2$ V, $\overline{U}_{N3} = -1641{,}5 + j2023{,}8$ V. (*c*) Diagrama tensiunilor se construieşte uşor. (*d*) Sistemul devine complet dezechilibrat. (*e*) $\overline{S}_1 = (\overline{E}_{10} - \overline{E}_0)\,\overline{I}_1^{\star} = 89986 + j\,52854$ VA, $\overline{S}_2 = 187\,400 + j\,143{,}600$ VA, $\overline{S}_3 = 188\,0000 + j\,146400$ VA. $S_{Total} = 465386 + j\,342854$ VA; $P = 465{,}4$ kW; $Q = 342{,}9$ kVAR. Indicaţiile fiecărui aparat de măsură corespund puterilor active şi reactive din fiecare fază.

10. *10.1.* Calculul se face analitic sau grafic: Se obţine uşor: 3; $3\underline{|-60°}$; $1\underline{|-60°}$; $1\underline{|240°}$; a; 1; $\sqrt{3}\underline{|-90°}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}\underline{|-30°}$.

10.2. ± 1; $\pm a$; $\pm \sqrt{a} = \pm 1\underline{|60°}$. Sau ± 1; a; $-a = 1 + a^2 = 1\underline{|-60°}$; $1\underline{|60°} = -a^2 = 1 + a$; $-1\underline{|60°} = 1\underline{|-120°} = a^2$. Rezultă: ± 1; $\pm a$; $\pm a^2$

Scanned with OKEN Scanner

10.3. $\overline{I}_h = -1 - j\,2$; $\overline{I}_d = 10{,}27 - j\,6{,}33$; $\overline{I}_i = 1{,}27 + j\,2{,}33$. Verificarea se face calculându-se curenții cu ajutorul acestor componente. Se găsește

$\overline{I}_2 = \overline{I}_h + \overline{I}_d + \overline{I}_i = 8 - j\,6$; etc.

10.4. $\overline{E}_a = 150{,}4 + j\,0$; $\overline{E}_b = -75{,}2 - j\,206{,}8$; $\overline{E}_c = -75{,}2 - j\,206{,}8 = \overline{E}_b$. Se găsește $\overline{E}_h = -j\,137{,}9 = 137{,}9 \underline{|-90^0}$; $\overline{E}_d = 75{,}2 + j\,68{,}9 = 102$

$\underline{|42^0 30'} = \overline{E}_i$.

10.5. $\overline{I}_h = 6{,}6 + j\,6{,}6$ A; $\overline{I}_d = -3{,}33 + j\,12{,}44$ A; $\overline{I}_i = -3{,}33 + j\,0{,}96$ A.

10.6. Calculul se face ușor folosind proprietățile operatorului a. Se găsește $\overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_d = 0$; $\overline{I}_i = j\,100$ A.

10.7. Se ia ca origină de fază unul din vectori, s. ex. $\overline{U}_A$. Se găsește $\overline{U}_h = -20{,}3 + j\,18{,}6$ V, $\overline{U}_d = 197 - j\,37$ V, $\overline{U}_i = 44 - j\,125$ V.

10.8. $\overline{I}_h = -2{,}33 + j\,2{,}33$A; $\overline{I}_d = 2{,}32 + j\,0{,}05$ A; $\overline{I}_i = 0{,}012 + j\,0{,}633$ A.

10.9. $\overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_d = j\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{I} = -\overline{I}_i$.

10.10. $\overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{I}\,\underline{|30^0}$; $\overline{I}_i = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{I}\,\underline{|-30^0}$. In ambele cazuri $\overline{I}_d$ și $\overline{I}_i$ sunt conjugați, unghiul de simetrie fiind în primul caz 90^0 și în al doilea caz 30^0.

10.11. $\overline{E}_h = 0$; $\overline{E}_d = 50 - j\,28{,}9$ V; $\overline{E}_i = 50 + j\,28{,}9$ V.

10.12. $\overline{E}_h = 50\,(1 - j)$ V; $\overline{E}_d = 93{,}5 + j\,25$ V; $\overline{E}_i = 6{,}5 + j\,25$ V.

10.13. Se construește topograma și se constantă că este un sistem invers. Dacă se ia ca origine de fază $\overline{I}_1$, atunci $\overline{I}_2 = 50\,\underline{|60^0}$ și $\overline{I}_3 = 50\,\underline{|-60^0}$ de unde $\overline{I}_h = 50\,\underline{|0}$; $\overline{I}_d = 0$; $\overline{I}_i = 50\,\underline{|0}$.

10.14. a) Se construește triunghiul tensiunilor luându-se ca origine de fază tensiunea $U_1 = 200$ V. Dacă sistemul este direct, laturile triunghiului vor fi $\overrightarrow{AB} = -\overline{U}_3$; $\overrightarrow{BC} = -\overline{U}_1$; $\overrightarrow{CA} = -\overline{U}_2$. Din acest triunghi se calculează $\cos C = \dfrac{U_1^2 + U_2^2 - U_3^3}{2\,U_1\,U_2}$ și analog $\cos B$. Se găsește $\widehat{C} = 28^0 57'$ și $\widehat{B} = 46^0 24'$.

Rezultă $\overline{U}_1 = 200\,\underline{|0}$; $\overline{U}_2 = 150\,\underline{|208^0 57'} = -131{,}25 - j\,72{,}60$; $U_3 = 100\,\underline{|133^0 36'} = -68{,}75 + j\,72{,}60$. Apoi $\overline{U}_h = 0$; $\overline{U}_d = 141{,}866 - j\,18{,}042 = 143\,\underline{|-7^0 15'}$; $\overline{U}_i = 58{,}134 + j\,18{,}042 = 60{,}9\,\underline{|17^0 15'}$. b) Cu ajutorul relațiilor (73) se calculează $\overline{V}_d = 82{,}5\,\underline{|82^0 45'}$ și $\overline{V}_i = 35{,}1\,\underline{|-72^0 45'}$. Problema se rezolvă foarte simplu grafic.

10.15. $\overline{V}_1 = 131{,}2 - j\,38{,}5$; $\overline{V}_2 = 32{,}3 - j\,75$; $\overline{V}_3 = -68{,}9 + j\,61{,}6$.

10.16. Presupunând faza 3 inversată, sistemul de fluxuri este, luând această fază ca origină: $\overline{\Phi}_1 = \Phi\,\underline{|30^\circ}$; $\overline{\Phi}_2 = \Phi\,\underline{|-30^\circ}$; $\overline{\Phi}_3 = \Phi\,\underline{|0}$. Rezultă

$$\overline{\Phi}_h = \frac{2}{3}\,\Phi\,\underline{|\Phi}; \quad \overline{\Phi}_d = \frac{1}{3}\,\Phi\,\underline{|180^\circ}; \quad \overline{\Phi}_i = \frac{2}{3}\,\Phi\,\underline{|0} \;\therefore\; \varepsilon_i = 200\,\%.$$

10.17. Se aplică lema sistemelor de vectori concurenţi, având aceleaşi vârfuri însă origini diferite. Direct, se scriu vectorii celui de al doilea sistem în funcţie de vectorii primului sistem şi apoi expresia componentei directe sau inverse.

10.18. Luând vectorul $\overline{U}_A$ ca origine de fază, rezultă $\overline{U}_B = a^2\overline{U}_A$ şi $\overline{U}_C = a\,\overline{U}_A$ cei trei vectori formând un triunghi echilateral. Punând faza C la pământ se obţine sistemul desechilibrat $\overline{U}_A = U_A \underline{|\,0}$; $\overline{U}'_B = -\overline{U}_B = U_A \underline{|\,60^0}$; $\overline{U}'_C = 0$. Se găseşte $\overline{U}'_h = \dfrac{\overline{U}_A}{\sqrt{3}} \underline{|\,30^0}$; $\overline{U}'_d = 0$; $\overline{U}'_i = \dfrac{\overline{U}_A}{\sqrt{3}} \underline{|\,-30^0}$. Dacă se pune faza B la pământ, $\overline{U}''_h = \dfrac{\overline{U}_A}{\sqrt{3}} \underline{|\,150^0}$; $\overline{U}''_d = 0$; $\overline{U}''_i = \dfrac{\overline{U}_A}{\sqrt{3}} \underline{|\,-150^0}$.

10.19. Tensiunea pe fază este 20 100 V şi sistemul este simetric. Se găseşte $\overline{E}'_d = \overline{E}_d = 20\,100 \underline{|\,0}$; $\overline{E}'_i = \overline{E}_i = 0$; $\overline{E}'_h = \overline{E}_h - \overline{OO_1} = -20\,100 \underline{|\,-120^0} = 20100 \underline{|\,60^0}$. Dacă sistemul este conectat în triunghi, ajungem în cazul problemei precedente.

10.20. $\overline{V}_h = 29{,}8 - j\,0{,}1$; $\overline{V}_d = -22{,}3 + j\,10$; $\overline{V}_i = 12{,}5 - j\,9{,}9$. Rezolvarea grafică nu prezintă nici o dificultate.

10.21. Se găseşte $\overline{U}_d = 58 \underline{|\,9^0}$ V şi $\overline{U}_i = 20 \underline{|\,-30^0}$ V (fig. 10.21).

10.22. Se aplică relaţiile (78) şi se găseşte $\overline{V}_d = 33{,}4 \underline{|\,99^0}$; $\overline{V}_i = 11{,}5 \underline{|\,-120^0}$; $\overline{V}_h = 0$. Apoi $\varepsilon_i = 34{,}75\,\%$ şi $\varepsilon_h = 0$.

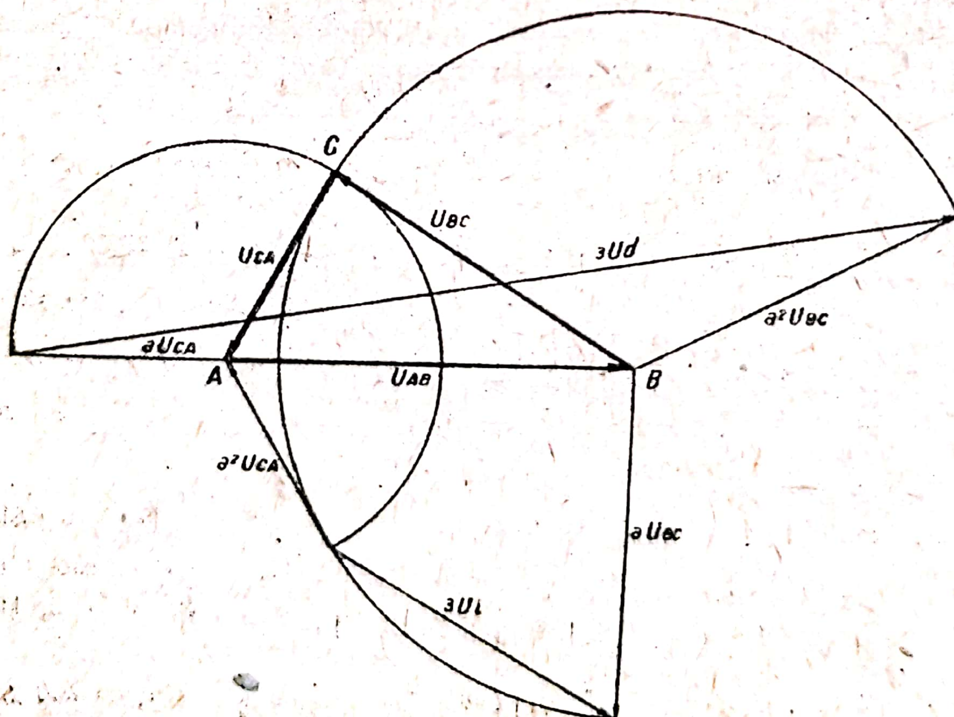


Fig. 10.21

Scanned with OKEN Scanner

10.23. $\overline{E}_h = 7{,}5 \,\underline{|\,57^0 45^2}$; $\overline{E}_d = 15 \,\underline{|-23^0 15'}$; $\overline{E}_i = 7{,}2 \,\underline{|\,13^0 30'}$.

10.24. Se scrie $\overline{V}_d = \frac{1}{3}\left(\overline{V}_1 + a\,\overline{V}_2 + a^2\,\overline{V}_2\right) = \frac{1}{2}\,\overline{V}_1 + j\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\overline{V}_2 - \overline{V}_3\right)$ căci $\overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \overline{V}_3 = 0$. Apoi $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{V}_2 + \frac{1}{2}\,\overline{V}_1 = \frac{1}{2}\left(\overline{V}_2 - \overline{V}_3\right)$ și $\overline{DF} = j\,\overline{AD}\,\mathrm{tg}\,30^0 = j\,\frac{1}{2\sqrt{3}}(\overline{V}_2 - \overline{V}_3)$. Rezultă $\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF} = \overline{V}_d$. Analog $\overline{FB} = \overline{DB} - \overline{DF} = \overline{V}_i$.

10.25. Se scrie $R\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2\right) = R\overline{I}_1 \cdot \overline{I}_{1c} + R\,\overline{I}_2\overline{I}_{2c} + R\overline{I}_3 \cdot \overline{I}_{3c}$. Se scrie apoi curenții în funcție de componentele simetrice și se face calculul ținându-se seama că $a^{-1} = a^2$ și $a^{-2} = a$.

10.26. Se transfigurează sistemul triunghi al sarcinilor într'o stea. Se găsește $\overline{Z}_A = 5{,}0 + j\,11{,}9\ \Omega$; $\overline{Z}_B = 3{,}6 - j\,11{,}3\ \Omega$; $\overline{Z}_C = 12{,}5 - j\ 3{,}9\ \Omega$, cu care se calculează impedanțele de calcul $\overline{z}_h = 7{,}03 - j\,1{,}10\ \Omega$; $\overline{z}_d = 1{,}12 + j\,3{,}94\ \Omega$; $\overline{z}_i = -3{,}14 + j\,9{,}06\ \Omega$. Se calculează apoi curenții cu relațiile (81). Se găsește $\overline{I}_d = 0{,}14 + j\ 17{,}45$ A și $\overline{I}_i = 9{,}96 - j\ 1{,}31$ A. Scriind apoi $\overline{S}_d = (\overline{z}_h\overline{I}_d + \overline{z}_i\overline{I}_i)\overline{I}_{dc} = \overline{V}_d \cdot \overline{I}_{dc}$ și analog $\overline{S}_i = \overline{V}_i\overline{I}_{ic}$. Se găsește $\overline{S}_d = 3840 + j30{,}8$ VA și $\overline{S}_i = 0$, de unde $\overline{S}_T = 3\,\overline{S}_d + 3\overline{S}_i = 11520 + j\,92$ VA.

10.27. Se găsește din epură $\overline{V}_h = 0$; $\overline{V}_d = 250\,\underline{|\,75^0}$ V; $\overline{V}_i = 80\,\underline{|\,192^0}$ V; $\overline{I}_h = 2\,\underline{|-90^0}$ A; $\overline{I}_d = 5{,}6\,\underline{|\,62^0}$ A; $\overline{I}_i = 3{,}4\,\underline{|\,39^0}$ A. Se determină $\varphi_d = 75^0 - 62^0 = 13^0$; $\varphi_i = 153^0$ și se găsește $P = 3374$ W; $Q = 1084$ VAR; $S = 3544$ VA. Verificarea se face calculând puterile direct cu elementele date.

10.28. 1⁰ *a*) In acest caz $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -I_3$ și $|\overline{I}_2| = 520$ A. Rezultă $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = \frac{a - a^2}{3}\,\overline{I}_2$ și $\varepsilon_i = 100\,\%$. *b*) Curenții absorbiți dela transformator sunt $\overline{A}_1 = 0$; $\overline{A}_2 = -\overline{A}_3$; $|A_2| = 520$ A și componentele simetrice au aceeași expresie ca mai sus. Componentele simetrice pe primarul transformatorului sunt $\overline{B}_d = \frac{\overline{A}_d}{k}\,\underline{|-30^0} = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{A}_2\,\underline{|\,60^0}$; analog $\overline{B}_i = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{A}_2\,\underline{|-60^0}$.

Se găsește $\varepsilon_i = 100\,\%$.

c) Ca mai sus se găsește: $\overline{A}_d = \frac{k}{\sqrt{3}}\,\overline{B}_2\,\underline{|\,120^0}$; $A_i = \frac{k}{\sqrt{3}}\,\overline{B}_2\,\underline{|-120^0}$ și $\varepsilon_i = 100\,\%$.

2⁰ *a*) $I_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -\overline{I}_3 = 520$ A. *b*) $\overline{B}_3 = \frac{1}{k}\frac{\sqrt{3}}{3}\,\overline{A}_2 = \overline{B}_2$ cu $|\overline{B}_1| = 300$ A $= |\overline{B}_2|$ și $\overline{B}_3 = \frac{2}{k}\frac{\sqrt{3}}{3}\,A_2\,\underline{|\,180^0}$ cu $|\overline{B}_3| = 600$ A. *c*) $\overline{A}_1 = \overline{A}_3 = \frac{k}{\sqrt{3}}\,\overline{B}_2\,\underline{|\,180^0}$ cu $|\overline{A}_1| = |\overline{A}_3| = 300$ A și $\overline{A}_2 = 2\,\frac{k}{\sqrt{3}}\,\overline{B}_2$ cu $|\overline{A}_2| = 600$ A.

10.29. Problema se rezolvă grafic construind triunghiul cu laturile $\overline{U}_{AB}$, $\overline{V}_A$ şi $\overline{V}_B$; pe latura $\overline{V}_B$ a acestui triunghi se construeşte triunghiul $\overline{U}_{BA}, \overline{V}_B, \overline{V}_C$. Rezultă $U_{CA} = 230$ V; luând ca origine de fază tensiunea $\overline{U}_{AB}$, se obţine tot pe cale grafică $\overline{V}_h = 18{,}6 \underline{|-90°}$ V; $\overline{V}_d = 126{,}7 \underline{|-30°}$ V; $\overline{V}_i = 11{,}3 \underline{|-150°12'}$ V; $\overline{U}_h = 0$; $\overline{U}_d = 219{,}6 \underline{|-120°}$; $\overline{U}_i = 19{,}6 \underline{|-60°12'}$ V.

10.30. Se aplică legile lui Kirchhoff fiecărui sistem de secvenţă simetric: $\overline{U}_d = \overline{Z}_d \overline{I}_d$ etc. Se găseşte

$$\overline{Z}_d = \overline{Z}_s + \overline{Z}_l + \overline{Z} - \overline{Z}_m;\ \overline{Z}_i = \overline{Z}_a + \overline{Z}_l + \overline{Z} - \overline{Z}_m;\ \overline{Z}_h = \overline{Z}_0 + \overline{Z}_l + \overline{Z} + 2\overline{Z}_m + 3\overline{Z}_N - 6\overline{Z}_{mo},$$ în care s'a notat $\overline{Z}_m = j\omega M$ şi $\overline{Z}_{mo} = j\omega M_0$.

11. 11.1. Sensul curenţilor fiind cel din figură, $\overline{I}_2$ dă în fiecare ampermetru: $\overline{I}'_{A_1} = -\overline{I}_2 \dfrac{R+\overline{M}}{R+\overline{Z}+2\overline{M}}$ şi $\overline{I}'_{A_2} = -\overline{I}_2 \dfrac{\overline{Z}+\overline{M}}{R+\overline{Z}+2\overline{M}}$, iar $\overline{I}_3$ dă $\overline{I}''_{A_1} = -\overline{I}_3 \dfrac{\overline{Z}+\overline{M}}{R+\overline{Z}+2\overline{M}}$ şi $\overline{I}''_{A_2} = -\overline{I}_3 \dfrac{R+\overline{M}}{R+\overline{Z}+2\overline{M}}$, curentul total în fiecare ampermetru este suma acestora. Cum $\overline{I}_h = 0$ vom avea $\overline{I}_{A_1} = \dfrac{1}{3}\left[(a-1)\overline{I}_2 + (a^2-1)\overline{I}_3\right]$ şi $\overline{I}_{A_2} = \dfrac{1}{3}\left[(a^2-1)\overline{I}_2 + (a-1)\overline{I}_3\right]$ sau $\dfrac{1}{3}(a-1) = -\dfrac{1}{\overline{N}}(R+\overline{M})$ şi $\dfrac{1}{3}(a^2-1) = -\dfrac{1}{\overline{N}}(\overline{Z}+\overline{M})$, în care $\overline{N} = R + \overline{Z} + 2\overline{M}$; prin împărţire se obţine $\dfrac{R+\overline{M}}{\overline{Z}+\overline{M}} = \dfrac{a-1}{a^2-1} = -a$, de unde se deduce relaţia căutată $\overline{Z} = -a^2 R + a\overline{M}$.

11.2. Scriind legea a doua a lui Kirchhoff în circuitul secundar al celor două transformatoare se obţine (1) $\overline{E}_1 - \overline{E}_3 = R\overline{I}_2 + \overline{M}(\overline{I}_1 + \overline{I}_2)$ şi $\overline{E}_3 - \overline{E}_2 = \overline{Z}\overline{I}_1 + \overline{M}(\overline{I}_1 + \overline{I}_2)$. Inmulţind prima relaţie cu $\overline{Z}$ şi a doua cu R şi ţinând seama că $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \overline{I}_M$ se găseşte $\overline{I}_M = \dfrac{\overline{Z}(\overline{E}_1 - \overline{E}_3) + R(\overline{E}_3 - \overline{E}_2)}{\overline{Z}R + \overline{M}(\overline{Z}+R)}$ (2). Scriind tensiunile pe cele trei faze în funcţie de componentele lor simetrice, se găseşte $\overline{I}_M = \dfrac{(1-a)(\overline{Z}+aR)}{\overline{Z}R+\overline{M}(\overline{Z}+R)}\overline{E}_d + \dfrac{(1-a^2)(\overline{Z}+a^2R)}{\overline{Z}R+\overline{M}(\overline{Z}+R)}\overline{E}_i$ (3). Pentru ca aparatul să arate componenta directă, coeficientul lui $\overline{E}_i$ trebue să fie nul. Rezultă $\overline{Z} = -a^2 R = R\underline{|60^0}$.

11.3. Relaţia care dă curentul în voltmetru devine $\overline{I}_M = \dfrac{\overline{Z}(\overline{E}_1 - \overline{E}_3)}{\overline{Z}R + \overline{M}(\overline{Z}+R)}$. Punând $\overline{U}_1 = \overline{E}_3 - \overline{E}_2$, $\overline{U}_2 = \overline{E}_1 - \overline{E}_3$, $\overline{U}_3 = \overline{E}_2 - \overline{E}_1$ şi scriind pe $\overline{U}_2 = \overline{E}_1 - \overline{E}_3$ în funcţie de componentele simetrice, relaţia de mai sus devine

$\bar{I}_M = \dfrac{\bar{Z}a^2\bar{U}_d + \bar{Z}a\bar{U}_i}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)}$ sau ţinând seama de relaţia dintre $\bar{Z}$ şi R găsită mai sus, $\bar{I}_M = \dfrac{a^2\bar{U}_d + a\bar{U}_i}{R + M\sqrt{3}\,\underline{|-30^0}} = \dfrac{\bar{U}_2}{R + M\sqrt{3}\,\underline{|-30^0}}$ deci o tensiune proporţională cu $\bar{U}_2 = \bar{E}_1 - \bar{E}_3$. Numeric se găseşte $\bar{I}_M = (0{,}36 + j\,0{,}116) \times \bar{U}_2 \times 10^{-3} = 0{,}38.10^{-3}\,\bar{U}_2\,\underline{|18^0}$. Dacă admitem că tensiunea totală este arătată atunci când prin aparat trece un miliamper, atunci, în cazul considerat, aparatul va indica numai 38% din tensiunea fazei corespunzătoare. In cazul al doilea, dispozitivul alimentat numai cu tensiunea $\bar{U}_1$, se găseşte, ca mai sus

$\bar{I}_M = \dfrac{\bar{U}_1}{(R + \bar{M})\,\underline{|60^0} + \bar{M}}$ sau numeric $\bar{I}_M = (0{,}225 - j\,0{,}279)\;\bar{U}_1 \times 10^{-3} = 0{,}36 \times 10^{-3}\,\bar{U}_1\,\underline{|51^0}$, adică numai 36% din tensiunea $\bar{U}_1$.

11.4. Fie $\bar{Z}$ impedanţa în serie cu R, legată între fazele 2 şi 3 şi $\bar{Z}_T$ impedanţa secundarului autotransformatorului. Dacă $\bar{I}_1$ este curentul care circulă prin secundarul autotransformatorului şi $\bar{I}_2$ curentul care circulă prin impedanţa $R + \bar{Z}$, atunci curentul care trece prin aparatul de măsură de impedanţă $\bar{M}$ este:

$$\bar{I}_M = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{2} \cdot \frac{1}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T} - \frac{\bar{E}_2 - \bar{E}_3}{R + \bar{Z}} \cdot \frac{\bar{Z}}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T}$$

punând $\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \bar{U}_3$ şi $\bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \bar{U}_1$ şi scriind aceste mărimi în funcţie de componentele simetrice, găsim:

$$\bar{I}_M = -\left(\frac{a}{2} + \frac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}}\right)\frac{\bar{U}_d}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_1} - \left(\frac{a^2}{2} + \frac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}}\right)\frac{\bar{U}_i}{\bar{M} + \bar{Z} + \bar{Z}_T}$$

de unde condiţia ca $\bar{I}_M$ să măsoare componenta directă a tensiunilor $\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{\bar{Z}}{R + \bar{Z}}\right) = 0$ sau $\bar{Z} = j\dfrac{R}{\sqrt{3}}$, adică tocmai aceia indicată pe figură.

11.5. Relaţia de funcţionare (3) obţinută în problema 11.2 trebue să fie satisfăcută în ambele situaţii Vom avea deci:

$\bar{I}_M = \dfrac{(1 - a)(\bar{Z} + aR)}{\bar{Z}R + \bar{M}(\bar{Z} + R)} = \dfrac{(1 - a)(\bar{Z}_1 + aR_1)}{\bar{Z}_1R_1 + \bar{M}_1(\bar{Z}_1 + R)}$ sau ţinând seama de relaţia $\bar{Z} = -a^2R$ şi $\bar{Z}_1 = -a^2R_1$ obţinem relaţia de condiţie $-a^2R + \bar{M}(1 - a^2) = -a^2R_1 + \bar{M}_1(1 - a^2)$ de unde $R_1 = R - (\bar{M}_1 - \bar{M})(1 - a)$. Se găseşte $R_1 = 1540\ \Omega$.

11.6. Din ecuaţiile (1) scrise pentru problema 11.2 se deduce:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2(\bar{M} - a^2R) - \bar{U}_1\bar{M}}{\bar{M}R(1 - a^2) - a^2R^2} \text{ şi } \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_1(R + \bar{M}) - \bar{U}_2\bar{M}}{\bar{M}R(1 - a^2) - a^2R^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner


In cazul unui sistem invers, $\overline{U}_2 = a\overline{U}_1$ şi se găseşte

$$\overline{I}_1 = \overline{U}_1 \frac{R + (1 - a)\overline{M}}{\overline{M}R(1 - a^2) - a^2R^2} \quad \text{şi} \quad I_2 = U_1 \frac{(a - 1)\overline{M} - R}{\overline{M}R(1 - a^2) - a^2 R}.$$

Aparatul măsoară deci $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \overline{I}_M = 0$, aceasta în ambele cazuri.

11.7. Curentul din aparat este dat de relaţia $\overline{I}_M = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_1} - \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_2} - \frac{\overline{V}_3}{\overline{Z}_3}$. Identificând cu expresia care ne dă componenta directă, se găseşte $Z_A = 3$, o rezistenţă pură, $\overline{Z}_B = Z_A \underline{|60^0}$ şi $\overline{Z}_C = Z_A \underline{|-60^0}$. Numeric luăm $Z_A = R = \frac{380}{\sqrt{3}.5.10^{-3}} = 44000\ \Omega$; $\overline{Z}_B = (22000 + j\,38000)\ \Omega$; $\overline{Z}_C = 22000 - j\,38000\ \Omega$.

11.8. Cele trei impedanţe se obţin din relaţiile generale ale scurtcircuitelor trifazate, între două faze şi o fază la pământ. Se găseşte : *a*) pentru defectul trifazat $\overline{Z}_d = \frac{E_d}{I_d} = \frac{2000}{1000} = 2\ \Omega$ căci $E_d = E$ şi $I_d = I$; *b*) pentru defectul între două faze $\overline{I}_b = \overline{I}_c = (a^2 - a)\frac{E}{\overline{Z}_d + \overline{Z}_i}$, $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = \frac{E}{\overline{Z}_d + \overline{Z}_i}$. Rezultă $\overline{Z}_i = \frac{(a^2 - a)E}{\overline{I}_b}$ sau numeric $\overline{Z}_i = -j\,2{,}43\ \Omega$; pentru defectul între o fază şi pământ, avem

$$\overline{I}_d = \overline{I}_i = \overline{I}_h = \frac{E}{\overline{Z}_d + \overline{Z}_i + \overline{Z}_h}, \quad \overline{I}_a = \frac{3E}{\overline{Z}_d + \overline{Z}_i + \overline{Z}_h}, \quad \overline{E}_d = \frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_h}{\overline{Z}_d + \overline{Z}_i + \overline{Z}_h} E,$$

de unde rezultă $\overline{Z}_h = \frac{3\,E_d}{I_a} - \overline{Z}_d = \left[\frac{3}{\overline{I}_a} - \frac{(a^2 - a)}{I_b}\right] \overline{E}_i$. Numeric, se găseşte $\overline{Z}_h = 2{,}7 + j\,2{,}43\ \Omega$.

11.9. Montajul echivalează cu un scurtcircuit între două faze şi la pământ, cu schema echivalentă din fig. 21. Se calculează componentele simetrice de curent şi de tensiune. Cu acestea se calculează apoi $\overline{E}_a$ şi $\overline{I}_n = \overline{I}_b + \overline{I}_c$ de unde rezultă relaţia dată.

11.10. Se determină curentul din voltmetru cu ajutorul impedanţelor de calcul şi a componentelor simetrice de tensiune şi se exprimă acest curent în funcţie de componentele simetrice ale tensiunii. Punând condiţia ca, coeficientul lui $\overline{V}_i$ să fie nul, se găseşte relaţia dintre impedanţele fazelor R şi T sub forma $\overline{Z}_R = a^2\overline{Z}_T$. Luând $\overline{Z}_R = -j\frac{1}{C\omega}$, rezultă (pe o diagramă) $\overline{Z}_T = \overline{Z}_T \underline{|30^\circ}$ cu $|\overline{Z}_T| = |\overline{Z}_R|$. Se obţine de aici $(R + jX_L)\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = j\,X_C$ de unde, prin separare, $X_L = \frac{1}{\sqrt{3}} R$ şi $X_C = \frac{2}{\sqrt{3}} R$. Cele două reactanţe sunt independente de valoarea rezistenţei voltmetrului şi nu depind decât de rezistenţa inductanţei.

11.11. Se scrie $\overline{U}_1' = R\,I_{31} + \overline{Z}\,\overline{I}_{12} = R(\overline{I}_{31} - a^2\,\overline{I}_{12})$ dar $\overline{I}_1 = \overline{I}_{31} - \overline{I}_{12}$ etc. ; rezultă $\overline{I}_1 - \overline{I}_3 = 3\,I_{31}$ căci $\overline{I}_{12} + \overline{I}_{23} + \overline{I}_{31} = 0$, de unde $\overline{U}_1' =$

$-\frac{R}{3}(\overline{I}_3 + a\overline{I}_1 + a^2\overline{I}_2)$. La fel se determină şi valorile lui $\overline{U}'_2$, $\overline{U}'_3$. În cazul ampermetrelor de impedanţă $\overline{Z}'$, se obţin aceleaşi relaţii însă factorul de proporţionalitate este un vector a cărui modul şi argument sunt funcţii de R, $\overline{Z}$ şi $\overline{Z}'$.

11.12. Se scrie $\overline{U}'_1 = R\,\overline{I}_{12} + \overline{Z}\,\overline{I}_{31} = R(\overline{I}_{12} - a^2\overline{I}_{31})$. Dar $\overline{I}_{12} = \frac{\overline{U}_{12}}{R(1-a^2)}$ şi $\overline{I}_{23} = \frac{\overline{U}_{23}}{R(1-a^2)}$; rezultă

$$\overline{U}'_1 = (U_{12} - a^2 U_{23}) / (1-a^2).\quad \text{Dar } \overline{U}_{12} - a^2\,\overline{U}_{23} = \frac{3\,U_{i12}}{1-a^2}$$

$\therefore\ \overline{U}'_2 = -a\,\overline{U}_{i12} = -\overline{U}_{i23}$. La fel pentru celelalte tensiuni. În cazul curenţilor factorul de proporţionalitate este un vector funcţie de impedanţa Z'.

12. *12.1.* Reactanţa este dată de relaţia $\overline{X} = j\frac{\varepsilon}{100}\cdot\frac{U_N^2}{S}$, în care U_N este tensiunea nominală în kV şi S puterea aparentă în MVA. Numeric se găseşte: $\overline{X}_{scI} = j\,0{,}254\,\Omega$ şi $\overline{X}_{scII} = j\,0{,}58\times 10^{-3}\,\Omega$.

12.2. Avem $\varepsilon\% = \frac{U_{sc}}{U_N}\times 100$, rezultă $\varepsilon'\% = \frac{U_{sc}}{U_N}\cdot\frac{U_N}{U'_N}\times 100 = \varepsilon\%\frac{U_N}{U'_N}$.

Numeric se găseşte $\varepsilon' = 11{,}9\%$. $\overline{X}_{sc\,132} = j\,78\,\Omega$; $\overline{X}_{sc\,220} = j\,218\,\Omega$.

12.3. Rezolvarea acestei probleme se poate face asimilându-se sarcina desechilibrată cu un scurtcircuit între două faze cu o impedanţă între ele, la bornele unui alternator. Schema echivalentă (fig. 12.3) conduce la relaţiile:

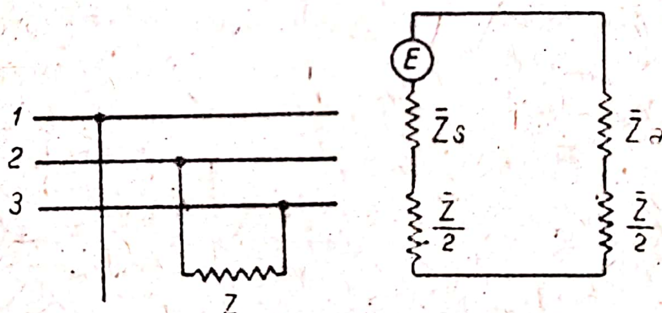


Fig. 12.3.

$\overline{I}_d = -\overline{I}_i = \frac{\overline{E}}{\overline{Z}_s + \overline{Z}_a + \overline{Z}} = 1510 - j\,3300$ A şi $\overline{I}_h = 0$. Curenţii pe cele trei faze sunt $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -5700 - j\,2600$ A; $\overline{I}_3 = 5700 + j\,2600$ A. Componentele simetrice ale tensiunilor *pe fază* sunt $\overline{V}_d = \overline{V}_i + \overline{Z}\,\overline{I}_d = (\overline{Z} + \overline{Z}_a)\,\overline{I}_d$ căci $\overline{V}_i = -\overline{Z}_a\,\overline{I}_i$. Se găseşte $\overline{V}_d = 3675 - j\,1515$ V şi $\overline{V}_i = 495 + j\,226{,}5$ V.

Componentele simetrice ale tensiunilor *între faze* (triunghi) sunt: $\overline{U}_d = -j\sqrt{3}\,\overline{V}_d = -2640 - j\,5600$ V; $\overline{U}_i = j\sqrt{3}\,\overline{V}_i = -344 + j\,754$ V. Tensiunile la bornele utilizării sunt $\overline{U}_{23} = -2984 - j\,4846$ V; $\overline{U}_{31} = -4013 + j\,4315$; $\overline{U}_{12} = 6997 + j\,531$ V.

12.4. Reţeaua neavând fir neutru $\overline{I}_h = 0$. Pentru găsirea curenţilor, se transfigurează triunghiul utilizării în stea. Se găseşte: $R_{A'O} = 2{,}86\ \Omega$; $R_{B'O} = 1{,}42\ \Omega$ şi $R_{C'O} = 5{,}72\ \Omega$. Componentele simetrice ale acestor rezistenţe sunt: $\overline{\mathfrak{Z}}_h = \frac{10}{3}\ \Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_d = -\frac{1}{3}(0{,}71 + j\,3{,}72)\ \Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_i = -\frac{1}{3}(0{,}71 - j\,3{,}72)\ \Omega$. Din relaţiile care ne dau componentele simetrice ale tensiunilor pe faze, în funcţie de curenţi şi impedanţe, ţinând seama că sistemul de tensiuni dat este simetric, şi deci $\overline{U}_d = 100$ V şi $\overline{U}_i = 0$ V, se găsesc componentele simetrice ale curenţilor pe linie $\overline{I}_d = 35$ A, $\overline{I}_i = 2{,}84 + j\,13$ A; de unde, curenţii pe linie, $\overline{I}_A = 37{,}84 + j\,13$ A; $\overline{I}_B = -30{,}17 - j\,35{,}54$ A; $\overline{I}_C = -7{,}67 + j\,22{,}54$ A. Construind diagrama se vede că este un sistem direct. Curenţii în utilizarea reală (triunghi) se obţin scriind că la aceleaşi borne avem aceeaşi cădere de tensiune, atât la stea cât şi la triunghi: $\overline{R}_{A'O}\,\overline{I}_A + \overline{R}_{B'O}\cdot\overline{I}_B = \overline{R}_{AB}\cdot\overline{J}_{AB}$. Se găseşte $J_{AB} = 13 - j\,3{,}12$ A; $\overline{J}_{BC} = -8{,}7 + j\,7{,}74$ A; $\overline{J}_{CA} = -4{,}3 - j\,4{,}62$ A. Sistemul este invers.

12.5. Reactanţa transformatorului este $\overline{X} = j\,3{,}43.\ 10^{-3}$ Circuitul dat devine (fig. 12.5.). Componentele simetrice fictive ale rezistenţelor sunt: $\overline{\mathfrak{Z}}_h = 7.10^{-3}\ \Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_d = (1{,}5 + j\,2{,}6)\cdot 10^{-3}\ \Omega$. $\overline{\mathfrak{Z}}_i = (1{,}5 - j\,2{,}6)\cdot 10^{-3}\ \Omega$. Componentele simetrice ale curenţilor sunt date de relaţiile $\overline{V}_d = (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_d)\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i$ şi $\overline{V}_i = \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_d + (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_i)\,\overline{I}_i$, în care $\overline{V}_d = j\,\frac{\overline{U}_d}{\sqrt{3}} = j\,115{,}5$ V, $\overline{U}_i = 0$. Se găseşte $\overline{I}_d = 8{,}94 + j\,12{,}50$ kA şi $\overline{I}_i = 5{,}42 - j\,3{,}07$ kA. Curenţii căutaţi în cele

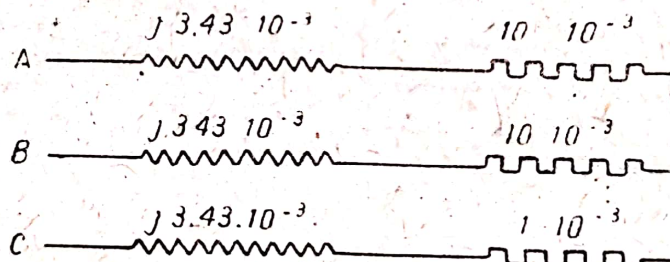


Fig. 12.5

trei faze sunt $\overline{I}_1 = 14{,}36 + j\,9{,}43$ kA; $\overline{I}_2 = 6{,}30 - j\,7{,}76$ kA; $\overline{I}_3 = -20{,}66 - j\,1{,}67$ kA. Sistemul este direct. Puterea absorbită de cuptor este $P = R_1|\overline{I}_1|^2 + R_2|\overline{I}_2|^2 + R_3|\overline{I}_3|^2 = 4390$ kW, ceeace corespunde unei supraîncărcări de 25,43 % a transformatorului.

12.6. Curenţii sunt daţi de relaţiile (83) în care impedanţele de calcul (76) se determină înglobând în impedanţele sarcinii şi impedanţele liniei. Sistemul de tensiuni fiind simetric, $\overline{E}_h = \overline{E}_i = 0$ şi $\overline{E}_d = \frac{400}{\sqrt{3}}\,\underline{|0}$. Cunoscând componentele simetrice ale curenţilor, curenţii pe fază se determină cu ajutorul relaţiilor (82). Se găseşte $\overline{I}_A = 38{,}5 - j\,8{,}9$ A; $\overline{I}_B = -20{,}5 + j\,16{,}3$ A; $\overline{I}_C = -82{,}7 + j\,43{,}2$ A.

Scanned with OKEN Scanner



12.7. $E_h = 0$ pentru $\overline{Z}_A \overline{Z}_B + \overline{Z}_B \overline{Z}_C + \overline{Z}_C \overline{Z}_A = 0$, adică atunci, când nu există rezistenţe în receptori. Intrucât componentele simetric ale tensiunilor pe fază $\overline{V}_d$ şi $\overline{V}_i$, depind numai de tensiunile între faze, nu se poate alege $\overline{Z}_A$, $\overline{Z}_B$, $\overline{Z}_C$ astfel încât sistemul să se reducă la unul direct sau invers.

12.8. Unghiurile triunghiului format de tensiuni se determină cu relaţia $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$. Se găseşte $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$, astfel că vectorii de tensiuni sunt, luând U_{AB} ca origină de fază $\overline{U}_{AB} = 141{,}4 \underline{|0}$ V, $\overline{U}_{BC} = 200 \underline{|-135°}$ V; $\overline{U}_{CA} = 141{,}4 \underline{|90°}$ V. (*a*) Se găseşte apoi $\overline{U}_d = 155{,}7 - j\,40{,}8$ V şi $\overline{U}_i = 11{,}0 + j\,27{,}5$ V. (*b*) Aplicând relaţiile (81), în care $\mathfrak{z}_h = \overline{Z}$, $\mathfrak{z}_d = \mathfrak{z}_i = 0$ se găseşte $\overline{I}_d = 5{,}66 + j\,3{,}32$ A şi $\overline{I}_i = 1{,}82 - j\,0{,}48$ A. (*c*) $\overline{S} = 3\,\overline{U}_d \overline{I}_d^* + 3 U_i \cdot I_i^* = 3\,(355 + j\,297{,}6) + 3\,(35{,}8 + j\,19{,}3) = 1172{,}4 + j\,950{,}7$ W.

12.9. Prin rezolvarea triunghiului tensiunilor se determină argumentele acestor tensiuni, luându-se ca origină de fază tensiunea $\overline{U}_{AB}$. Se găseşte $\overline{U}_{AB} = 2000 \underline{|0}$ V; $\overline{U}_{BC} = 2300 \underline{|-115°50'}$ V; $\overline{U}_{CA} = 2300 \underline{|115°50'}$ V. (*a*) Componentele simetrice ale tensiunilor sunt $\overline{U}_d = 2\,196 \underline{|0}$ V şi $\overline{U}_i = 195 \underline{|180°}$ V. şi, pentru tensiunile pe fază $\overline{V}_d = 1266 \underline{|90°}$ V şi $\overline{V}_i = 113 \underline{|90°}$ V. Sistemul de sarcini fiind simetric, $\mathfrak{z}_h = \overline{Z}_L = 1 \underline{|60°}$, $\mathfrak{z}_d = \mathfrak{z}_i = 0$. Aplicând relaţiile (83) se găseşte $\overline{I}_d = 12{,}6 + j\,21{,}3$ A şi $\overline{I}_i = 8{,}9 + j\,5{,}2$ A.

(*b*) $\overline{V}'_d = \overline{V}_d - \mathfrak{z}_h \overline{I}_d = 12{,}2 + j\,1245{,}5$ V şi $\overline{V}'_i = j\,102{,}7$ V.

(*c*) $\overline{S} = 81.650{,}8 + j\,49\,042{,}3$ VA.

12.10. Se transfigurează circuitul de utilizare obţinându-se apoi impedanţele de calcul ale acestor impedanţe şi a liniei: $\mathfrak{z}_h = 2 - j\,0{,}41$, $\mathfrak{z}_d = 0{,}5 + j\,0{,}866$ $\mathfrak{z}_i = 0{,}5 - j\,0{,}866$. Luând ca origină de fază f.e.m. E_{BC} şi ţinând seama de sensul tensiunilor indicat pe figură, f.e.m. respective sunt $\overline{E}_{BC} = 220 \underline{|180°}$ V, $\overline{E}_{CA} = 220 \underline{|60°}$ V, $\overline{E}_{CA} = 220 \underline{|-60°}$V. Componentele simetrice ale acestor forţe electromotoare sunt $\overline{U}_h = \overline{U}_i = 0$, $\overline{U}_d = 220 \underline{|180°}$ V. Componentele simetrice ale sistemului în stea corespunzător sunt $\overline{V}_h = \overline{V}_i = 0$, $\overline{V}_d = -j\,127$ V.

(*a*) Relaţiile (83) aplicate dau $\overline{I}_d = -32{,}7 - j\,67{,}8$ A şi $\overline{I}_i = -26{,}5 + j\,25{,}8$ A. In calculul acestor curenţi se va ţine seama că $\overline{V}_d$ este componenta simetrică a forţei electromotoare şi în consecinţă în coeficientul lui $\overline{I}_d$ din relaţia (83) trebue introdusă reactanţa sursei j 1,242 Ω. Rezultă apoi

$$\overline{I}_A = -59{,}2 - j\,42{,}0 \text{ A}, \quad \overline{I}_B = -51{,}56 + j\,26{,}35 \text{ A},$$
$$\overline{I}_C = -110{,}66 + j\,15{,}65 \text{ A}.$$

(*b*) $\overline{V}'_d = \overline{V}_d - (\overline{Z}_L + j\,\overline{X}_s)\,\overline{I}_d = -119{,}3 + j\,14{,}1$ V şi $\overline{V}_i = -\overline{Z}_L \overline{I}_i = 52{,}3 + j\,0{,}7$ V.

Rezultă componentele simetrice ale tensiunilor între faze $\overline{U}'_d = 24{,}4 + j\,206{,}4$ V, $\overline{U}_i = -1{,}2 + j\,90{,}5$ de unde $\overline{U}'_{BC} = 23{,}2 + j\,296{,}9$V, $\overline{U}'_{CA} = 166 - j\,248$ V, $\overline{U}'_{AB} = -89{,}3 - j\,49$ V.

(*c*) $W_1 = \mathfrak{R}\,(\overline{U}'_{AC} \cdot \overline{I}_A^*) = -613{,}6$ W; $W_2 = \mathfrak{R}\,(\overline{U}'_{BC} \cdot \overline{I}_B^*) = 6641$ W. $P = 6027{,}4$ W.

12.11. Problema se rezolvă ca şi cea precedentă. Se transfigurează triunghiu arcinilor găsindu-se $R_{10} = 3\,\Omega$; $R_{20} = 6\,\Omega$; $R_{30} = 9\,\Omega$, la care se adaugă reactanţele liniei obţinându-se $\overline{Z}_1 = 3 + j\,0,3\,\Omega$, etc. Impedanţele de calcul ale acestora sunt: $\overline{\mathfrak{z}}_h = 6 + j\,0,3$; $\overline{\mathfrak{z}}_d = a\,(1 + 2a)$; $\overline{\mathfrak{z}}_i = a\,(2 + a)$. Ecuaţiile căderilor de tensiune pe fază, în componente simetrice, dau: $\overline{V}_d = (\overline{X}_s + \overline{\mathfrak{z}}_h)\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_i\,\overline{I}_i$ şi $\overline{V}_i = \overline{\mathfrak{z}}_d\,\overline{I}_d + (\overline{X}_a + \overline{\mathfrak{z}}_h)\,\overline{I}_i$, căci $\overline{I}_h = 0$. Cum $\overline{V}_d = \overline{E} = 1500$ V şi $\overline{V}_i = 0$, se găseşte $\overline{I}_d = 263,2 - j\,45,8$ A şi $\overline{I}_i = 73,9 + j\,11,2$ A. Componentele simetrice ale tensiunilor pe fază vor fi deci $\overline{E}_d = \overline{E} - \overline{X}_s\,\overline{I}_d = 1454,2 - j\,263,2$ V şi $\overline{E}_i = -\overline{X}_a\,\overline{I}_i = 5,6 - j\,37,0$ V. Componentele simetrice ale tensiunilor între faze sunt date de relaţiile (73). Se găseşte: $\overline{U}_d = -455,3 - j\,2515,8$ V şi $\overline{U}_i = 64,0 + j\,9,7$ V. De unde, $\overline{U}_1 = \overline{U}_{23} = -391,3 - j\,2506,1$ V; $\overline{U}_2 = \overline{U}_{31} = -1991,4 + j\,1702,8$ V; $U_3 = \overline{U}_{12} = 2382,7 + j\,803,3$ V. Ca verificare $\Sigma\,\overline{U} = 0$.

12.12. Componentele simetrice ale impedanţelor sunt $\overline{\mathfrak{z}}_h = \frac{1}{3}(20 + j\,10)\,\Omega$; $\overline{\mathfrak{z}}_d = -1,33 - j\,4,88\,\Omega$; $\overline{\mathfrak{z}}_i = 4,88 + j\,1,33\,\Omega$. Se aplică ecuaţiile care dau componentele simetrice ale tensiunilor *pe fază* în funcţie de componentele simetrice ale curenţilor şi impedanţelor. Se găseşte: *a)* $\overline{V}_d = -j\,63,5$ V; $\overline{V}_i = 0$; $\overline{I}_d = -6,15 - j\,3,59$ A; $\overline{I}_i = -1 - j\,1,98$ A; $\overline{I}_{LA} = -7,15 - j\,5,57 = 8,3\,\underline{|218^0 30'}$ A; $\overline{I}_x = 2,19 - j\,5,28 = 5,71\,\underline{|-67^0 30'}$ A; $\overline{I}_{LC} = 4,96 + j\,5,41 = 7,34\,\underline{|47^0 30'}$. *b)* $\overline{V}'_d = 0$; $\overline{V}'_i = j\,63,5$ V; $\overline{I}_d = -2,01 - j\,2,9$ A; $\overline{I}_i = 2,06 + j\,4,76$ A; $\overline{I}_{LA} = 0,05 + j\,1,86 = 1,86\,\underline{|89^0 50'}$ A; $\overline{I}_x = -6,7 + j\,2,63 = 7,2\,\underline{|158^0 30'}$; $\overline{I}_{LC} = -1,66 - j\,1 = 1,93\,\underline{|211^0}$ A.

12.13. Problema se rezolvă fără a ţine seama de faptul că toate aceste caracteristice sunt date în procente. Se calculează componentele simetrice ale impedanţelor şi se găseşte:

$$\overline{\mathfrak{z}}_h = \frac{200}{3}(1 + j\,1)\,\%;\quad \overline{\mathfrak{z}}_d = -\frac{100}{3}(-0,5 + j\,1,866)\,\%;$$

$$\overline{\mathfrak{z}}_i = -\frac{100}{3}(-0,5 + j\,0,134)\,\%.$$

Se scriu apoi ecuaţiile care dau componentele simetrice ale tensiunii *pe fază*:

$$\overline{V}_h = (\overline{Z}_0 + \overline{\mathfrak{z}}_h)\,\overline{I}_h + \overline{\mathfrak{z}}_i\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_d\,\overline{I}_i$$

$$\overline{V}_d = \overline{\mathfrak{z}}_d\,\overline{I}_h + (\overline{Z}_s + \overline{\mathfrak{z}}_h)\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{z}}_i\,\overline{I}_i$$

$$\overline{V}_i = \overline{\mathfrak{z}}_i\,\overline{I}_h + \overline{\mathfrak{z}}_d\,\overline{I}_d + (\overline{Z}_a + \overline{\mathfrak{z}}_h)\,\overline{I}_i$$

de unde se deduc valorile componentelor simetrice ale curenţilor. Numeric avem $\overline{V}_h = 0$, $\overline{V}_d = E$; $\overline{V}_i = 0$. Se găseşte $\overline{I}_h = E\,10^{-3}\,(1,5 + j\,1,71)$; $\overline{I}_d = E \cdot 10^{-3}\,(2,07 - j\,4,1)$; $\overline{I}_i = E\,.\,10^{-3}\,(1,63 - j\,1,52)$. Componentele simetrice ale tensiunilor *pe fază* la bornele alternatorului sunt: $\overline{V}'_h = -\overline{Z}_0\,\overline{I}_h = E\,10^{-3}\,(8,55 - j\,7,55)$; $\overline{V}'_d = \overline{E} - \overline{Z}_s\,\overline{I}_d = E\,.\,10^{-3}\,(-409 - j\,207)$; $\overline{V}'_i = -\overline{Z}_a\,\overline{I}_i = E\,.\,10^{-3}\,(-45,6-$

— j 48,9). Componentele simetrice ale tensiunilor între faze sunt: $\overline{U}_d = -j\sqrt{3}\, \overline{V}'_d = E \cdot 10^{-3}\,(-358 + j\,850)$; $\overline{U}_i = j\sqrt{3}\,\overline{V}'_i = E \cdot 10^{-3}\,(84{,}5 - j\,79)$. Cu aceste elemente putem determina tensiunile dintre fază şi nul şi între faze. Vom avea: $\overline{V}_1 = (-54 - j\,32)\,\%$; $\overline{V}_2 = (12 + j\,52)\,\%$; $\overline{V}_3 = (45 - j\,23)\,\%$; $U_1 = \overline{U}_{23} = (-33 + j\,92{,}5)\,\%$; $\overline{U}_2 = \overline{U}_{31} = (109{,}7 - j\,13{,}8)\,\%$; $\overline{U}_3 = \overline{U}_{12} = (-66{,}7 - j\,88{,}2)\,\%$. Aceste tensiuni sunt raportate la tensiunea corespunzătorare excitaţiei de 120%, dată în problemă.

12.14. Schema reţelei este dată în (fig. 12.14. *a*). Dacă înglobăm impedanţele

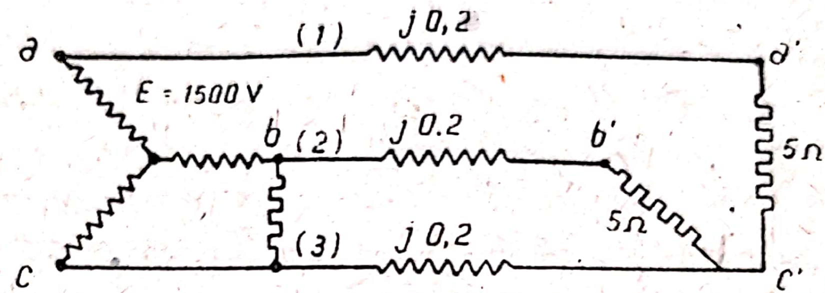


Fig. 12.14. *a*.

liniei în impedanţele sarcinii, această schemă se transformă după cum se arată în (fig. 12.14. *b*). Se transfigurează triunghiul $b_1c_1(b_2c_2)$ într'o stea, obţinându-se $b_1 0 = 2{,}22 - j\,0{,}01\,\Omega$; $c_1 0 = 0{,}004 + j\,0{,}09\,\Omega$; $(b_2c_2)\ 0 = 0{,}001 + j\,0{,}11\,\Omega$. Cu

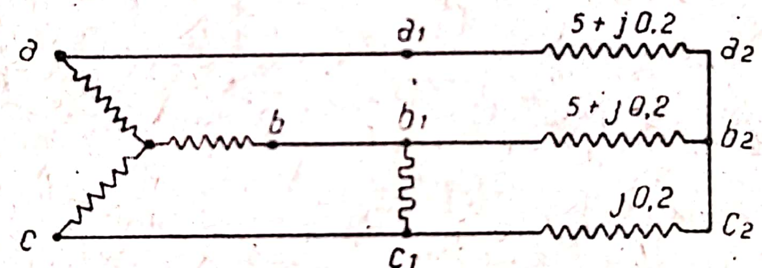


Fig. 12.14. *b*.

acestea reţeaua de utilizare devine (fig. 12.9. *c*), căreia îi scriem componentele simetrice. Vom avea $\overline{Z}_h = 2{,}41 + j\,0{,}13\,\Omega$; $\overline{Z}_d = 1{,}33 + j\,0{,}73\,\Omega$; $\overline{Z}_i = 1{,}23 -$

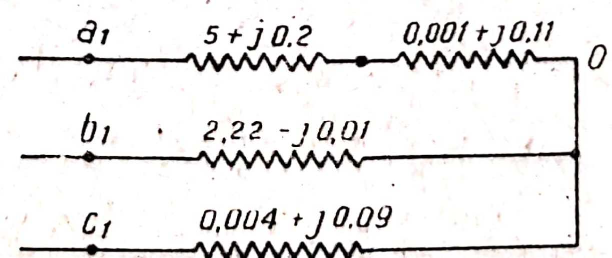


Fig. 12.14. *c*.

$- j\,0{,}55\,\Omega$. Ecuaţiile care dau componentele simetrice ale curenţilor pe linie se scriu uşor observând că $\overline{E}_d = E = 1500$ V, $\overline{E}_i = 0$ şi $\overline{I}_h = 0$. Se găseşte $\overline{I}_d = 426 - j\,130{,}2$ A şi $\overline{I}_i = -77{,}7 - j\,179{,}6$ A. Componentele simetrice ale tensiunii *pe fază* la bornele alternatorului sunt $\overline{V}_d = \overline{E} - \overline{X}_s\,\overline{I}_d = 1369{,}8 - j\,426$

Scanned with OKEN Scanner

V şi $\overline{V}_i = -\overline{X}_i \overline{I}_i = -89{,}8 + j\,38{,}9$ V; iar între faze, $\overline{U}_d = -j\sqrt{3}\,\overline{V}_d = -737 - j\,2369{,}8$ V şi $\overline{U}_i = j\sqrt{3}\,\overline{V}_i = -67{,}3 - j\,155{,}4$ V. Rezultă $\overline{U}_1 = \overline{U}_{23} = -804{,}3 - j\,2525{,}2$ V; $\overline{U}_2 = \overline{U}_{13} = -1515{,}5 + j\,1842{,}6$ V; $\overline{U}_3 = \overline{U}_{12} = 2319{,}8 + j\,682{,}6$ V. Pentru găsirea tensiunilor la bornele utilizării, trebue să găsim curenţii reali, deoarece s'a făcut o transfigurare. Avem $\overline{I}'_1 = 348{,}3 - j\,309{,}8$ A; $\overline{I}'_2 = -131{,}4 - j\,281{,}3$ A; $\overline{I}'_3 = -216{,}9 + j\,591{,}1$ A. Se scrie egalitatea tensiunilor între aceleaşi două puncte pe stea şi pe triunghi. Aveam $\overline{I}''_1 = 47{,}6 - j16{,}6$ A; $\overline{I}''_2 = -56{,}6 - j\,114{,}8$ A; $\overline{I}''_3 = 104{,}2 + j\,98{,}2$ A. Examinând schema vedem imediat că avem: $\overline{I}_c = \overline{I}''_1 = 47{,}6 - j\,16{,}6$ A; $\overline{I}_b = \overline{I}''_2 = -56{,}6 - j\,114{,}8$ A şi cum $\Sigma\,\overline{I}_a = 0 \therefore \overline{I}_a = 9{,}0 + j\,131{,}4$ A. Căderea de tensiune la utilizare, pe fază, este $\overline{V}_a = \overline{I}_a \overline{Z}_a = 45 + j\,659$ V; $\overline{V}_b = \overline{I}_b \overline{Z}_b = -283 - j\,574$ V; $\overline{V}_c = \overline{I}_c \overline{Z}_c = 0$. Tensiunea la bornele utilizării va fi $\overline{U}_A = \overline{V}_b - \overline{V}_c = -283 - j\,574$ V; $\overline{U}_B = \overline{V}_c - \overline{V}_a = -45 - j\,659$ V; $\overline{U}_C = \overline{V}_a - \overline{V}_b = 328 + j\,1173$ V.

12.15. Din datele problemei deducem impedanţele alternatorului. Găsim $\overline{Z}_i = 0{,}484 + j\,1{,}157\ \Omega$; $\overline{Z}_a = 0{,}621 + j\,1{,}163\ \Omega$; $\overline{Z}_0 = 2{,}045 + j\,2{,}650\ \Omega$; impedanţele celor trei reţele fictive sunt $\overline{Z}_d = 0{,}684 + j\,2{,}557\ \Omega$; $\overline{Z}_i = 0{,}821 + j\,2{,}563\ \Omega$; $\overline{Z}_0 = 2{,}445 + j\,3{,}250\ \Omega$. [Impedanţele transformatorului au fost recalculate în raport cu joasa tensiune, înmulţindu-se cu raportul $\left(\frac{6}{30}\right)^2$]. Problema se rezolvă ca şi cum scurtcircuitul ar fi fost pe faza 1. La urmă rezultatul se înmulţeşte cu a pentru a obţine faza 3. Se găseşte $\overline{I}_1 = OA$; $\overline{I}_2 = OA$; $\overline{I}_3 = 726 + j\,922$ A.

12.16. Problema se rezolvă ca şi în cazul precedent, ea tratându-se ca în cazul unui scurtcircuit între fazele 2 şi 3 şi rezultatul rotindu-se apoi cu 120° în urmă, adică înmulţindu-se cu a^2. Se obţine $\overline{I}_1 = 98{,}3 - j\,72{,}2$ A; $\overline{I}_2 = 0A$; $\overline{I}_3 = 80{,}9 + j\,118{,}7$ A.

12.17. Schema echivalentă a alternatorului este (fig. 12.17. *a*). Relaţiile

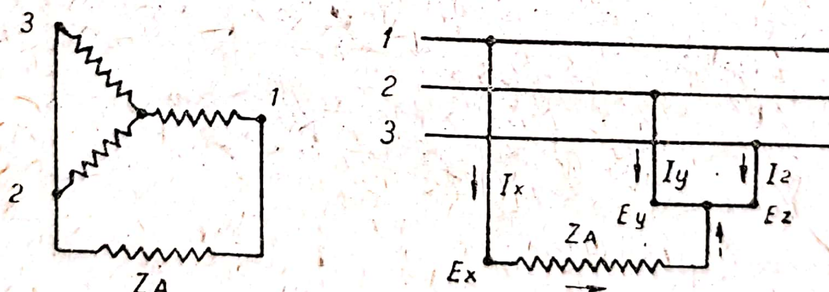


Fig. 12.17 *a*.

de condiţie ale acestui circuit sunt: $\overline{I}_x + \overline{I}_y + \overline{I}_z = 0$ şi $\overline{E}_y = \overline{E}_z = \overline{E}_x + \overline{Z}_A \overline{I}_x$, de unde rezultă imediat $\overline{I}_h = 0$. Componentele simetrice ale tensiunilor sunt $\overline{E}_d = \overline{E}_i = -\frac{1}{3}\overline{Z}_A \overline{I}_x$.

Componentele simetrice ale curenţilor sunt $\overline{I}_d = \frac{1}{3}\left[(a-1)\overline{I}_v + (a^2-1)\overline{I}_z\right]$ şi $\overline{I}_i = \frac{1}{3}[(a^2-1)\overline{I}_v + (a-1)]\overline{I}_z$ de unde se obţine $\overline{I}_d + \overline{I}_i = -(\overline{I}_v + \overline{I}_z) = \overline{I}_x$.

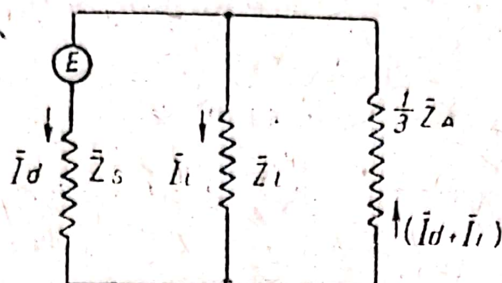


Fig. 12.17 *b*.

Rezultă $\overline{E}_d = \overline{E}_v = -\frac{\overline{Z}_A}{3}\left(\overline{I}_d + \overline{I}_i\right)$ care se poate traduce prin schema echivalentă din fig. 12.17 *b*, din care se deduce uşor expresia componentelor simetrice ale curenţilor:

$$\overline{I}_d = \frac{3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A}{\overline{Z}_s(3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A) + \overline{Z}_a\overline{Z}_A} E_\lambda, \quad \overline{I}_i = \frac{-\overline{Z}_A E_\lambda}{\overline{Z}_s(3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A) + \overline{Z}_a\overline{Z}_A}.$$

Spre verificare se scrie $\overline{I}_A = \overline{I}_d + \overline{I}_i$. Curenţii pe cele trei faze sunt:

$$\overline{I}_x = \frac{3\overline{Z}_a}{\overline{Z}_s(3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A) + \overline{Z}_a\overline{Z}_A} E_\lambda, \quad \overline{I}_v = \frac{3a^2\overline{Z}_a + (a^2-a)\overline{Z}_A}{\overline{Z}_s(3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A) + \overline{Z}_a\overline{Z}_A} E_\lambda;$$

$$\overline{I}_z = \frac{3a\overline{Z}_a - (a^2-a)\overline{Z}_A}{\overline{Z}_s(3\overline{Z}_a + \overline{Z}_A) + \overline{Z}_a Z_A} E_\lambda.$$

In cazul aplicaţiei numerice se găseşte: $\overline{I}_x = 314 - j\,790$ A; $\overline{I}_v = -1265 + j\,289$ A; $\overline{I}_z = 586 + j\,500$ A;

12.18. Problema este analoagă cu problema 12.3 cu deosebirea că sarcinile sunt legate pe fazele 1 şi 2. Ea se poate rezolva direct (un bun exerciţiu). Rezultatele se pot obţine şi din rezultatele problemei mai sus indicate în care fazele se rotesc cu 120° înainte, adică se înmulţesc rezultatele cu *a*. Se găseşte: $\overline{U}_1 = \overline{U}_{BC} = 5689 - j\,161$ V; $\overline{U}_2 = \overline{U}_{CA} = -1468 - j\,5895$ V; $\overline{U}_3 = \overline{U}_{AB} = -4221 + j\,5734$ V.

12.19. Schema reţelei este dată în fig. 12.19, *a* şi ea corespunde unui

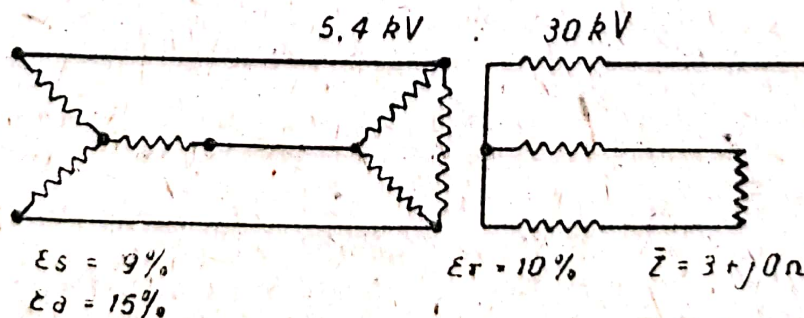


Fig. 12.19, *a*.

scurtcircuit cu arc între două faze. Rețeaua de secvență directă (fig. 12.19. *b*,

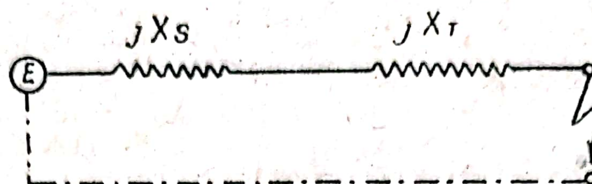


Fig. 12.19, *b*.

în care s'a luat ca tensiune de referință tensiunea secundară a transformatorului și unde $X_s = \frac{\varepsilon_s}{100} \cdot \frac{U^2}{S} = 5{,}4\ \Omega$ și $X_T = 9\ \Omega$. Rețeaua de secvență inversă (fig. 12.19, c) în care $X_a = 4{,}5\ \Omega$ și $X_T = 9\ \Omega$. Rezultă $\overline{Z}_d = j\ 14{,}4\ \Omega$ și $\overline{Z}_i = j\ 13{,}5\ \Omega$. Componentele simetrice ale curenților sunt $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = 65{,}9 - j\ 612{,}5$ A. Trecând dela transformator la alternator, componenta directă de curent se rotește cu

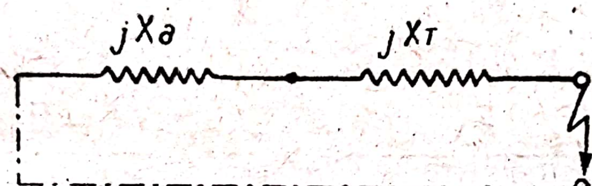


Fig. 12.14, *c*.

$(+30^0)$ iar componenta inversă cu (-30^0) și valoarea se înmulțește cu raportul de transformare. Se găsește: $\overline{I'}_d = 2020 - j\ 2770$ A; $\overline{I'}_i = 1382 + j\ 3130$ A. Pentru calculul componentelor simetrice ale tensiunii trebuesc recalculate reactanțele alternatorului la tensiunea acestuia. Se găsește: $X'_s = 0{,}175\ \Omega$ și $X'_a = 0{,}146\ \Omega$. De unde $\overline{E}_d = 2625 - j\ 354$ V; $\overline{E}_i = 456 - j\ 202$ V. Puterea aparentă debitată de alternator pe defect este $\overline{\overline{S}}_T = 3\,(\overline{E}_d\,\overline{I'}_{dc} + \overline{E}_i\,\overline{I'}_{ic}) = 18{,}84 + j\ 14{,}52$ MVA, al cărui modul este $S = 23{,}78$ MVA, adică un surplus de putere de $\frac{23{,}78 - 15}{15} \cdot 100 = 58{,}5\,\%$.

12.20. Suntem în cazul unui scurtcircuit bifazatl a pământ, cu arc. In cazul de față, impedanța arcului trebue combinată cu impedanța de punere la pământ a alternatorului. Vom avea $\overline{Z} = 10 + j\ 10\ \Omega$. Problema se tratează prin metoda cunoscută și se găsește: $\overline{I}_d = 170 - j\ 3924$ A; $\overline{I}_i = -162 + j\ 3908$ A; $\overline{I}_h = -8 + j\ 16$ A; $\overline{E}_d = \overline{E}_i = \overline{E}_h = \overline{I}_i\overline{Z}_a = 676 - j\ 246$ V, de unde $\overline{S} = 0$. Aceasta înseamnă că rezistența de punere la pământ a alternatorului, „suflă arcul".

12.21. Impedanța de defect poate fi considerată ca o impedanță în paralel la bornele *B'C'* ale sarcinii. Se reduc aceste impedanțe și se transfigurează circuitul triunghi obținut. Se calculează curenții folosind relațiile (81). Se face apoi repartiția în laturile triunghiului și pe defect. Se calculează apoi tensiunea la borne.

A se compara rezultatele cu acelea obținute cu ajutorul calculului matricial (problema 17,25).

12.22. Defectul corespunde unui scurtcircuit trifazat la pământ. După cum s'a arătat în problema 10.30, $\overline{Z}_d = \overline{Z} - \overline{Z}_m = j\ 0{,}8\Omega$ și $\overline{Z}_h = \overline{Z} + 2\,\overline{Z}_m = j\ 2\Omega$. Se găsește $\overline{I}_h = j\ 790$ A, $\overline{I}_d = -j\ 2770$ A, $\overline{I}_i = j\ 1980$ A; $\overline{U}_{h1} = \overline{U}_d = \overline{U}_i = 1580$ V. Aparatele indică valorile eficace ale curenților și tensiunii

corespunzătoare modulelor mărimilor ce se obțin prin compunerea componentelor simetrice. Se găsește $I_0 = 2370$ A, $I_A = 0$, $I_B = I_C = 4220$ A, $U_A = 4740$ V. Tensiunea $U_A > E_{fază}$. Acest fapt se explică prin apariția forțelor electromotoare de inducție datorite fazelor B și C: $\overline{E}_m = -(\overline{I}_B + \overline{I}_C)\overline{Z}_m = 1048$ V.

12.23. Se calculeaz reactanțele respective și se construesc cele trei rețele: rețeaua de secvență directă (a), inversă (b) și homopolară (c) (fig. 12.23).

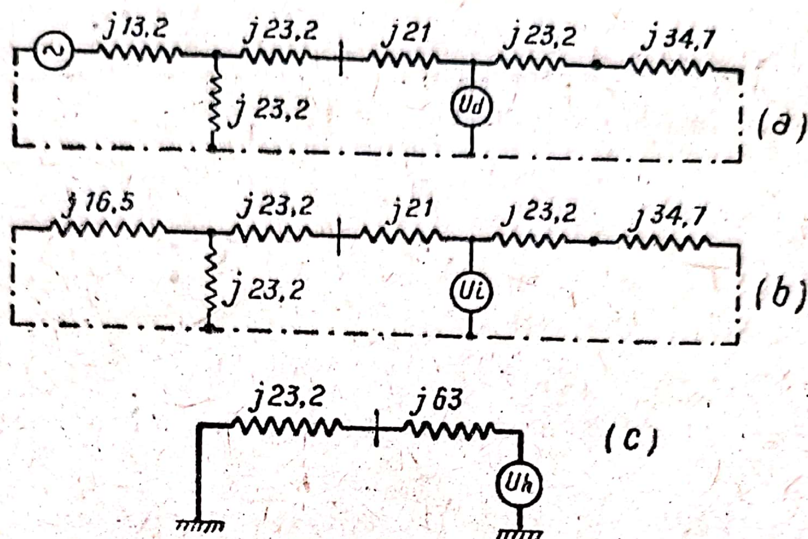


Fig. 12.23

Se reduc aceste reactanțe obținându-se $\overline{X}_d = j\,28\,\Omega$; $\overline{X}_i = j\,28{,}1\,\Omega$; $\overline{X}_h = j\,86{,}2\,\Omega$. Pentru a găsi curenții de scurtcircuit în diversele cazuri de defecte se cuplează aceste reactanțe așa cum s'a arătat în § 12.3. Se găsește: a) $\overline{I}_h = \overline{I}_d = \overline{I}_i = 0{,}465$ kA; $\overline{I}_1 = 1{,}4$ kA; $\overline{I}_2 = \overline{I}_3 = 0$. b) $\overline{I}_d = 2{,}33$ kA; $\overline{I}_i = -1{,}75$ kA; $\overline{I}_h = -0{,}58$ kA. $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -0{,}98 - j\,3{,}73$ kA; $\overline{I}_3 = -0{,}98 + j\,3{,}73$ kA; c) $\overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = 2{,}05$ kA; $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -\overline{I}_3 = -j\,3{,}56$ kA. d) $\overline{I}_d = \overline{I}_1 = 3{,}5$ kA; $\overline{I}_i = \overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_2 = a^2\overline{I}_1$; $\overline{I}_3 = a\,\overline{I}_1$.

12.24. Se calculează reactanțele respective, și se construesc rețelele de secvență directă și inversă, circuitul neavând o rețea de secvență nulă. Reducându-se aceste rețele se găsește $\overline{Z}_d = j\,18{,}66\,\Omega$ și $\overline{Z}_i = j\,19{,}95\,\Omega$. Se găsește a) $\overline{I}_h = \overline{I}_d = \overline{I}_i = 0{,}556$ kA; $\overline{I}_1 = 1{,}668$ kA; $\overline{I}_2 = \overline{I}_3 = 0$. b) $\overline{I}_h = -0{,}521$ kA; $\overline{I}_d = 1{,}165$ kA; $\overline{I}_i = -0{,}644$ kA; $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -0{,}7815 - j\,1{,}568$ kA; $\overline{I}_3 = -0{,}7815 + j\,1{,}568$ kA. c) $\overline{I}_h = 0$; $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = 0{,}9$ kA; $\overline{I}_1 = 0$; $\overline{I}_2 = -\overline{I}_3 = -j\,1{,}56$ kA. d) $\overline{I}_h = \overline{I}_i = 0$; $I_d = 1{,}855$ kA; $\overline{I}_1 = 1{,}855$ kA; $\overline{I}_2 = a^2\overline{I}_1$; $\overline{I}_3 = a\overline{I}_1$.

Problema se poate continua cu aflarea distribuției curenților de scurtcircuit în rețea, pe toate fazele, precum și tensiunile în diversele puncte ale rețelei. Astfel, pentru cazul (b) curenții debitați de diverși alternatori sunt: *Alternatorul A*: $\overline{I}_1 =$,217 $+ j\,1{,}815$ kA; $\overline{I}_2 = -j\,3{,}63$ kA; $\overline{I}_3 = -1{,}217 + j\,1{,}815$ kA; *Alternatorul B*: $\overline{I}_1 = 0{,}353$ kA; $\overline{I}_2 = -1{,}244 - j\,3{,}15$ kA; $\overline{I}_3 = -1{,}244 + j\,3{,}15$ kA. *Alternatorul C*: $\overline{I}_1 = -0{,}21$ kA; $\overline{I}_2 = -2{,}52 - j\,4{,}66$ kA; $\overline{I}_3 = -2{,}52 + j\,4{,}6$ A.

12.25. (a) $\overline{I}_x = 3550$ A; $\overline{I}_y = \overline{I}_z = 0$; (b) $\overline{I}_x = 0$; $\overline{I}_y = 2400 - j\,2800$ A; $\overline{I}_z = -2400 - j\,2800$ A; (c) $\overline{I}_x = 0$; $\overline{I}_y = -I_z = -j\,2500$ A. $\overline{V}_x = j\,56340$ V; $\overline{V}_y = 40630 - j\,27300$ V; $\overline{V}_z = -38500 - j\,27300$ V.

12.26. (a) $\overline{I}_x = 3180$ A; $\overline{I}_y = \overline{I}_z = 0$; (b) $\overline{I}_x = 0$; $\overline{I}_y = -1509 - j\,2970$ A; $\overline{I}_z = -1509 + j\,2970$ A; (c) $\overline{I}_x = 0$; $\overline{I}_y = -j\,2950$ A; $\overline{I}_z = j\,2950$A.

12.27. Cuptorul poate fi echivalat cu un scurt circuit între două faze cu o impedanţă. Gradul de desimetrie este

$$\frac{|\overline{V}_i|}{|\overline{V}_d|} = \frac{|-\overline{Z}_i \overline{I}_i|}{|\overline{E} - \overline{Z}_d \overline{I}_d|}.$$

Punând S_3 puterea de scurt circuit, $\overline{S}_c$ puterea cuptorului, $\overline{Z}$ impedanţa cuptorului şi $\overline{U}$ tensiunea reţelei, se poate scrie

$$\overline{S}_3 = \frac{U^2}{\overline{Z}_d} \text{ şi } \overline{S}_c = \frac{U^2}{\overline{Z}} \therefore U^2 = \overline{S}_c \overline{Z} \therefore \overline{S}_3 = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z}_d} \overline{S}_c \therefore \overline{Z}_d = \overline{Z} \frac{\overline{S}_c}{\overline{S}_3}.$$

Luând $\overline{Z}_d \simeq \overline{Z}_i$ (ceiace corespunde realităţii) se obţine $\overline{I}_d = -\overline{I}_i = \dfrac{\overline{E}}{2\overline{Z}_d + \overline{Z}} =$

$= \dfrac{\overline{E}\,\overline{S}_3}{2\overline{S}_c \overline{Z} + \overline{S}_3 \overline{Z}}$. Inlocuind în expresia gradului de disimetrie se obţine

$$\frac{|\overline{V}_i|}{|\overline{V}_d|} = \frac{|\overline{S}_c|}{|\overline{S}_3| + |\overline{S}_c|} = \frac{2,5}{40 + 2,5} = 5,9\,\%.$$

12.28. Schema echivalentă este a unui scurtcircuit al unei faze la pământ cu arc (fig. 21). Se găseşte: $\overline{I}_d = \overline{I}_i = \overline{I}_h = \dfrac{\overline{E}}{\overline{Z}}$. Apoi $\overline{E}_d = \overline{E} - \overline{Z}_s \overline{I}_d = (\overline{Z}_0 + \overline{Z}_a + 3\overline{Z}_L)\dfrac{\overline{E}}{\overline{Z}}$; $\overline{E}_i = -\overline{Z}_a \dfrac{\overline{E}}{\overline{Z}}$; $\overline{E}_h = -\overline{Z}_0 \dfrac{\overline{E}}{\overline{Z}}$. Se calculează: $\overline{S}_h = 3\,\overline{E}_h \overline{I}_{hc}$ etc. şi făcând suma se găseşte relaţia din enunţ.

12.29. Sistemul este echivalent cu acela al unei sarcini nesimetrice, alimentată cu o sursă trifazată simetrică, dar de putere limitată. Se neglijează impedanţele conductorilor. Ecuaţiile sistemului sunt:

$$\overline{E}_d = (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_s)\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i \overline{I}_i$$
$$\overline{E}_i = \overline{\mathfrak{Z}}_d \overline{I}_d + (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z}_a)\,\overline{I}_i = 0$$

din care se calculează componentele simetrice ale curentului şi apoi curenţii pe fază. Pentru a găsi tensiunile la bornele alternatorului se scriu componentele simetrice ale tensiunii: $\overline{V}_d = \overline{E} - \overline{Z}_s \overline{I}_d$; $\overline{V}_i = -\overline{Z}_a \overline{I}_i$; $\overline{V}_h = -\overline{Z}_0 \overline{I}_h = 0$ şi, ţinând seama de relaţiile (68), se deduce: $\overline{U}_1 = \overline{U}_{23} = j\sqrt{3}\,(-\overline{V}_d + \overline{V}_i)$; $\overline{U}_2 = \overline{U}_{31} = ja\sqrt{3}\,(-a\overline{V}_d + \overline{V}_i)$; $\overline{U}_3 = \overline{U}_{12} = ja\sqrt{3}\,(-\overline{V}_d + a\overline{V}_i)$. Numeric se găseşte: $\overline{Z}_s = j\,2\,\Omega$; $\overline{Z}_a = j\,3\,\Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_h = 4 + j\,\Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_d = 1 + j\,2\,\Omega$; $\overline{\mathfrak{Z}}_i = 1\,\Omega$; $\overline{I}_d = 35 - j\,30,5$ A; $\overline{I}_i = -11,3 + j\,16,9$ A; $\overline{I}_1 = 23,7 - j\,13,6 = 27,3\,\underline{|-29^0 50'}$ A; $\overline{I}_2 = -52,9 - j\,33,4 = 62,56\,\underline{|218^0 20'}$ A; $\overline{I}_3 = 27,3 + j\,46,8 = 54,18\,\underline{|59^0\,0'}$ A; $\overline{U}_d = -121 - j\,276$ V; $\overline{U}_i = -58,8 + j\,88$ V; $\overline{U}_1 = -179,8 - j\,188 = 260\,\underline{|226^0 15'}$ V; $\overline{U}_2 = -225,3 + j\,147,9 = 270\,\underline{|146^0 25'}$ V; $\overline{U}_3 = 405,0 + j\,40,1 = 407\,\underline{|5^0 40'}$ V.

12.30. Problema este echivalentă cu un scurtcircuit al unei faze la pământ (fig. 21). Se găsește $\overline{I}_h = \overline{I}_d = -\overline{I}_i = j\,0{,}74$. Din $\overline{E}_d = \overline{E} - \Sigma\,\Delta\,\overline{E}_d$; etc. se găsește $\overline{E}_d = 0{,}26$; $\overline{E}_i = -0{,}222$; $\overline{E}_h = -0{,}037$. Pentru al doilea alternator se ia $\overline{E}'_d = 0{,}26 \underline{|-30^0}$. De aici $\overline{E}_b = \overline{E}_h + a^2\,\overline{E}'_d + a\,\overline{E}_i = -0{,}056 - j\,0{,}41693$; $\overline{E}'_b = \overline{E}_h + a^2\overline{E}'_d + a\,\overline{E}_i = -0{,}1509 - j\,0{,}32203$. Rezultă $\overline{E}_b - \overline{E}_{b'} = 0{,}0949 - j\,0{,}0949 = 0{,}133809 \underline{|-45^0}$. La fel $\overline{E}_c = -0{,}056 + j\,0{,}41693$; $\overline{E}_{c'} = 0{,}074 + j\,0{,}45203$ și $\overline{E}_c - \overline{E}_c' = -0{,}130 - j\,0{,}0351 = 0{,}1346 \underline{|195^0 10'}$.

12.31. Triunghiul format din forțele electromotoare E date în serie cu impedanțele respective se poate transfigura într'o stea la care razele sunt formate din forțe electromotoare egale cu $E/\sqrt{3}$ în serie cu impedanțele echivalente rezultând din transfigurare. Aceasta se poate arăta ușor scriind că diferențe de potențial la borne este aceiași atât în montajul triunghi cât și în acela stea. (A se demonstra). Tensiunile date sunt $\overline{E}_{AB} = 220 \underline{|0}$, $\overline{E}_{BC} = 220 \underline{|-120^\circ}$, $\overline{E}_{CA} = 220 \underline{|120^0}$, având componentele simetrice: $\overline{E}_d = 220 \underline{|0}$ și $\overline{E}_i = 0$. Componentele simetrice ale sistemului stea corespunzător sunt $\overline{E}'_d = 127 \underline{|-30^0}$ și $\overline{E}'_d = 0$. Impedanțele date pot fi scrise $\overline{Z}_{AB} = 1 \underline{|60^0}\ \Omega$, $\overline{Z}_{BC} = 0{,}2 \underline{|60^0}\ \Omega$, $\overline{Z}_{CA} = 1 \underline{|60^0}\ \Omega$. Prin transfigurare rezultă $\overline{Z}_A = 0{,}455 \underline{|60^0}\,\Omega$, $\overline{Z}_B = 0{,}091 \underline{|60^0}\ \Omega = \overline{Z}_C$. Se deduce $\overline{\mathfrak{Z}}_h = 0{,}212 \underline{|60^0}\ \Omega$, $\overline{\mathfrak{Z}}_d = \overline{\mathfrak{Z}}_i = 0{,}121 \underline{|60^0}\,\Omega$. Sarcina are impedanța $\overline{Z} = 2 \underline{|60^0}\ \Omega$. Ecuațiile circuitului sunt $\overline{E}'_d = (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z})\ \overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i$ și $0 = \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_a + (\overline{\mathfrak{Z}}_h + \overline{Z})\ \overline{I}_i$, de unde rezultă $\overline{I}_d = -j\,57{,}5$ A și $\overline{I}_i = j\,3{,}2$ A. Componentele simetrice ale tensiunii la borne sunt $\overline{V}_d = \overline{E}'_d - \overline{\mathfrak{Z}}_h\,\overline{I}_d + \overline{\mathfrak{Z}}_i\,\overline{I}_i) = 100{,}8 - j\,57{,}6$ V și $\overline{V}_i = -(\overline{\mathfrak{Z}}_h\,\overline{I}_i + \overline{\mathfrak{Z}}_d\,\overline{I}_d) = -5{,}5 + j\,3{,}2$ V. Se deduc componentele simetrice ale tensiunilor între faze la bornele transformatorului $\overline{U}_d = \overline{V}_d\,\sqrt{3}\ \underline{|30^0} = 200{,}8 - j\,0{,}9$ V și $\overline{U}_i = \overline{V}_i\sqrt{3}\ \underline{|-30^\circ} = -5{,}5 + j\,9{,}6$ V. Rezultă tensiunile căutate $\overline{U}_{AB} = 195{,}3 + j\,8{,}7$ V, $\overline{U}_{BC} = -106{,}7 - j\,183{,}0$ V, $\overline{U}_{CA} = -88{,}6 + j\,174{,}3$ V

12.32. (*a*) Sistemul de tensiuni dat corespunde sistemului în triunghi incomplet $\overline{E}_{AB} = 120 \underline{|180^0}$, $\overline{E}_{BC} = 120 \underline{|0}$; $\overline{E}_{CA} = 0$, având componentele simetrice $\overline{E}_d = -60 + j\,34{,}64$ V și $\overline{E}_i = -60 - j\,34{,}64$ V. Componentele pe fază sunt $\overline{E}'_d = -20 - j\,34{,}7$ V și $\overline{E}'_i = 20 - j\,34{,}7$ V. Se transfigurează sarcina găsindu-se $Z = 15\,\Omega$ pe fază, care cu rezistența liniei dă $R = 20\,\Omega$. Se găsește $\overline{\mathfrak{Z}}_h = 20\,\Omega$, $\overline{\mathfrak{Z}}_d = \overline{\mathfrak{Z}}_i = 0$. Aplicând relațiile (81) rezultă $\overline{I}_d = 2 \underline{|-120^0}$ A și $\overline{I}_i = 2 \underline{|-60^0}$ A; (*b*) $\overline{I}_A = j\,3{,}46$ A, $\overline{I}_B = 0$, $\overline{I}_C = -j\,3{,}46$ A.

(*c*) Se determină în prealabil componentele simetrice ale tensiunilor la borne pe fază din $\overline{V}_d = \overline{E}'_d - R_L\,\overline{I}_d$, etc., din care se deduc apoi componentele simetrice ale sistemului triunghi. Se obține $\overline{U}_{AB} = 52 \underline{|90^\circ}$ V, $\overline{U}_{BC} = 52 \underline{|90^0}$, $\overline{U}_{CA} = 104 \underline{|-90^0}$ V.

(*d*) $P = \mathfrak{R}\,(3\,\overline{V}_d\,\overline{I}^*_d + 3\,\overline{V}_i\,\overline{I}^*_i) = 360$ W.

12.33. (*a*) Luând ca origină de fază tensiunea $\overline{U}_{AB}$ şi ţinând seama de factorii de putere daţi, se găseşte $\overline{I}_{AB} = 70,7 - j\,70,7$ A, $\overline{I}_{BC} = -188 - j\,17,9$ A, $\overline{I}_{CA} = 117,3 + j\,88,6$ A. Componentele simetrice ale acestor curenţi sunt $\overline{I}_d = 66,1 - j\,123,5$ A şi $\overline{I}_i = 4,6 + j\,52,8$ A. Componentele simetrice ale curenţilor din linii sunt $\overline{I}'_d = -j\sqrt{3}\,\overline{I}_d = -212,7 - j\,114,4$ A şi $\overline{I}'_i = j\sqrt{3}\,\overline{I}_i = -91,4 + j\,8,0$ A.

(*b*) Combinând componentele simetrice se găseşte $\overline{I}_A = 36,6 + j\,159,3$ A, $\overline{I}_B = 258,7 - j\,52,8$ A, $\overline{I}_C = -304,1 - j\,106,4$ A.

Atenţiune la vectorul principal al sistemului liniar.

(*c*) $P_1 = \Re(\overline{U}_{AC}\,\overline{I}^*_A) = 26324$ W, $P_2 = \Re(\overline{U}_{BC}\,\overline{I}^*_B) = 18502$ W $P = P_1 + P_2 = 44826$ W.

12.34. Se consideră sistemul de tensiuni ca o stea incompletă. Componentele simetrice ale tensiunii sunt $\overline{E}_d = 13,7 + j\,63,5$ V şi $E_i = 13,7 - j\,63,5$ V.

Deasemenea sarcina este considerată ca o stea nesimetrică cu $Z_A = Z_C = 15,5$ şi $Z_B = 0,5\ \Omega$. Rezultă $\mathfrak{Z}_h = 10,5$, $\mathfrak{Z}_d = 2,5 - j\,4,33\ \Omega = \mathfrak{Z}^*_i$.

Scriind ecuaţiile sistemului rezultă $\overline{I}_d = -1,95 + j\,9,0$ A şi $\overline{I}_i = \overline{I}^*_d$. Puterea absorbită de instalaţie este

$$P_1 = 3\Re\left[\overline{E}_d \cdot \overline{I}^*_d + \overline{E}_i \cdot \overline{I}^*_i\right] = 3268,7 \text{ W.}$$

sau ţinând seama de precizia contorului $P_1 = 3,3$ kW. Energia consumată lunar este $W_1 = 660$ kWh. Costul alimentării cu electricitate a instalaţiei este 82,50 lei.

In al doilea caz, sistemul este simetric. Rezultă $P_2 = 6,1$ kW şi deci o utilizare de 110 ore. Costul alimentării cu electricitate în acest caz este 96,50 lei, adică un spor de 4,85 % în schimb timpul de utilizare s'a redus aproape la jumătate astfel că, în acelaş timp s'a dublat producţia, ceeace este un avantaj care compensează sporul de cheltuială.

PARTEA IV

13. *13*.1. Curentul tranzitoriu este $i = \frac{E}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Trebue să avem $i = \frac{999}{1000}\frac{E}{R}$ se deduce $t = \frac{L}{R}\ln 1000$. Numeric $t = 0,05$ s.

13.2. Ca mai sus. Se găseşte $t = 0,032$ s.

13.3. Se presupune întreaga capacitate concentrată la mijlocul cablului. Circuitul devine un condensator în serie cu o rezistenţă, alimentat de o forţă electromotoare alternativă. Rezistenţa este egală cu jumătate din rezistenţa cablului. Se aplică principiul suprapunerii efectelor, studiind încărcarea produsă de fiecare armonică. Pentru studiul curentului de încărcare se aplică relaţiile (86) şi (87). Se găseşte:

$$i_1 = I_1\cos(\omega t + \psi + \varphi_1) + I_3\cos(3\omega t + \psi + \varphi_3) + \frac{1}{RC\omega}\left[I_1\sin(\psi + \varphi_1) + \frac{1}{3}I_3\sin(\psi + \varphi_3)\right]\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} \text{ în care:}$$

$$I_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}} \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\omega CR}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I_3 = \frac{E_3}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{3\,C^2\,\omega^2}}} \qquad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{1}{3\,\omega\,CR}$$

Numeric se găsește, pentru maximum de curent, ce se produce pentru $\psi = 0$:

$$i = 197{,}5 \cos(\omega t + 76^0 06') + 22{,}4 \cos(3\omega t + 53^0 07') + 788{,}8\ \varepsilon^{-8850\,t}.$$

13.4. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește $I_{(0)max} = \frac{E}{R} \cos\psi = 14700$ A; $I_p = \frac{4{,}2}{\sqrt{2}} = 2{,}97$ A. $\frac{i_{(0)\,max}}{I_p} = 4940$. Constanta de timp a circuitului este $\tau = RC = 0{,}94 . 10^{-6}$ s, adică $\frac{50\ T . \tau}{T} = 47 . 10^{-6}$ dintr'o perioadă.

13.5. Inainte de variația inductanței $i = \frac{10}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - 45^0)$. Rezultă $i_0 = -5$ A. După variația inductanței $i_p = 5 \sin(\omega t - 60^0)$. Rezultă $i_{p0} = -4{,}34$ A. Deci curentul transitoriu $i = 5 \sin(\omega t - 60^0) - 0{,}66\ \varepsilon^{-181{,}5\,t}$ A. Variația curentului se stabilește ușor.

13.6. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește:

$i = 11{,}35 \cos(\omega t - 45^0) - 1{,}07\ \varepsilon^{-314\,t}$ A.

13.7. Se găsește:

$u = 2000 \sin(\omega t + 45^0) - 7.0\ \varepsilon^{-314\,t}$ V.

13.8. Linia fiind perfect simetrică și bine izolată, poate fi studiat ca un circuit monofazat pentru fiecare fază în parte. Circuitul va fi format din cele trei impedanțe în serie, care sunt închise pe sursa de curent alternativ. Se găsește $R = 42{,}1\ \Omega$ și $L = 0{,}416$ H. De unde, aplicându-se teoria cunoscută se găsește $i_{max} = 493$ A și $t = 4{,}55 \times 10^{-2}$ s.

13.9. Se utilizează relația (85) 1⁰. Se găsește $i = \frac{E}{Z_2} \sin(\omega t + \psi - \varphi_2) +$

$$+ E \left[\frac{\sin(\psi - \varphi_1)}{Z_1} - \frac{\sin(\psi - \varphi_2)}{Z_2} \right] \varepsilon^{-\frac{R_2}{L} t} = \frac{10}{\sqrt{5}} \sin(\omega t + \psi - 26^0 34') +$$

$$+ 10 \left[\frac{\sin(\psi - 45^0)}{\sqrt{2}} - \frac{\sin(\psi - 26^0 30')}{\sqrt{5}} \right] \times \varepsilon^{-630\,t}$$

2⁰ Tensiunea la bornele inductanței fiind $e_L = L \frac{di}{dt}$, rezultă că maximul acestei tensiuni va fi în același timp cu maximul curentului. Se calculează $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}$ și se găsește ecuația:

$$\sin \psi = \frac{Z_2}{Z_1} \cos \varphi_2 \sin(\psi - \varphi_1),$$

sau numeric

$$\sin \psi = \sqrt{2} \sin(\psi - 45^0),$$

de unde: $\psi = 90^0$. Rezultă:

$$u = -\frac{EL\omega}{Z_2} \sin(\omega t - \varphi_2) - ER_2 \left[\frac{\cos \varphi_1}{Z_1} - \frac{\cos \varphi_2}{Z_2} \right] \varepsilon^{-\frac{R_2}{L} t} =$$

$$-\frac{1000}{\sqrt{5}} \sin(\omega t - 26^0 30') - 600\ \varepsilon^{-630\,t}.$$

Maximul acestei valori se poate determina grafic. El este cu suficientă aproximaţie, pentru $t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varphi_2}{\omega} = \frac{7}{75}$ s. De unde $U = -\frac{1000}{\sqrt{5}}$ V deoarece termenul exponenţial este $2{,}9 \cdot 10^{-27}$, deci neglijabil. Curba se construeşte uşor.

*13.*10. Aplicându-se relaţia (85) se găseşte imediat:

$$i = \frac{E}{R} + \frac{E}{R}[\cos\varphi \sin(\psi - \varphi) - 1]\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t} \quad \text{în care } \operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}.$$

*13.*11. $i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{E}{R}[1 - \cos\varphi \sin(\psi - \varphi)] \times$ $\times\,\varepsilon^{-\frac{R}{L}t}$ în care $\operatorname{tg}\varphi = L\omega/R$.

*13.*12. Se aplică relaţia (85). Curentul debitat de sursă este:

$$i = E\,\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)}t}\right),$$

iar curenţii în cele două impedanţe:

$$i_1 = i\,\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_1}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)}t}\right)$$

$$i_2 = i\,\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{E}{R_2}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R_1 R_2}{L_1(R_1 + R_2)}t}\right).$$

*13.*13. Problema comportă două părţi distincte:

a) încărcarea condensatorului C_1, la închiderea întrerupătorului tensiunea trecând dela U_1 la U; *b*) descărcarea condensatorului C_2. Se aplică relaţiile (86), (87) şi (88). Se găseşte:

$$a)\quad q_1 = C_1 U\left(1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_1 C_1}}\right) = 0{,}15\,(1 - 0{,}2\,\varepsilon^{-4t})\ \text{C}.$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_1 C_1}} = 0{,}12\,\varepsilon^{-4t}\ \text{A}.$$

$$u_1 = U\left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_1 C_1}}\right] = 3000\,(1 - 0{,}2\,\varepsilon^{-4t})\ \text{V}.$$

$$b)\quad q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,U\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = 0{,}12\,\varepsilon^{-5t}\ \text{C}.$$

$$i_2 = -\frac{U}{R_2} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = -0{,}024\,\varepsilon^{-5t}\ \text{A}$$

$$u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\,U\,\varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = 600\,\varepsilon^{-5t}\ \text{V}.$$

13.14. *a*) Închizând întrerupătorul, fiecare condensator se va descărca pe rezistenţa respectivă cu care este şuntat. Aplicând relaţiile indicate în problema precedentă se găseşte:

$$i_{1} = -\frac{U}{R_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, \varepsilon^{-\frac{t}{R_1 C_1}} = -0{,}2\, \varepsilon^{-2t}\ \text{A}.$$

$$i_{2} = -\frac{U}{R_2} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, \varepsilon^{-\frac{t}{R_2 C_2}} = -\varepsilon^{-5t}\ \text{A}.$$

b) Curentul din rezistenţe se obţine adăugând curentului permanent curentul de descărcare al condensatorilor care este de acelaşi sens. Se găseşte:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}5\ \text{A}$$

şi deci:

$$i_{R_1} = 0{,}5 + 0{,}2\, \varepsilon^{-2t} = 0{,}5\,(1 + 0{,}4\, \varepsilon^{-2t})\ \text{A}.$$

$$i_{R_2} = 0{,}5\,(1 + 2\, \varepsilon^{-5t})\ \text{A}.$$

c) Curentul tranzitoriu debitat de pilă est :

$$i_p = 0{,}5\,(1 + 0{,}4\, \varepsilon^{-2t} + 2\, \varepsilon^{-5t})\ \text{A}$$

d) Se găseşte uşor:

$$u_1 = 2000\ (1 - \varepsilon^{-2t})\ \text{V}.$$

$$u_2 = 1000\,(1 - \varepsilon^{-5t})\ \text{V}$$

13.15. *La încărcare,* deoarece:

$$\Omega' = 3873,\quad \delta = 5000,\quad \text{tgh}\alpha' = 0{,}7746\ \therefore\ \alpha' = 1{,}032\ \text{rad.},$$

se aplică relaţia (90) şi se găseşte:

$$u_1 = 120 - 98{,}4\, \varepsilon^{-5000\,t}\, \text{sh}\,(3873\,t + 1{,}032)\ \text{V}.$$

Curba tensiunii libere are un maxim (negativ) pentru $t = 0$, ceeace se deduce prin anularea derivatei.

La descărcare:

$$\Omega' = j\,866,\quad \delta = 500,\quad \text{tg}\,\alpha = 1{,}732\ \therefore\ \alpha = 1{,}047\ \text{rad}.$$

se aplică relaţia (91) şi se găseşte:

$$u_2 = 138\, \varepsilon^{-500\,t}\ \sin\,(866\,t - 1{,}047)$$

Tensiunea se anulează pentru:

$$t = \frac{k}{866}\pi - \frac{1{,}047}{866}$$

şi are maximele la:

$$t = \frac{k\pi}{866}$$

Curba se reprezintă uşor.

13.16. *La încărcare:*

$$\Omega' = j\,866,\quad \delta = 500,\quad \text{tg}\alpha = \sqrt{3}\ \therefore\ \alpha = 60^\circ = 1{,}047\ \text{rad.}$$

Scanned with OKEN Scanner

se aplică relația (91) și se găsește :

$$u_1 = 120 - 138\,\varepsilon^{-500t} \sin(866\,t + 1{,}047)\ \mathrm{V}.$$

Zerourile și maximele tensiunii libere au loc la aceleași timpuri ca în cazul problemei precedente. Tensiunea la bornele condensatorului va porni dela valoarea zero și va oscila în jurul tensiunii de 120 V până la stabilirea regimului permanent. Maximul tensiunii este la timpul $\frac{\pi}{866}$ și are valoarea 139,8 V, adică o supratensiune de 17%. Se poate calcula după câte oscilații tensiunea la bornele condensatorului nu diferă decât cu 10^{-3} din tensiunea la bornele bateriei. Se găsesc patru oscilații.

La descărcare :

$$\Omega' = 49900,\ \delta = 50\,000,\ \mathrm{tg\,h}\,\alpha' = 0{,}998\ \therefore\ \alpha' = 3{,}5\ \mathrm{rad}.$$

se aplică relația (90) și se găsește :

$$u_2 = 7{,}61\,\varepsilon^{-50000t}\,\mathrm{sh}(49900\,t + 3{,}5)\mathrm{V}.$$

Curba tensiunii are un maxim foarte apropiat de zero.

Curba variației tensiunii la bornele condensatorului se construește ușor.

13.17. Se determină curentul de încărcare al condensatorului cu ajutorul relației (87). Deasemenea la descărcare. Se calculează energia disipată în rezistență la încărcare și energia disipată în rezistența respectivă la descărcare. Găsindu-se aceeași valoare $\frac{1}{2}CE^2$. Se deduce că randamentul este de 50%. Randamentul nu poate fi mărit.

13.18. Se aplică relațiile (87) și (88) și se găsește :

$$i_2 = i_3 = \frac{1}{R_2 + R_3} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 \varepsilon^{-\frac{t}{(R_2+R_3)C}} \quad \text{și}$$

$$u = U_2 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 \varepsilon^{-\frac{t}{(R_2+R_3)C}}$$

Numeric se găsește $i_2 = i_3 = 0{,}05\,\varepsilon^{-t}$ A ; $u = 5500 - 1000\,\varepsilon^{-t}$ V ; $i'_2 = 0{,}075\,\varepsilon^{-t}$ A

13.19. Se deduce tensiunea u_g la bornele rezistenței de 1 MΩ, pornind dela relația (88). Se găsește astfel pentru primul interval $i_a = kU_g\,\varepsilon^{-\frac{t}{RC}} = k\,.\,10\,\varepsilon^{-10t}$. Pentru al doilea interval, q_0 corespunde la timpul $t = 0{,}05$ s. Se găsește $i' = -kU_g\,\varepsilon^{\frac{t_1-t}{RC}}$ și deci curentul total este $i_a = kU_g\left(1 - \varepsilon^{\frac{t_1}{RC}}\right)\varepsilon^{-\frac{t}{RC}}$. Numeric $i_a = k\,10\,(1 - \sqrt{\varepsilon})\,\varepsilon^{-10t} = -k\,6{,}49\,\varepsilon^{-10t}$ mA. In cazul micșorării intervalului se găsește : $i_a = k.10\,\varepsilon^{-10t}$ mA și $i_a = -k\,0{,}51\,\varepsilon^{-10t}$ mA.

13.20. Se pornește dela relația (85) și se ține seama că valoarea curentului dintr'o perioadă este valoarea i_0 pentru perioada următoare la timpul $t = t_n$ Se găsește :

pentru $0 \leqslant t \leqslant t_1$ $\quad i = 5\,(1 - \varepsilon^{-10^3 t})$ A

pentru $t_1 \leqslant t \leqslant 2t_1$ $\quad i = 5\,[-\varepsilon^{-10^3 t} + \varepsilon^{-10^3 (t - t_1)}]$ A

pentru $2t_1 \leqslant t \leqslant 3t_1$ $\quad i = 5\,[1 - \varepsilon^{-10^3 t} + \varepsilon^{-10^3 (t - t_1)} - \varepsilon^{-10^3 (t - 2t_1)}]$ A

pentru $3t_1 \leqslant t \leqslant 4t_1$ $\quad i = 5\,[-\varepsilon^{-10^3 t} + \varepsilon^{-10^3 (t - t_1)} -$

$- \varepsilon^{-10^3 (t - 2t_1)} + \varepsilon^{-10^3 (t - 3t_1)}]$ A. etc.

13.21. Se procedează ca şi în cazul precedent, găsindu-se:

pentru $0 \leqslant t \leqslant t_1$,

$$i = 4\left(1 - \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 t}\right) \text{ A};$$

pentru $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2$,

$$i = 4\left[-\varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 t} + \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1)}\right] \text{ A};$$

pentru $t_1 + t_2 \leqslant t \leqslant t_1 + t_2 + t_3 = T$,

$$i = 4\left[1 - \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 t} + \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1)} - \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1 - t_2)}\right] \text{ A};$$

pentru $T \leqslant t \leqslant T + t_2$

$$i = 4\left[-\varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 t} + \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1)} - \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1 - t_2)} + \varepsilon^{-\frac{1}{3}10^3 (t - t_1 - t_2 - t_3)}\right] \text{ A}.$$

13.22. Se procedează ca şi în cazul problemei 13.19. Problema se poate rezolva prin suprapunerea efectelor, curba impuls fiind presupusă ca rezultanta a două curbe de salt U_1, decalate cu t_1 şi cu amplitudinea de sens contrar. Se aplică relaţia (85) şi se scrie tensiunea la bornele inductanţei L_1. Se găseşte, pentru intervalul $0 < t < t_1$, $i_a = kU_1\,\varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t} = k\;10\,\varepsilon^{-20t}$ mA; pentru intervalul $t > t_1$, $i_a = -kU_1\left(\varepsilon^{\frac{R_1}{L_1}t} - 1\right)\varepsilon^{-\frac{R_1}{L_1}t_1} = -k63{,}89\varepsilon^{-20t}$ mA. Dacă $t_1 = 0{,}01$ s, se găseşte $i_a = kU_1\varepsilon^{-20t}$ şi $i_a = -k\,2{,}214\,\varepsilon^{-20t}$ mA.

13.23. Se procedează ca în cazul precedent şi se găseşte: *a)* $T = 0{,}2$ s, pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}1$ s, $u_g = -3{,}38\cos(31{,}4\,t - 57^030') + 1{,}82\,\varepsilon^{-20t}$ mV; pentru $0{,}1 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = 15{,}2\,\varepsilon^{-20t}$ mV. *b)* $T = 0{,}02$ s pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}1$ s, $u_g = -4\cos(314\,t - 86^020') + 0{,}255\,\varepsilon^{-20t}$ mV; pentru $0{,}1 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = 0{,}566\,\varepsilon^{-20t}$ mV.

13.24. *a)* $T = 0{,}2$ s, pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}05$ s, $u_g = 3{,}38\sin(31{,}4\,t - 57^030') - 1{,}55\,\varepsilon^{-20t}$ mV; pentru $0{,}05 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = 3{,}795\,\varepsilon^{-20t}$ mV. *b)* $T = 0{,}02$ s, pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}005$ s, $u_g = 4\sin(314\,t - 86^028') - 0{,}0163\,\varepsilon^{-20t}$ mV; pentru $0{,}005 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = 0{,}2657\,\varepsilon^{-20t}$ mV.

13.25. *a)* $t_1 = 0{,}1$ s; pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}1$ s, $u_g = 2(\varepsilon^{-20t} - 1)$ mV; pentru $0{,}1 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = -12{,}74\,\varepsilon^{-20t}$ mV. *b)* $t_1 = 0{,}01$ s; pentru $0 \leqslant t \leqslant 0{,}01$ s $u_g = 20(\varepsilon^{-20t} - 1)$ mV; pentru $0{,}01 \leqslant t \leqslant \infty$, $u_g = -4{,}4\,\varepsilon^{-20t}$ mV.

Scanned with OKEN Scanner

13.26. In relaţia (86) se pune condiţia ca $(q_0 - q_{po}) = 0$ sau $q_{po} = 0$ deoarece $q_0 = 0$; de unde rezultă $\psi = 90^0 - \varphi$, care este condiţia cerută. Diagrama se

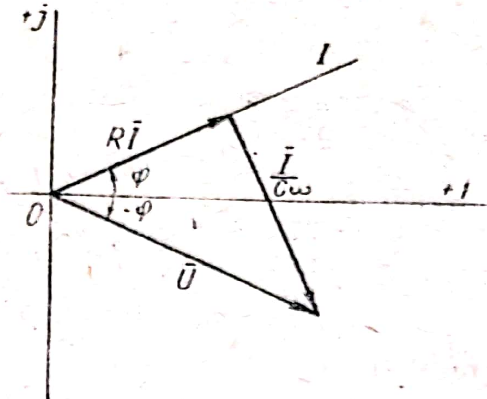


Fig. 13.26

construeşte ţinând seama de convenţia făcută (V. § 3.1) şi se obţine fig. 13.26. Când tensiunea este dată sub a doua formă, atunci:

$$\psi = -\varphi \text{ şi diagrama este aceeaşi } \left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{RC\omega} \right).$$

13.27. In relaţia (85) se face $i_p = 0$ şi se găseşte $\psi = \varphi$, în primul caz, şi $\psi = 90^0 + \varphi$, în al doilea caz $\left(\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R} \right)$. Diagrama este dată în fig. 13.27, pentru ambele cazuri.

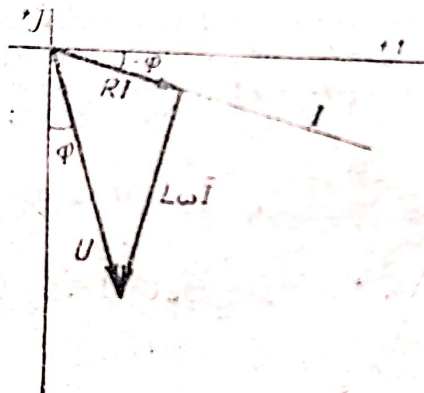


Fig. 13.27

13.28. *a*) Se aplică relaţia (85). Condiţiile impuse corespund lui $\psi = 105^0$. Se găseşte uşor $i = 10 \sin (\omega t + 105^0) - 19{,}66 . \varepsilon^{-3{,}18.10^{-3}t}$ A. *b*) Se pune condiţia $i_0 - i_{p0} = 0$. Rezultă $\psi = 45^0$.

13.29. Se găseşte uşor cu ajutorul relaţiei (85): $i_1 = 15 \sin (\omega t + 37^0) + 6 \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$; $i_2 = 15 \sin (\omega t + 37^0) - 9 \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$; $i_3 = 30 \sin (\omega t + 37^0) - 3 \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}$; $\tau = 4{,}25$ ms.

13.30. Legile lui Kirchhoff dau: $i_1 = i_2 + i_3$; $u = u_c + Ri_2$; $Ri_2 = L \frac{di_3}{dt}$. Rezolvând acest sistem şi punând condiţiile că la $t = 0$, $i_3 = 0$, $u_c = 0$, se găseşte $i_1 = \frac{-U}{p_1 - p_2} \left[\left(\frac{1}{L} + \frac{p_1}{r} \right) \varepsilon^{p_1 t} - \left(\frac{1}{L} + \frac{p_2}{r} \right) \varepsilon^{p_2 t} \right]$.

$$i_2 = \frac{U}{R\,(p_1 - p_2)}\,(p_1\,\varepsilon^{p_1 t} - p_2\,\varepsilon^{p_2 t})$$

$$i_3 = \frac{U}{L\,(p_1 - p_2)}\,(\varepsilon^{p_1 t} - \varepsilon^{p_2 t})$$

$$u_C = U - \frac{U}{(p_1 - p_2)}\,(p_1\,\varepsilon^{p_1 t} - p_2\varepsilon^{p_2 t})$$

în care p_1 și p_2 sunt rădăcinile ecuației caracteristice ale ecuației diferențiale în i_3. Numeric se găsește $i_1 = 2.10^{-2}\cdot 98\ \varepsilon^{-9900\,t} = 1{,}96\ \varepsilon^{-9900\,t}$ A; $i_2 = 2.10^{-2}$ $(-\ \varepsilon^{-100\,t} + 99\ \varepsilon^{-9900\,t})$ A; $i_3 = 2.10^{-2}\ (\varepsilon^{-100\,t} - \varepsilon^{-9900\,t})$ A; $u_c = 186 - 2$ $(-\ \varepsilon^{-100\,t} + 99\,\varepsilon^{-9900\,t})$ V.

13.31. Procedând ca mai sus se găsește:

$$u_c = U + \frac{U}{p_1 - p_2}\,(p_2\,\varepsilon^{p_1 t} - p_1\,\varepsilon^{p_2 t})$$

în care:

$$p_1, p_2 = -\frac{1}{2\,RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,R^2C^2} - \frac{1}{L\,C}}\ ;$$

găsirea curenților și calculul numeric nu prezintă nici o dificultate.

13.32. p_1 și p_2 având aceleași valori ca în problema 13.31, se găsește:

$$i_2 = \frac{U}{R}\left(1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2}\,\varepsilon^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1}\,\varepsilon^{p_2 t}\right);$$

$$i_1 = \frac{U}{R}\left(\frac{p_1}{p_1 - p_2}\,\varepsilon^{p_1 t} + \frac{p_2}{p_2 - p_2}\,\varepsilon^{p_2 t}\right)$$

și $i_1 = i_2 + i_3$. Mai departe calculul nu prezintă nici o dificultate.

13.33. Se aplică relația (85) la închiderea circuitului pe baterie, releul nefiind scurt-circuitat, Se găsește $I_1 = 0{,}25\ (1 - \varepsilon^{-55{,}6t})$. La scurtcircuitarea releului, curentul este $i_2 = 0{,}25\ \varepsilon^{-116{,}5\ t}$. Se calculează timpul până când $i_1 = 0{,}15$ A, găsindu-se $t_1 = 0{,}0163$ s. Se calculează timpul până când $i_2 = 0{,}05$ A găsindu-se $t_2 = 0{,}0138$ s. Dacă conectarea se produce în momentul când $i_1 = 0{,}15$ A și lama a fost atrasă, atunci $t_2' = \dfrac{\ln 3}{116{,}5} = 0{,}00944$ s. Cum $t_1 > t_2'$ rezultă că timpul între două comutări este $2\ t_1 = 0{,}0326$ s astfel că pe secundă se for face 30,7 comutări.

13.34. Curentul care se stabilește în circuit este $i = \dfrac{E}{R}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}\right)$, iar energia ce se acumulează în cânpul magnetic este dată de $dW = L i di$. Din expresia curentului se calculează di, apoi se integrează în timp dela 0 la ∞. Se găsește $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{E^2}{R^2}\,L$. In momentul inițial $W = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

13.35. Se scrie curentul permanent în circuit înainte de shuntarea rezistenței inductive Nr. 2. Aceasta constitue valoarea momentului inițial la timpul $t = 0$ a regimului tranzitoriu. Punând condiția ca acest curent să fie maxim, se determină defazajul ψ. După shuntare, apar regimuri tranzitorii în cele două rezistențe. Curentul din shunt este $i_3 = i_1 - i_2$. La sfârșitul regimului tranzitoriu trebue să rămână în circuit curentul permanent din bobina 1. Calculul nu prezintă nicio dificultate.

13.36. Problema este analoagă cu precedenta. Se găsește $i = 9{,}21$ A.

13.37. Problema corespunde descărcării unui condensator (C) pe o rezistență (R_0). Se găsește $t = 207$ s și Q $= 0{,}1$ Cal.

13.38. Când întrerupătorul este închis, prin circuitul $U\ R_1\ R_2\ R_3\ K$ circulă curentul $I_0 = \dfrac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$. Curentul prin condensator, bobină și rezistența R este egal cu zero. Tensiunea la bornele condensatoarelor C_1 și C_2 este respectiv:

$$U_{c10} = U - R_1 i_0 = (R_2 + R_3)\ i_0\,;\quad U_{c20} = U - (R_1 + R_2)\ i_0 = R_3\ i_0$$

(ca verificare, polaritățile celor doi condensatori fiind ca în figură $U_{c10} - U_{c20} = R_2 i_0$).

După deschiderea întrerupătorului K se produce regimul tranzitoriu, însă în primul moment tensiunile condensatorilor sunt respectiv U_{c10} și U_{c20}.

Ecuațiile integro-diferențiale ale procesului tranzitoriu care se produce după deschiderea întrerupătorului sunt, pentru fiecare din cele 3 circuite independente:

$$R_2\, i_1 + (S_1 + S_2)\int i_1 \mathrm{d}t - S_1 \int i_3 \mathrm{d}t = 0 \qquad \left(S_1 = \frac{1}{C_1},\ S_2 = \frac{1}{C_2}\right)$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_4\, i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$-\,S_1 \int i_1 \mathrm{d}t - R_4 i_2 + (R_1 + R_4)\ i_3 + S_1 \int i_3 \mathrm{d}t = U.$$

Intrucât

$$S_1 \int (i_1 - i_3)\ \mathrm{d}t = S_1 \int_0^t (i_1 - i_3)\ \mathrm{d}t - U_{c10}$$

și

$$S_2 \int i_2\ \mathrm{d}t = S_2 \int_0^t i_2\ \mathrm{d}t + U_{c20}.$$

ecuațiile integrodiferențiale devin:

$$R_2\, i_1 + (S_1 + S_2)\int_0^t i_1\ \mathrm{d}t - S_1 \int_0^t i_3\ \mathrm{d}t = U_{c10} - U_{c20} = R_2 i_0$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_4 i_2 - R_4\ i_3 = 0$$

$$-\,S_1 \int_0^t i_1\ \mathrm{d}t - R_4\ i_2 + (R_1 + R_4)\ i_3 + S_1 \int_0^t i_3\ \mathrm{d}t = U - U_{c10} = R_1\ i_0$$

In momentul inițial (pentru $t = 0$)

$$R_2 i_{10} = R_2 i_0\,;\ L\left(\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right)_0 + R_4 i_{20} - R_4 i_{30} = 0\,;\ -\,R_4 i_{20} + (R_1 + R_4) i_{30} = R_1 i_0$$

Intrucât $i_{20} = i_{10} = 0$ avem $i_{10} = i_0$; $i_{20} = 0$; $i_{30} = \frac{R_1}{R_1 + R_4} i_0$;

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 = \left(\frac{di_1}{dt}\right)_0 = \frac{R_4}{L}(i_{30} - i_{20}) = \frac{R_1 R_4}{L(R_1 + R_4)} i_0$$

Tensiunea între contactele intrerupătorului

$$U_R(t) = U_{c2} + L\frac{di_2}{dt} = U - R_1 i_3 - R_2 i_1$$

iar pentru momentul inițial:

$$U_R(0) = U_{c0} + L\left(\frac{di_2}{dt}\right)_0 = R_3 i_0 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} i_0 = \frac{R_1 R_4 + R_4 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_4} i_0$$

13.39. Inainte de închiderea întrerupătorului $i_0 = i_3 = \frac{U}{R_2 + R_3 + R_4}$

$$U_{s10} = i_0(R_2 + R_3)\frac{S_1}{S_1 + S_2}; \quad U_{s20} = i_0(R_2 + R_3)\frac{S_2}{S_1 + S_2}$$

în care $S_1 = \frac{1}{C_1}$ și $S_2 = \frac{1}{C_2}$.

După închiderea intrerupătorului, ecuațiile integro-diferențiale

$$R_2 i_2 = S_1 \int_0^t (i_4 - i_2)\, dt + U_{s10};$$

$$L\frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 = S_2 \int_0^t (i_4 - i_3)\, dt + U_{020} + R_1(i_a - i_3)$$

$$L\frac{di_3}{dt} + R_3 i_3 + R_2 i_2 + R_4 i_4 = U.$$

Pentru momentul inițial $i_{20} = i_0 \frac{(R_2 + R_3)S_1}{R_2(S_1 + S_2)}$; $i_{40} = i_0$; $i_{10} = i_{40} - i_{30} = 0$;

$$\left(\frac{di_3}{dt_0}\right) = i_0 \frac{R_2 S_2 - R_3 S_1}{L(S_1 + S_2)}; \quad \left(\frac{dU_{s2}}{dt}\right)_0 = S_2 i_{10} = 0.$$

13.40. Dacă tensiunea între electrozii eclatorului G crește încet, curenții care trec prin ramurile schemei în acest timp pot fi neglijați. La $t = 0$, când ten-

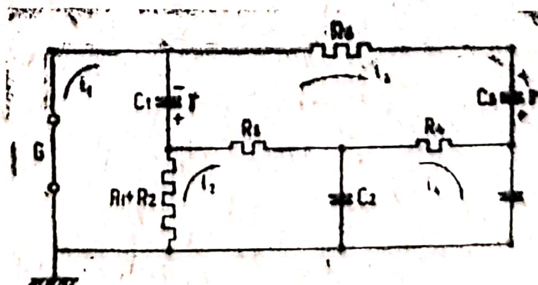


Fig. 13.40.

siunea între electrozi a atins valoarea γ volți, aceiași tensiune apare și între armăturile condensatoarelor C_1 și C_3, legate în paralel cu eclatorul. Tensiunea între

armăturile condensatoarelor C_2 și C_4 care sunt legate în paralel cu ramura $R_1 + R_2$, care este parcursă de un curent neglijabil, poate fi considerată în acest moment egală cu zero. In momentul în care se produce descărcarea, impedanţa ramurei eclatorului devine practic egală cu zero. Partea schemei, așezată la dreapta eclatorului, poate fi reprezentată ca în figura 13.40. Ecuaţiile integrodiferenţiale pot fi stabilite prin metoda circuitelor independente.

$$(R_1 + R_2) i_1 + S_1 \int_0^t i_1 dt - (R_1 + R_2) i_2 - S_1 \int_0^3 i_3 \, dt = - U_{c1} (0) = \gamma$$

$$- (R_1 + R_2) i_1 + (R_1 + R_2 + R_3) i_2 + S_2 \int_0^t i_2 \, dt - R_3 i_3 - S_2 \int_0^t i_4 dt = U_{C2} (0) = 0$$

$$- S_1 \int_0^t i_1 \, dt - R_3 i_2 + (R_3 + R_4 + R_4) i_3 + (S_1 + S_3) \int_0^t i_3 \, dt - R_4 i_4 =$$
$$= U_{c1} (0) - U_{c3} (0) = \gamma - \gamma = 0$$

$$- S_2 \int_0^t i_2 \, dt - R_4 i_3 + Ri + R_4 i_4 + (S_2 + S_4) \int_0^t i_4 \, dt = U_{c2} (0) + U_{c4} (0) = 0$$

în care $S_k = \dfrac{1}{C_k}$.

Pentru determinarea valorilor iniţiale ale curenţilor independenţi se face $t = 0$ în ecuaţiile de mai sus. Se obţine sistemul :

$$\begin{aligned} &(R_1 + R_2) (i_1 - i_2) = \gamma \\ &(R_1 + R_2 (i_2 - i_1) + R_3 (i_2 - i_3) = 0 \\ &R_3 (i_3 - i_2) + R_4 (i_3 - i_4) + R_6 \, i_3 = 0 \\ &R_4 (i_4 - i_3) = 0 \end{aligned}$$

Rezolvând aceste ecuaţii, se obţine

$$i_1 (0) = \frac{\gamma}{R_1 + R_2} + \frac{\gamma}{R_3} + \frac{\gamma}{R_6}; \; i_2 (0) = \frac{\gamma}{R_3} + \frac{\gamma}{R_6}; \; i_3(0) = \frac{\gamma}{R_6}; \; i_4 (0) = \frac{\gamma}{R_6}.$$

13.41. (*a*) Aplicând relaţiile (91) se obţine

$$i = \frac{E}{Z} \left\{ \cos (\omega t + \psi - \varphi) + \frac{\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L} \left[\sqrt{\frac{L}{C}} \cos (\psi - \varphi) \sin (\Omega t - \alpha) + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\sin (\psi - \varphi)}{C\omega} \sin \Omega t \right] \right\}$$

și relaţia analoagă pentru tensiunea la bornele condensatorului.

Se vede din aceste relaţii că nu poate exista un unghi care să anuleze simultan ambele funcţii cos $(\psi - \varphi)$ și sin $(\psi - \varphi)$.

(*b*) Aceiași concluzie ca și în cazul precedent.

13.42. Problema se rezolvă aplicând relaţiile (91). Un caz particular interesant este acela pentru care $R \ll \omega L$ *).

---

*) Vezi I. S Antoniu, Chestiuni speciale de Electrotehnică, București 1952, pag. 421.

13.43. (*a*) Ecuaţiile diferenţiale ale circuitului se obţin folosind metoda circuitelor independente. Se găseşte sistemul

$$15\,i - 10\,i_1 + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$-10\,i + 30\,i_2 = 110$$

care rezolvat dă curenţii din cele trei ramuri ale circuitului $i = 3{,}14\,(1 - \varepsilon^{-9{,}72\,t})$, $i_2 = 4{,}65 - 1{,}05\,\varepsilon^{-9{,}72\,t}$, $i_R = i_1 - i = 1{,}51 + 2{,}09\,\varepsilon^{-9{,}72\,t}$.

(*b*) Se scrie ecuaţia diferenţială numai pentru bucla circuitului. Se găseşte $i = 3{,}14\,\varepsilon^{-12{,}5\,t}$.

13.44. (*a*) Se aplică metoda circuitelor independente, găsindu-se expresia curentului i_2 din inductanţă. (*b*) Se aplică aceiaşi metodă la trei bucle: una cuprinzând sursa, a doua cuprinzând rezistenţa inductivă şi a treia cuprinzând capacitatea. Se aleg aceste circuite astfel ca curentul din inductanţă să apară direct şi nu ca o combinaţie de doi curenţi.

Notă. Problema se rezolvă mai uşor cu ajutorul calculului operaţional.

13.45. Se ia ca necunoscută tensiunea la bornele ultimului condensator, în serie cu rezistenţa. Se obţine ecuaţia diferenţială

$$1.10^{-12}\,\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}t^3} + 6.10^{-8}\,\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 6.10^{-4}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 100\sqrt{2}\cos\omega t.$$

Pe de altă parte $i_s = \frac{1}{2}\,i_c = C\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Integrând ecuaţia diferenţială de mai sus şi punând condiţia că la $t = 0$ toţi curenţii sunt nuli, se găseşte:

$$i_s = -58{,}9\,\varepsilon^{p_1 t} + 4{,}0\,\varepsilon^{p_2 t} + 19{,}5\,\varepsilon^{p_3 t} + 50\cos(\omega t - 45^\circ)\ \mathrm{mA}$$

în care $p_1 = -10^4$ şi $p_{2,3} = 10^4\,\frac{-5t \pm \sqrt{21}}{2}$.

Notă. Problema se rezolvă mai uşor cu ajutorul calculului operaţional.

14. *14.1.* Pierderea într'un condensator este echivalentă cu o rezistenţă legată la bornele acestuia şi a cărei valoare este dată de relaţia:

$$\operatorname{tg}\delta = RC\omega.$$

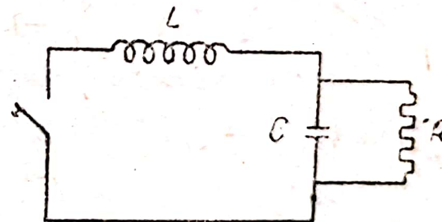


Fig. 14.1

Schema echivalentă a circuitului este dată de fig. 14.1. Se aplică metoda cantităţilor complexe. Impedanţa generalizată este:

$$\overline{Z} = \overline{p}L + \frac{R}{\overline{p}C}\cdot\frac{1}{R + \frac{1}{\overline{p}C}}$$

care egalată cu zero dă:

$$\overline{p}^2RC + \overline{p}L + R = 0,$$

de unde rezultă δ şi Ω. Se găseşte $R = 1250\,\Omega$; $\delta = 400$; $\Omega = 300$ şi deci:

$$i = I\,\varepsilon^{-400\,t}\cos(300\,t + \psi).$$

14. 2. a) *Fruntea undei.* Se aplică relaţia (86) deducându-se elementele din datele problemei. Dacă se ia $e = E \cos(\omega t + \psi)$ se găseşte tensiunea l. bornele condensatorului

$$u = \frac{E}{C\omega Z_1}\left[\sin(\omega t + \psi + \varphi_1) - \sin(\psi + \varphi_1)\,\varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}\right].$$

Cum efectul de supratensiune este maxim când u_p este maxim la $t = 0$, se găseşte $u_{pe\,max}$ pentru $\psi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ şi se găseşte

$$u = -\frac{E}{C\omega Z_1}\left(\cos \omega t + \varepsilon^{-\frac{1}{RC}t}\right)$$

în care $\overline{Z}_1 = R - j\frac{1}{C\omega}$. Valoarea maximă rezultă făcând în relaţia obţinută $t = T_f$.

Numeric se găseşte:

$$|U_s| \cong 1000 \text{ kV}$$

b) *Coada undei.* Având deaface cu un regim liber, se aplică calculul cu cantităţi complexe. Impedanţa complexă generalizată este:

$$\overline{Z} = L\overline{p}^2 + \overline{p}\rho + \frac{1}{C}$$

De unde rezultă:

$$(\delta^2 - \Omega^2)L - \rho\delta + \frac{1}{C} = 0$$

$$-2\delta\Omega L + \rho\Omega = 0.$$

Pentru ca să nu fie oscilantă coada undei trebue ca $\Omega = 0$. Rezultă:

$$LC\,\delta^2 - \rho C\delta + 1 = 0$$

rezultă:

$$\rho = L\delta + \frac{1}{C\delta}.$$

Pentru determinarea lui δ se porneşte dela:

$$u_1' = U_s\,\varepsilon^{-\delta t}$$

în care $u' = \frac{1}{2}U_s$ la $t = T_c$. Se găseşte:

$$\delta = \frac{\ln 2}{T_c}$$

şi deci :

$$\rho = L\frac{\ln 2}{T_e} + \frac{T_e}{C\ln 2}$$

Numeric $\delta = 13863$ şi $\rho = 2110{,}3\ \Omega$.

14.3. Se calculează în prealabil elementele caracteristice ale transformatorului. Din proba de scurtcircuit, se deduce $(R_1 + k^2R_2)\ I_1^2 = P_k$, de unde $R_1 = 238\ \Omega$ şi $R_2 = 24{,}1\ \Omega$ în ipoteza obişnuită $R_1 \cong k^2R_2$. Din relaţia $U_k = (X_1 + k^2X_2)\ I_1$, se deduce $L_1 = 3{,}29$ H şi $L_2 = 0{,}33$ H, în aceeaşi ipoteză $X_1 \cong k^2X_2$. Din relaţia $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$, luând $\sigma = \varepsilon_k = 0{,}17$ rezultă $M = 0{,}95$ H.

Ecuaţiile regimului liber al transformatorului (scrise în cantităţi complexe) fiind :

$$R_1 \overline{I}_1 + \overline{p}L_1\overline{I}_1 + \overline{p}\,M\,\overline{I}_2 = 0$$

$$R_2 \overline{I}_2 + \overline{p}L_2\overline{I}_2 + \overline{p}\,M\,\overline{I}_1 = 0$$

eliminând pe $\overline{I}_2$ şi înlocuind cu datele numerice se obţine ecuaţia :

$$\overline{p}^2 + 855\,\overline{p} + 31048 = 0$$

având rădăcinile $p' = -36$ şi $p'' = -814$.

Curenţii tranzitorii în transformator sunt *) :

$$i_1 = i_{p_1} + I_1'\ \varepsilon^{p't} + I_1''\ \varepsilon^{p''t}$$

$$i_2 = i_{p_2} + m'\ I_1'\ \varepsilon^{p't} + m''\ I_1''\ \varepsilon^{p''t}$$

în care :

$$m' = -\frac{R_1 + p'L}{p'M}, \quad m'' = -\frac{R_1 + p''L_1}{p''M}$$

$$I_1' = \frac{1}{m'' - m'}\left[m''\,(i_{10} - i_{p10}) - (i_{20} - i_{p20})\right]$$

$$I_1'' = \frac{1}{m' - m''}\left[m'\,(i_{10} - i_{p10}) - (i_{20} - i_{p20})\right].$$

Se face ipoteza, verificată în practică, că transformatorul nu modifică factorul de putere. In acest caz :

$$i_{10} = 5{,}25\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^0 30')$$

$$i_{20} = 23{,}2\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^0 30')$$

$$i_{p1} = 2{,}63\sqrt{2}\sin(\omega t - 36^0 50')$$

$$i_{p2} = 11{,}6\sqrt{2}\sin(\omega t - 36^0 50')$$

*) Vezi Ion S. Antoniu, Chestiuni speciale de Electrotehnică, Bucureşti 1952, pag. 452.

şi rezultă :

$$i_{10} = -5{,}3 \text{ A} \qquad i_{20} = -16{,}7 \text{ A}$$

$$i_{p10} = -2{,}24 \text{ A} \qquad i_{p20} = -6{,}95 \text{ A}$$

de unde, făcând toate calculele, se găseşte :

$$i_1 = 2{,}63\sqrt{2}\sin(\omega t - 36^0 50') - 2{,}8\,\varepsilon^{-36\,t} - 0{,}272\,\varepsilon^{-814\,t}.$$

$$i_2 = 11{,}6\sqrt{2}\sin(\omega t - 36^0 50') - 9{,}75\,\varepsilon^{-36\,t} - 0{,}0008\,\varepsilon^{-814\,t}.$$

14.4. Se folosesc cantităţile complexe. Se găseşte $\delta = 0$ şi $\Omega^2 = \dfrac{L_1+L_2}{L_1 L_2 C}$.

Se pune condiţia ca, la $t = 0$, $\dfrac{Q}{C} = \left(L_1 \dfrac{di_1}{dt}\right)_{t\,=\,0}$.

Se găseşte $i = \dfrac{Q}{C\Omega\,(L_1+L_2)} \sin \Omega t.$

14.5. Problema se studiază în acelaşi mod, tensiunea la bornele condensatorului variind după legea de descărcare a unui condensator pe o rezistenţă [Relaţia (86)].

14.6. Se folosesc cantităţile complexe.

Se obţin ecuaţiile

$$\overline{I}_1 \left[R_1 + \overline{p}\, L_1 + \frac{1}{\overline{p} C}\right] + \overline{p}\, M\, \overline{I}_2 = 0$$

$$\overline{I}_2 \left[R_2 + \overline{p}\, L_2\right] + \overline{p}\, M\, \overline{I}_1 = 0$$

de unde rezultă $\delta = \dfrac{1}{2}\dfrac{R_1'}{N_1}$ şi $\Omega = \sqrt{\dfrac{1}{C N_1} - \delta^2 + \dfrac{R_1 R_2}{N_1 L_2}}$,

în care s'a notat $N_1 = L_1 - \dfrac{M^2}{L^2}$ şi $R_1' = R_1 + R_2 \dfrac{L_1}{L_2}$.

14.7. Impedanţa operaţională a circuitului fiind :

$$Z_{(p)} = R + pL + \frac{1}{G + pC},$$

imaginea curentului este :

$$\mathfrak{i} = \frac{U}{p}\,\frac{Cp + G}{Lp^2 + (CR + GL)\,p + GR + 1} = 10\,\frac{p + 4}{p\,(p^2 + 10p + 124)}.$$

Pentru a afla originalul se aplică teorema desvoltării lui Heaviside (formula de transformare 11 din tabel). Se găseşte :

$$i = \frac{40}{124} + \frac{\varepsilon^{-5t}}{2j}\left[\frac{-1 + j\,10}{-5 + j\,10}\,\varepsilon^{j10t} - \frac{-1 - j\,10}{-5 - j\,10}\,\varepsilon^{-j\,10t}\right] =$$

$$= 0{,}323 + 0{,}904\,\varepsilon^{-5t}\sin(10\,t - 0{,}36)\text{ A}.$$

14.8. Impedanţa operaţională este

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2}{pC} \cdot \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC}} + R_3 + pL = \frac{6p^2 + 3420\,p + 2{,}21 \cdot 10^6}{2p + 10^3},$$

şi imaginea curentului:

$$\mathfrak{L}i = \frac{40\,(2p + 10^3)}{p\,(6p^2 + 3420\,p + 2{,}21 \cdot 10^6)}.$$

Aplicând aceeaşi relaţie de transformare ca în problema precedentă se găseşte:

$$i = 1{,}8 . 10^{-2} + 1{,}68 \cdot 10^{-2}\, \varepsilon^{-285\,t} \sin\,(537\,t + 1{,}163)\ \text{A}.$$

14.9. Problema se poate rezolva fie prin transformarea lui Laplace, fie prin cantităţi complexe. Prin a *doua metodă* se determină regimul liber, egalându-se cu zero impedanţa generalizată şi înlocuindu-se $\bar{p}$ prin valoarea sa. Se găseşte $\delta = 1100$ şi $\Omega = 0$. Prin condiţii de limită se deduc apoi $A = I \cos \psi = 1/1100$i Cunoscând curentul transitoriu i, se scrie tensiunea la bornele condensatorulu. şi se pune condiţia ca aceasta să fie egală cu 50 V. Se găseşte $t = 7{,}258 \;\; 10^{-4}$s.

Pentru rezolvarea problemei cu ajutorul transformării lui Laplace, se determină curentul din rezistenţa R_2 cu ajutorul legilor lui Kirchhoff. Apoi se aplică transformarea lui Laplace, găsindu-se acelaşi rezultat.

Să se compare metodele.

14.10. Aplicându-se transformarea lui Laplace ecuaţiei diferenţiale a circuitului dat şi ţinând seama că imaginea funcţiei impuls este egală cu unitatea, se găseşte

$$i = \frac{B_0}{L}\, \varepsilon^{-\frac{L}{R} t}. \text{ Se presupune } i\,(0) = 0.$$

14.11. $i = -\dfrac{B_0}{CR^2}\, \varepsilon^{-\frac{\;}{CR}}.$

14.12. Se utilizează fie cantităţile complexe fie calculul operaţional, Se obţine.

$$U_{c1} = U\, \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, \varepsilon^{-\frac{t}{R\,(C_1 + C_2)}} \text{ şi } U_{c2} = U \left[1 - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, \varepsilon^{-\frac{t}{R\,(C_1 + C_2)}}\right]$$

In cazul particular se găseşte $U_{c1} = 0{,}5\ U\, \varepsilon{-500}$ V şi $U_{c_2} = U\,(1 - 0{,}5\, \varepsilon{-500})$ V.

14.13. Fie prin cantităţi complexe, fie prin calculul operaţional se găseşte

$$i_2 = \frac{U}{R} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\, \varepsilon^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, \varepsilon^{\alpha_2 t}\right);$$

$$i_3 = \frac{U}{R}\, \frac{\alpha_1 \alpha_2\, L}{(\alpha_1 - \alpha_2)\, R}\, (\varepsilon^{\alpha_1 t} - \varepsilon^{\alpha_2 t});\ i = i_1 + i_2; \text{ în care}$$

$$\alpha_{1;2} = -\frac{3\,R}{2\,L} \pm \frac{R}{2\,L}\sqrt{5}.$$

Expresia curenţilor poate fi exprimată prin funcţii hiperbelice. A se efectua.

14.14. Se aplică metoda circuitelor independente şi calculul operaţional. Se găseşte fără dificultate:

$$(a)\quad i_1 = 30 - 10\,\varepsilon^{-20t} - 20\,\varepsilon^{-80t}\ \text{A};\quad i_2 = 30 - 20\,\varepsilon^{-20t} - 10\,\varepsilon^{-80t}\ \text{A};$$

$$i_3 = 10\,\varepsilon^{-20t} - 10\,\varepsilon^{-80t}\ \text{A}.$$

(b) Calculând $\frac{di_3}{dt} = 0$ se găseşte $t = 23.10^{-3}$ s. $i_{3\,max} = 4{,}73$ A.

(c) $W = \int_0^\infty R_3\ i_3^2\ dt = 9$ jouli

14.15. Impedanţa operaţională este:

$$Z(p) = \frac{(R_1^2 C_1 C_3 + R_1 R_3 C_1 C_3)p^2 + (2R_1 C_3 + R_1 C_1 + R_3 C_3)p + 1}{p\,(R_1 C_1 p + 1)\,C_3}$$

numeric se găseşte:

$$i_3 = -\,2{,}42\,\varepsilon^{-9{,}8\,t} - 0{,}93\,\varepsilon^{-127{,}8\,t}\ \text{A}.$$

Ceilalţi curenţi se găsesc cu ajutorul legilor lui Kirchhoff. Se găseşte:

$$i_1 = -\,0{,}26\,\varepsilon^{-9{,}8\,t} - 4{,}25\,\varepsilon^{-127{,}8\,t}\ \text{A}.$$

$$i_2 = 2{,}68\,\varepsilon^{-9{,}8\,t} + 3{,}32\,\varepsilon^{-127{,}8\,t}.$$

Tensiunile se determină cu reaţia $u_c = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt$ găsindu-se

$$u_{c1} = 26{,}8\,\varepsilon^{-9{,}8\,t} + 33{,}2\,\varepsilon^{-127{,}8\,t}.$$

$$u_{c3} = 120 - 123{,}6\,\varepsilon^{-9{,}8\,t} + 3{,}6\,\varepsilon^{-127{,}8\,t}.$$

ţinând seama că la $t = 0$ $u_{c0} = 0$.

14.16. Curenţii se obţin aplicând legile lui Kirchhoff circuitului:

$$i_2 = i_1 + i;\qquad Ri + L\frac{di}{dt} - R_1 i_1 = 0$$

$$U = R_2 i_2 + Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt$$

pe care le rezolvăm cu ajutorul calculului operaţional. Se găseşte:

$$i = \frac{U R_1\,\varepsilon^{-\delta t}}{\Omega' L (R_1 + R_2)}\,\text{sh}\,\Omega' t$$

în care:

$$\delta = \frac{b}{2a},\qquad \Omega' = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$a = LC(R_1 + R_2),\ b = CR_1R_2 + CRR_2 + CRR_1 + L,\ c = R + R_1$$

Dacă $b^2 - 4ac < 0$, punând $j\Omega = \Omega'$

$$i = \frac{UR_1 \varepsilon^{-\delta t}}{\Omega L(R_1 + R_2)} \sin \Omega t.$$

Dacă $b^2 - 4ac = 0$,

$$i = \frac{UR_1 t \varepsilon^{-\delta t}}{L(R_1 + R_2)}$$

Ceilalţi curenţi se deduc imediat. Numeric se găseşte $b^2 - 4ac = 4{,}21 > 0$ deci curentul prin inductanţă este aperiodic $i = 3{,}9 \cdot 10^{-2} \varepsilon^{-286t}$ sh $163\,t$.

14.17. Aplicându-se legile lui Kirchhoff, scrise în operaţional, se găseşte:

$$\mathfrak{L}i_1 = \mathfrak{L}i_2 + \mathfrak{L}i_3$$

$$\mathfrak{L}u = R_1 \mathfrak{L}i_1 + R_2 \mathfrak{L}i_2$$

$$R_2 \mathfrak{L}i_2 = \frac{\mathfrak{L}i_3}{Cp}$$

se găseşte:

$$\mathfrak{L}u_c = \frac{\mathfrak{L}u}{1 + \frac{R_1}{R_2} + R_1 Cp}$$

de unde:

$$u_c = \frac{U\sqrt{\ } \sin(\omega t + \psi - \varphi)}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega C R_1)^2}} - \frac{U\sqrt{2} \sin(\psi - \varphi)\, \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2}\right)^2 + (\omega C R_1)^2}}$$

în care

$$\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \quad \text{şi} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega C R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

curenţii se deduc apoi uşor.

14.18. Se determină pe aceeaşi cale curentul debitat de sursă. Se găseşte:

$$i_1 = A\left[\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \psi - \alpha + \beta) - \frac{R_2^2 \sin(\psi - \alpha)\, \varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}}{R_1 + R_2}\right]$$

în care:

$$A = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{(R_1 R_2)^2 + \omega^2 L^2 (R_1 + R_2)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L}{R_2}, \quad \tau = \frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

Restul calculului este simplu. Numeric se găsește :

$$i = 0{,}6 \sin(\omega t + \psi - 25^0 42') - 0{,}27 \sin(\psi - 77^0 11')\, \varepsilon^{-1{,}4.10^{-2} t}$$

Regimul permanent se stabilește direct dacă $\psi = \alpha = 77^0 11'$.

14.13. Aceeași metodă. Se găsește :

$$i = 7{,}22 \sin(314\, t + 43^0 50') + 8{,}3\, \varepsilon^{-100\, t} \sin(153\, t - 37^0 20')\ \text{A}$$

$$u_c = 346 \sin(314\, t - 46^0 10') - 412\, \varepsilon^{-100\, t} \sin(153\, t - 37^0 20')\ \text{V}.$$

14.20. Ecuațiile operaționale ale circuitului sunt

$$\mathcal{L}E = (R_1 + pL_1)\, \mathcal{L}i_1 + p\, M\mathcal{L}i_2$$
$$0 = (R_2 + pL_2)\, \mathcal{L}i_2 + p\, M\mathcal{L}i_1$$

care rezolvate dau :

$$i_1 = \frac{R}{E_1}\left(1 - \frac{R_2 L_1}{R_1 L_2 + R_2 L_1}\, \varepsilon^{-\frac{R_1 R_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1} t}\right)$$

$$i_2 = -\frac{ME}{R_1 L_2 + R_2 L_1}\, \varepsilon^{-\frac{R_1 R_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1} t}$$

făcând $t = 0$

$$\therefore\ i_1 = \frac{EL_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1}\ \text{și}\ i_2 = -\frac{EM}{R_1 L_2 + R_2 L_1}$$

în contradicție cu ipoteza făcută. Această se datorează faptului că, din cauza cuplajului perfect apar forțe electromotoare de inducție reziduale.

14.21. Ecuațiile operaționale sunt analoage cu acelea din problema precedentă. Soluția, în cazul general este

$$i_1 = \frac{U}{R_1}\left[1 + \frac{R_1 + L_1(1 - K^2)\,\alpha_2}{L_1(1 - K^2)(\alpha_1 - \alpha_2)}\, \varepsilon^{\alpha_1 t} - \frac{R_1 + L_1(1 - K^2)\,\alpha_1}{L_1(1 - K^2)(\alpha_1 - \alpha_2)}\, \varepsilon^{\alpha_2 t}\right]$$

și o relație analoagă, pentru i_2, în care

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R_1 L_2 + R_2 L_1}{2L_1 L_2(1 - K^2)} \pm \sqrt{\frac{(R_1 L_2 + R_2 L_1)^2}{4\, L_1^2\, L_2^2\, (1 - K^2)^2} - \frac{R_1 R_2}{L_1 L_2 (1 - K^2)}}$$

În cazul numeric se găsește :

pentru $K = 1$, $i_1 = 5\,(1 - 0{,}25\, \varepsilon^{-50\, t})$ A, $i_2 = -1{,}77\, \varepsilon^{-50\, t}$ A și $W = \int_0^\infty R_2 i_2^2\, dt =$ $= 0{,}315$ jouli; pentru $K = 0{,}8$, $i_1 = 5\,(1 - 0{,}5\, \varepsilon^{-55\, t} - 0{,}5\, \varepsilon^{-501\, t})$ A, $i_2 = -3{,}6\, \varepsilon^{-55\, t} + 3{,}6\, \varepsilon^{-501\, t}$ A și $W = 785$ jouli.

14.22. Se utilizează calculul operațional. Imaginea tensiunii aplicate este $U(p) = \int_0^\infty \varepsilon^{-pt}\, u\, dt = \dfrac{\alpha U}{p(p + \alpha)}$. Aplicând metoda circuitelor independente în operațional se găsește :

$$i_e = [2{,}51\, \varepsilon^{-5\, t} - 25{,}5\, \varepsilon^{-150\, t} \cos(278\, t + 11^0 30')]\, 10^{-2}\ \text{A}.$$

Scanned with OKEN Scanner

14.23. Ecuaţiile de funcţionare sunt:

$$L\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_1\,dt + \frac{1}{\Gamma}\int_0^t (i_1 + i_2)\,dt = 0$$

$$L\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i_2\,dt + \frac{1}{\Gamma}\int_0^t (i_1 + i_2)\,dt = 0$$

cu condiţiile iniţiale pentru $t = 0$, $i_1 = i_2 = 0$, $\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L}$ şi $\frac{di_2}{dt} = 0$.

Aplicând calculul operaţional, sistemul se transformă într'un sistem algebric în p care se rezolvă în raport cu imaginile curenţilor căutaţi. Se găseşte:

$$i_1 = \frac{E}{2}\left[\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{2L}{\Gamma}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{L\Gamma}}\right)t\right]$$

$$i_2 = \frac{E}{2}\left[\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{2L}{\Gamma}}}\sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} + \frac{1}{L\Gamma}}\right)t\right].$$

14.24. După deschiderea circuitului se poate scrie:

$$(R + r)\,i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^\tau i\,dt = U_b$$

sau operaţional:

$$(R + r)\,\mathfrak{L}i + Lp\,[\mathfrak{L}i - i(0)] + \frac{\mathfrak{L}i}{pC} = \mathfrak{L}U_b$$

de unde, aplicând transformarea lui Carson:

$$\mathfrak{L}i = \frac{U_b + pL\,(0)}{R + r + pL + \frac{1}{pC}}$$

cum $i(0) = U_b/r$, tensiunea la contacte se poate scrie:

$$\mathfrak{L}U_K = \mathfrak{L}i\cdot\left(R + \frac{1}{pC}\right) = U_b\frac{R + \frac{L}{Cr} + pL\frac{R}{r} + \frac{1}{pC}}{R + r + pL + \frac{1}{pC}},$$

care este egală cu U_b când $(L/Cr) = r$ şi $(R/r) = 1$.

14.25. Scriind în circuitele ABm (i_1), BCn (i_2) şi mnD (i_3) legile lui Kirchhoff sub forma operaţională:

$$\left(\frac{1}{pC_1} + r_1\right)\mathfrak{L}i_1 - r_1\mathfrak{L}i_3 = U_{AB}(p) - \frac{I_1(0)}{jC_1\omega}$$

$$\left(\frac{1}{pC_2} + r_2\right) \mathfrak{L}i_2 - \frac{1}{pC_2} \mathfrak{L}i_3 = U_{BO}(p) - \frac{I_2(0) - I_3(0)}{j\omega C_2}$$

$$\left(r_1 + r_3 + \frac{1}{pC_2} + pL_3\right) \mathfrak{L}i_3 - r_1 \mathfrak{L}i_1 - \frac{1}{pC_2} \mathfrak{L}i_2 = pL_3 I_3(0) - \frac{I_3(0) - I_2(0)}{jC_2\omega},$$

$U_{AB}(p)$ şi $U_{BO}(p)$ sunt imaginile funcţiilor date $U_{AB}(t)$ şi $U_{BO}(t)$ pentru $t > 0$. Se presupune că pentru $t < 0$ nu există decât sistem direct de tensiuni, deci $I_3(0) = 0$. Rezolvând sistemul de ecuaţii se obţine:

$$\mathfrak{L}i_3 = \frac{\dfrac{\left(U_{AB} - \dfrac{I_1(0)}{j\omega C_1}\right) r_1}{r_1 + (1/pC_1)} + \dfrac{(U_{BO}/pC_2) + [I_2(0)/j\omega C_2] r_2}{r_2 + (1/pC_2)}}{\dfrac{r_1}{\left(r_1 + \dfrac{1}{pC_1}\right) pC_1} + \dfrac{r_2}{\left(r_2 + \dfrac{1}{PC_2}\right) pC_2} + r_3 + pL_3}.$$

Expresia imaginii tensiunii la bornele releului este:

$$\mathfrak{L}U_3 = \mathfrak{L}i.(r_3 + pL_3).$$

14.26. Tensiunea reţelei este: $U_1 = 82 \cos \omega t$; $U_2 = 82 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$; $U_3 = 82 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$. Fenomenul tranzitoriu care ia naştere la scurtcircuit este determinat de tensiunile $-\frac{I_1(0)}{j\omega C_1}$ şi $-\frac{I_2(0)}{j\omega C_2}$, care există la bornele condensatorilor la $t = 0$. Tensiunea la bornele deschise ale filtrului este egală cu suma tensiunilor $U_{r_1}(p) + U_{c2}(p)$:

$$U_{r_1}(p) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} \cdot \frac{r_1}{r_1 + \dfrac{1}{pC_1}}$$

$$U_{c2}(p) = \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} - \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{\dfrac{1}{pC_2}}{r_2 + \dfrac{1}{pC_2}} = \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{r_2}{r_2 + \dfrac{1}{pC_2}}$$

de unde tensiunea căutată:

$$U(p) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} \cdot \frac{p}{p + \dfrac{1}{r_1 C_1}} + \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \cdot \frac{p}{p + \dfrac{1}{r_2 C_2}}.$$

Cum $p/(p+a) \doteqdot \varepsilon^{-at}$ (transformarea lui Carson), rezultă:

$$U(t) = -\frac{I_1(0)}{j\omega C_1} \varepsilon^{-\frac{t}{r_1 C_1}} + \frac{I_2(0)}{j\omega C_2} \varepsilon^{-\frac{t}{r_2 C_2}}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $\overline{U}_{AB} = \sqrt{3}\,\overline{U}_A\ \varepsilon^{j30^\circ}$ şi $\overline{U}_{BO} = \sqrt{3}\,\overline{U}_A\ \varepsilon^{-j90^\circ}$, cum $\overline{U}_A = \overline{U}_A \underline{|0} = 82$ V,

rezultă $\overline{U}(t) = -41\sqrt{3}\ \varepsilon^{-j30^\circ}\left[\varepsilon^{-\frac{314}{\sqrt{3}}t} - j\sqrt{3}\ \varepsilon^{-\sqrt{3}\cdot 314t}\right]$;

$\therefore U_{t=0} = -123$ V; $U_{t=0,01} = -10$ V; $U_{t=0,02} = -1{,}5$ V.

14.27. Circuitul echivalent al unui scurtcircuit bifazat la pământ este dat de fig. 22. In cazul problemei de faţă această schemă este dată în fig. 14 27, în care $Z_1(p)$, $Z_2(p)$, $Z_0(p)$ sunt impedanţele operaţionale de secvenţă directă, inversă

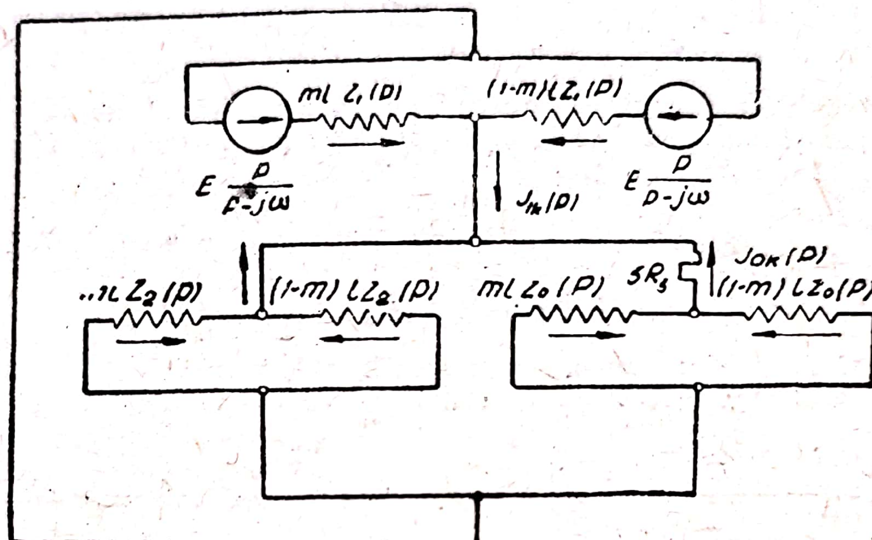


Fig. 14.27

şi homopolară pe unitatea de lungime. Avem: $Z_1(p) = Z_2(p) = r_1 + p\,\frac{x_1}{\omega}$

$Z_0(p) = r_0 + p\,\frac{x_0}{\omega}$, în care x_1, x_0, r_1, r_0 sunt reactanţele şi rezistenţele liniei de transport pe unitatea de lungime. Componentele simetrice ale curentului în defect

sunt: $\mathfrak{L}\, i_{1k} = \dfrac{\overline{E}\, p\,[Z_1(p) + Z_0(p) + 3R']}{m(1-m)\,l\,(p-j\omega)\ Z_1(p)\,[Z_0(p) + 2\,Z_0(p) + 6\,R']}$,

$$\mathfrak{L}\, i_{2k} = \frac{\overline{E}p\,[Z_0(p) + 3R']}{m(1-m)\,l\,(p-j\omega)\,Z_1(p)\,[Z_1(p) + 2\,Z_0(p) + 6\,R']},$$

$$\mathfrak{L}\, i_{0k} = \frac{\overline{E}p}{m(1-m)\,l\,(p-j\omega)\,Z_1(p)\,[Z_1(p) + 2\,Z_0(p) + 6\,R']},$$

în care $R' = R/[m(1-m)\,l]$. Ţinând seama de expresiile impedanţelor operaţionale, originalele componentelor simetrice ale curentului de scurtcircuit sunt:

$$\overline{I}_{1k} = \frac{\overline{E}}{m(1-m)\,l}\left[\frac{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_0 + 3R'}{\overline{Z}_1(\overline{Z}_1 + 2\overline{Z}_0 + 6R')}\,\varepsilon^{j\omega t} - \frac{1}{2\,\overline{Z}_1}\,\varepsilon^{-\frac{\omega r_1}{x_1}t} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2(\overline{Z}_1 + 2\,\overline{Z}_0 + 6\,R')}\,\varepsilon^{-\frac{\omega(r_1 + 2r_0 + 6R')}{x_1 + 2x_0}t}\right]$$

Scanned with OKEN Scanner


$$\overline{I}_{2k} = \frac{\overline{E}}{m(1-m)l}\left[\frac{\overline{Z}_0 + 3R'}{\overline{Z}_1(\overline{Z}_1 + 2\overline{Z}_0 + 6R')}\varepsilon^{j\omega t} - \frac{1}{2\overline{Z}_1}\varepsilon^{-\frac{\omega r_1}{r_1}t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2(\overline{Z}_1 + 2\overline{Z}_0 + 6R')}\varepsilon^{-\frac{\omega(r_1+2r_0+6R')}{x_1+2x_0}t}\right]$$

$$\overline{I}_{0k} = -\frac{\overline{E}}{m(1-m)l}\cdot\frac{\varepsilon^{j\omega t} - \varepsilon^{-\frac{\omega(r_1+2r_0+6R')}{x_1+2x_0}t}}{\overline{Z}_1 + 2\overline{Z}_0 + 6R'}$$

în care $\overline{Z}_1 = r_1 + jx_1$ şi $\overline{Z}_0 = r_0 + jx_0$. Curenţii pe cele trei faze se calculează cu ajutorul relaţiilor (71).

14.28. Problema se poate rezolva fie cu cantităţi complexe, fie cu ajutorul calculului operaţional. Ecuaţiile se obţin scriind a doua lege a lui Kirchhoff circuitului format din fazele A şi B în serie. Se găseşte

$$R\mathfrak{L}i_a + pL\mathfrak{L}i_a - R\mathfrak{L}i_b - pL\mathfrak{L}i_b = \mathfrak{L}u_{ab}$$

sau

$$R(\mathfrak{L}i_a - \mathfrak{L}i_b) + pL(\mathfrak{L}i_a - \mathfrak{L}i_b) = \mathfrak{L}u_{ab}$$

Se procedează la fel şi pentru celelalte faze, pentru care se ţine seama de decalajul tensiunii. Se găseşte până la urmă

$$i_a = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \beta)\varepsilon^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$

în care $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{3}L\omega + R}{L\omega + \sqrt{3}R}$, $\tau = \frac{L}{R}$, ψ este un parametru arbitrar al tensiunii şi $\operatorname{tg}\varphi = \frac{L\omega}{R}$.

14.29. Sistemul de ecuaţii al problemei este

$Ri_a - L\frac{di_b}{dt} = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi)$ (1); $Ri_a - u_c = -U\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \psi - \frac{4\pi}{3}\right)$ (2); $i_a + i_a + C\frac{du_c}{dt} = 0$ (3). Se folosesc cantităţile complexe şi se rezolvă. Se găseşte

$$i_b = \mathfrak{I}\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{6}\right) - \mathfrak{I}\left[\frac{\omega'}{\omega}\left(\frac{1}{3}\sin\psi + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\psi\right)\sin\omega' t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\psi\cos\omega' t\right]\varepsilon^{-\delta t},$$

în care $\delta = \frac{1}{2RL} = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}$; $\omega' = \omega\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$; $\mathfrak{I} = \sqrt{2}\,\omega CU = \sqrt{2}.\sqrt{3}\frac{U}{R}$.

Expresii analoage se găsesc şi pentru i_b şi i_c. Problema se poate rezolva şi cu ajutorul calculului operaţional.

14.30. $\Phi(p) = a_0 + a_1\varepsilon^{-p\tau_1} + a_2\varepsilon^{-p\tau_2} + \ldots + a_n\varepsilon^{-p\tau_n}$ (transf. Carson). Dacă $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = a$ şi $\tau_n - \tau_{n-1} = \ldots\ldots = \tau_2 - \tau_1 = \tau$

adică salturile se produc după intervale de timp egale, atunci $\Phi(p) = a \dfrac{1}{1-\varepsilon^{-\tau p}} =$
$= \dfrac{a}{2}\left(1 + \cot\mathrm{h}\, p \dfrac{\tau}{2}\right).$

14.31. Direct (fig. 14.31, *a*): pentru $0 \leqslant t \leqslant T_u - T_1$, $U = \dfrac{u_m}{T_u - T_1}\, t$,

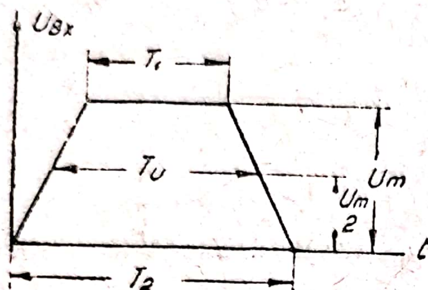


Fig. 14.31 *a*

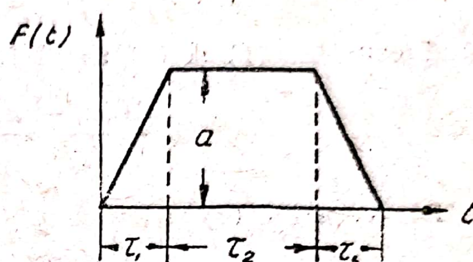


Fig. 14.31 *b*

pentru $T_u - T_1 \leqslant t \leqslant T_u$, $U = u_m$; pentru $T_u \leqslant t \leqslant 2T_u - T_1$, $U = \dfrac{u_m}{T_u - T_1}$ $(2\,T_u - T_1 - t)$ pentru $2\,T_u - T_1 \leqslant t \leqslant \infty$, $U = 0$.

Prin utilizarea funcției impuls (transformarea Carson) (fig. 14.31, *b*) $\Phi(p) =$
$= \dfrac{a}{\tau_1 p}\left[1 - \varepsilon^{-p\tau_1} - \varepsilon^{-p(\tau_1+\tau_2)} + \varepsilon^{-p(2\tau_1+\tau_2)}\right].$

14.32. Ecuațiile diferențiale ale galvanometrului balistic sunt: ecuația mecanică

$$K\frac{d^2\theta}{dt^2} + A\frac{d\theta}{dt} + B\theta = \Phi_0 i$$

ecuațiile electrice $L\dfrac{di}{dt} + Ri + \Phi_0\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{q}{C}$ (1);

$i = -\dfrac{dq}{dt}$ (2). Condițiile inițiale sunt $\theta(0) = 0$; $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = 0$;$i(0) = 0$. Se neglijează $L\dfrac{di}{dt}$ față de Ri. Se utilizează calculul operațional. Se elimină $\mathfrak{L}q$ și $\mathfrak{L}i$ și se rezolvă în raport cu $\mathfrak{L}\theta$. Se găsește $\theta = \dfrac{\Phi_0\, Q_0}{\sqrt{BK'}}\,\varepsilon^{-\frac{A}{2K'}t}\sin\left(\sqrt{\dfrac{B}{K'} - \dfrac{A^2}{4K^2}}\right)t$,
în care $K' = K + \Phi_0^2\, C$.

14.33. Se alege un sens pozitiv pentru curent și pentru deviație. K fiind momentul de inerție a fiecărui cadru, λ coeficientul de torsiune a firului și k, constanta de proporționalitate a galvanometrului, ecuațiile de mișcare ale fiecărui cadru sunt:

$$K\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = ki - c\alpha_1 \qquad (1)$$

$$K\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} = ki - c\alpha_2 \qquad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

şi ecuaţia electrică a circuitului

$$-k\frac{d\alpha_1}{dt}-k\frac{d\alpha_2}{dt}=Ri \tag{3}$$

(*a*) Eliminând curentul i între aceste ecuaţii se obţine

$$K\frac{d^2(\alpha_1+\alpha_2)}{dt^2}-\frac{2k^2}{R}\frac{d(\alpha_1+\alpha_2)}{dt}+c(\alpha_1+\alpha_2)=0 \tag{4}$$

Scăzând ecuaţiile (1) şi (2) se obţine

$$K\frac{d^2(\alpha_1-\alpha_2)}{dt^2}+c(\alpha_1-\alpha_2)=0 \tag{5}$$

Din ecuaţiile (4) şi (5) se obţin cele două deviaţii. Ecuaţiile se rezolvă cu ajutorul calculului operaţional. Punând $\Omega=\sqrt{\frac{c}{k}-\frac{k}{k^2R^2}}$ şi ţinând seama de condiţiile iniţiale că la $t=0$, $\alpha_1=\alpha_0$ şi $\alpha_2=0$ iar $\frac{d\alpha_1}{dt}=\frac{d\alpha_2}{dt}=0$, se obţine

$$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_0\,\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\left[\frac{k^2}{RK\Omega}\sin\Omega t+\cos\Omega t\right];\quad \alpha_1-\alpha_2=\alpha_0\cos\sqrt{\frac{c}{K}}\,t$$

de unde

$$\alpha_1=\frac{\alpha_0}{2}\left\{\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\left[\frac{k^2}{KR\Omega}\sin\Omega t+\cos\Omega t+\cos\sqrt{\frac{c}{K}}\,t\right]\right\}$$

$$\alpha_2=\frac{\alpha_0}{2}\left\{\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\left[\frac{k^2}{KR\Omega}\sin\Omega t+\cos\Omega t-\cos\sqrt{\frac{c}{K}}\,t\right]\right\}$$

Discuţia ecuaţiilor se face în raport cu diversele constante ale circuitului.
(*b*) Cunoscând valorile lui α_1 şi α_2, din (3) se deduce valoarea curentului

$$i=\frac{kc\,\alpha_0}{KR\Omega}\,\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\sin\Omega t$$

(*c*) La $t=0$, $\alpha_1=\alpha_0$ şi $\alpha_2=-\alpha_0$, rezultă

$$\alpha_1=-\alpha_2=\alpha_0\cos\sqrt{\frac{c}{K}}\,t \quad \text{şi} \quad i=0$$

Galvanometrele funcţionează ca şi cum fiecare ar fi în circuit deschis.
Dacă la $t=0$ $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_0$, atunci

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_0\,\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\left[\frac{k^2}{KR\Omega}\sin\Omega t+\cos\Omega t\right]$$

şi

$$i=\frac{2\,k\,c\,\alpha_0}{KR\Omega}\,\varepsilon^{-\frac{k^2}{RK}t}\sin\Omega t.$$

Scanned with OKEN Scanner

14.34. Curentul inițial când mișcarea este uniformă și produsă de un efort exterior, este $I_0 = \frac{B\,l\,v_0}{R}$. După ce bara a fost lăsată liberă, ecuațiile circuitului sunt $i' = -\frac{dq}{dt}$; $B\,l\,v = R\;(i + i') + L\;\frac{d(i+i')}{dt}$; $q = CB\,l\;v$; $m\frac{dv}{dt} = -\;B\,l\,i$, din care se deduce, prin eliminarea lui v, q și i', ecuația care dă curentul din bară

$$m'L\;\frac{d^2i}{dt^2} + m'R\;\frac{di}{dt} + B^2\,l^2\;i = 0$$

în care s'a notat $m' = m + CB^2l^2$. Condițiile inițiale de funcționare sunt: la $t = 0$, curentul în conductorul EF nu poate avea variații instantanee și deci $(i + i')_0 = I_0 = \frac{m'}{m}\,i_0 \therefore i_0 = \frac{m}{m'}\;I_0$ apoi $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = 0$. Utilizând calculul operațional, se obține expresia curentului. In cazul particular al problemei

$$\frac{1}{2}\,CR^2\;I_0^2 = \frac{1}{2}\;L\;I_0^2 = \frac{1}{2}\;m\,v_0^2 = \frac{1}{2}\,m\;\frac{R^2\,I_0^2}{B^2l^2},$$

ecuația devine

$$2\,L\frac{d^2i}{dt^2} + 2\,R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = 0;$$

din care rezultă

$$i = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\;\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}\;\sin\left(\frac{R}{2L}\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$

și

$$v = v_0\,\varepsilon^{-\frac{R}{2L}t}\;\cos\frac{R}{2\,L}\;t.$$

14.35. Fie k factorul de proporționalitate între fem și viteza mașinii. Ecuațiile de funcționare ale sistemului sunt:

$$J_1\,\frac{d\omega_1}{dt} = -\,ki_1\,;\; J_2\,\frac{d\omega_2}{dt} = -\,ki_2\,;\; k\omega_1 = ri_1 + Ri\,;$$

$k\omega_2 = ri_2 + Ri$; $i_1 + i_2 = i$. Utilizând calculul operațional și ținând seama că $\omega_1\,(o) = \omega_2\,(o) = \omega_0$, dacă se elimină curenții între aceste ecuații se obține

$$[J_1\,(r+2R)\,r\,p + k^2\,(r+R)]\;\mathfrak{L}\omega_1 - k^2R\mathfrak{L}\omega_2 = J_1\;(r+2R)\;r\omega_0$$

$$[J_2\,(r + 2R)\,r\,p - k^2\;(r+R)]\;\mathfrak{L}\omega_2 + k^2\;R\mathfrak{L}\omega_1 = J_2\,(r+2R)\;r\omega_0$$

Eliminând acum între acestea pe $L\omega_2$, respectiv pe $L\omega_1$, se obține

$$[J_1J_2\,(r+2R)\,r\,p^2 + (J_1+J_2)\,k^2\,(r+R) + k^4]\;\mathfrak{L}\omega_1 = \\ = [J_1J_2\;(r+2R)\;r\;p + J_2\;k^2\;(r+R) - J\;2k^2\;R]\omega_0$$

și

$$[J_1J_2\;(r+2R)\;r\;p^2 + (J_1+J_2)\,k^2\;(r+R) + k^4]\;\mathfrak{L}\omega_2 = \\ = [-\;J_1J_2\;(r+2R)\;rp - J_2k^2\;(r+R) + J_1\;k^2\;R]\;\omega_0$$

din care se deduce imaginea vitezelor şi care sunt de forma $\mathfrak{L}\omega = \frac{ap+b}{p^2+dp+f}$ a cărui original se găseşte uşor. Cunoscând imaginile vitezele, din ecuaţiile $J(p\mathfrak{L}\omega-\omega_0) = -k\mathfrak{L}i$ se deduc imaginile curenţilor şi deci expresiilor acestora. In cazul particular numeric se găseşte: $\omega_0 = 31{,}4$, $k = 3{,}82$ şi ecuaţiile devin:

$$(1005\ p^2 + 6631\ p + 213)\ \mathfrak{L}\omega_1 = 31{,}4\ (1005\ p - 700)$$
$$(1005\ p^2 + 6631\ p + 213)\ \mathfrak{L}\omega_2 = 31{,}4\ (-1005\ p - 766).$$

Calculând se găseşte: $\omega_1 = 34{,}6\ \varepsilon^{-6{,}57\,t} - 3{,}5\ \varepsilon^{-0{,}03\,t}$ rad/s; $\omega_2 = 34{,}7\ \varepsilon^{-6{,}57\,t} - 3{,}6\ \varepsilon^{-0{,}03\,t}$ rad/s; $i_1 = 1185\ \varepsilon^{-6{,}57\,t} - 0{,}55\ \varepsilon^{-0{,}03\,t}$ A; $i_2 = 1485\ \varepsilon^{-6{,}57\,t} - 0{,}71\ \varepsilon^{-0{,}03\,t}$ A; $i = 2670\ \varepsilon^{-6{,}57\,t} - 1{,}26\ \varepsilon^{-0{,}03\,t}$ A.

Notă. Este interesant a se studia problema ţinând seama şi de inductanta L a maşinilor presupusă aceiaşi pentru ambele maşini. Ca date numerice, se va lua mai întâi $L = 10^{-3}$ H şi apoi $L = 0.05$ H.

14.36. La un moment dat, forţa electromotoare a maşinii este $e = k\omega$.·. $i = \frac{U - k\omega}{R}$. Bilanţul energetic dă $Uidt = Ri^2\,dt + L\,i\,di + J\omega\,d\omega$ sau $U = Ri + L\frac{di}{dt} + k\omega$, căci $J\frac{d\omega}{dt} = k\,i$. Eliminând pe i între aceste ecuaţii se obţine:

$$L\frac{d^2\omega}{dt^2} + R\frac{d\omega}{dt} + \frac{k^2}{J}\ \omega = \frac{kU}{J}$$

care se integrează cu ajutorul calculului operaţional fără dificultate. Curentul este dat de ecuaţia

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{k^2}{J}\int idt = U$$

care deasemenea se integrează uşor cu ajutorul calculului operaţional.

Cantitatea totală de electricitate este dată de relaţia $q = \int_0^t i\,dt$ pentru $t = \infty$. Se va observa că în aceste condiţii maşina funcţionează ca un condensator.

14.37. Ecuaţiile de funcţionare ale sistemului sunt $J\frac{d\omega}{dt} = -ki_1$; $k\omega = ri_1 + Ri$; $i_2 = -CR\frac{di}{dt}$; $i = i_1 + i_2$. Se elimină între aceste ecuaţii i_1, i_2 şi ω şi se obţine ecuaţia (în operaţional):

$$JCRr\ p^2\mathfrak{L}i + (JR+Jr+k^2CR)\ \ p\mathfrak{L}i + k^2\mathfrak{L}i = Jk\omega_0$$

din care se deduce imaginea curentului i şi apoi originalul acestuia, după care se determină toate celelalte mărimi căutate. Pentru verificarea bilanţului energetic se scrie că totalitatea căldurii disipate în rezistenţele sistemului este egală cu suma energiei cinetice a maşinii plus energia electrică a condensatorului

$$R\int_0^\infty i^2dt + r\int_0^\infty i_1^2\,dt = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + \frac{1}{2}C\,k^2\omega_0^2$$

In cazul aplicaţiei numerice: $\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = 94{,}3$ $k = 2{,}35$ şi se găseşte $i = 21{,}8(\varepsilon^{-0.5\,t} - \varepsilon^{-202.10^4\,t})$ A, etc.

14.38. Ecuaţiile sistemului sunt:

$$J\frac{d\omega}{dt} = -ki_1;\quad k\omega = ri_1 + Ri + \frac{q_1}{C_1};\; i_1 + i_2 = i;\; i_2 = -CR\frac{di}{dt} - \frac{C}{C_1}i;$$

$i = \frac{dq_1}{dt}$, din care rezultă ecuaţia operaţională care determină imaginea curentului i:

$$CRr\,p^2\mathfrak{L}i + \left[\frac{C+C_1}{C_1}r + R + \frac{k^2CR}{J}\right]p\,i + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{k^2}{J}\,\frac{C+C_1}{C_1}\right]\mathfrak{L}i = k\,\omega_0$$

Rezolvarea problemei se face ca şi în cazul precedent.

14.39. Se scrie ecuaţia tensiunilor maşinii în perioada tranzitorie:

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + k\omega$$

deoarece $E = k\omega$. A doua ecuaţie se obţine scriind bilanţul energetic al sistemului în aceeaşi perioadă

$$Uidt = Ri^2dt + d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + d\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right), \tag{A}$$

din aceste două ecuaţii rezultă:

$$i = \frac{J}{k}\cdot\frac{d\omega}{dt}, \tag{B}$$

care introdusă în relaţia (A) dă ecuaţia diferenţială în ω, care rezolvă problema. Se utilizează calculul operaţional, obţinându-se:

$$\omega = \frac{U}{k}\left[1 - \varepsilon^{-\delta t}\left(\mathrm{ch}\,\Omega' t + \frac{\delta}{\Omega'}\mathrm{sh}\,\Omega' t\right)\right] \tag{C}$$

în cazul regimului aperiodic şi

$$\omega = \frac{U}{k}\left[1 - \varepsilon^{-\delta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\delta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right] \tag{D}$$

în cazul regimului oscilant.

Introducând una din aceste valori în relaţia (B) se găseşte pentru curenţi:

$$i = \frac{U}{L\Omega'}\varepsilon^{-\delta t}\mathrm{sh}\,\Omega' t.$$

sau:

$$i = \frac{U}{L\Omega}\varepsilon^{-\delta t}\sin\Omega t$$

Numeric se găseşte:

a) $i = 4460\,\varepsilon^{-60t}\,\mathrm{sh}\,53{,}6\,t$

b) $i = 1320\,\varepsilon^{-1{,}2t}\sin 3{,}63\,t.$

Construirea curbelor nu prezintă nici o dificultate.

Constanta k se determină din relaţiile (C) sau (D) pentru $t = \infty$, sau pe consideraţii fizice.

Scanned with OKEN Scanner

14.40. Ecuațiile de funcționare sunt $L\frac{di}{dt}+Ri+e=\frac{1}{2}U_n\ \frac{ei}{\omega}=M_{st}+$ $+J\frac{d\omega}{dt}$. Excitația fiind constantă $e=k\omega$ și $k\omega n=U_n-R\ I_n\ \therefore\ k=126$. Se introduc valorile numerice și se aplică calculul operațional. Se elimină $\mathfrak{L}i$ și se găsește

$$\omega=2{,}3+2{,}9\,\varepsilon^{-1{,}2t}-0{,}6\ \varepsilon^{-0{,}92\,t}=$$
$$=2{,}3+(2{,}3\ \text{ch}\ 2{,}36\ t+3{,}5\ \text{sh}\ 2{,}36\ t)\ \varepsilon^{-3{,}56\,t}\ \text{rad/s}$$
$$i=2{,}14-55{,}6\,\varepsilon^{-1{,}2t}+55{,}7\,\varepsilon^{-5{,}92\,t}=$$
$$=2{,}14+(0\ 7\ \text{ch}\ 2{,}36\ t-111{,}3\ \text{sh}\,2{,}36\ t)\ \varepsilon^{-3{,}56\,t}\ \text{kA}$$

Este interesant a se construi curbele de variație a curentului și a se da interpretarea fizică.

14.41. Condensatorul fiind încărcat are la borne tensiunea E. Constantele de integrare ale ecuațiilor (107) și (108) se determină pentru condițiile de limită: pentru $x=0$, $\mathfrak{L}u_{x=0}=\mathfrak{L}u_0$ pentru $x=X$, $\mathfrak{L}u_{x=X}=0$. Făcând în (108) $x=o\ \therefore\ A=\mathfrak{L}u_0$. Făcând în ambele ecuații $x=X$ și ținând seama de a doua condiție de limită, rezultă $B=-\mathfrak{L}u_0\,\frac{\text{ch}\ \alpha\ X}{\text{sh}\ \alpha\ X}$ și deci ecuațiile sistemului sunt

$$\mathfrak{L}u=\mathfrak{L}u_0\,\frac{\text{sh}\alpha\,(X-x)}{\text{sh}\ \alpha\ X} \tag{a}$$

$$\mathfrak{L}i=\frac{\mathfrak{L}u_0}{\beta}\ \frac{\text{ch}\ \alpha\,(X-x)}{\text{sh}\ \alpha\ X} \tag{b}$$

u_0 fiind tensiunea la capătul liniei, necunoscută. La condensator $i_0=-C_K\frac{du_0}{dt}$, de unde $\mathfrak{L}i_0=-p\,C_K\,\mathfrak{L}u_0+C_K\,E$, căci $u_0\ (o)=E$.

Făcând în (b) $x=o$ se obține $\mathfrak{L}i_0=\frac{u_0}{\rho}\frac{\text{ch}\ \alpha\ X}{\text{sh}\ \alpha\ X}\ \therefore\ \mathfrak{L}u_0=\frac{EC_K\,\beta\ \text{sh}\ \alpha\ X}{\text{ch}\alpha\,X+pC_K\,\rho\,\text{sh}\,\alpha X}$, de unde $\mathfrak{L}u=El\sqrt{lc}\ \frac{\text{sh}\ \alpha\ (X-x)}{\alpha X\ \text{sh}\ \alpha X+\gamma\ \text{ch}\alpha\ X}$ în care $\gamma=\frac{cX}{C_K}$. Căutând originalul acestei funcții *) se găsește

$$u=4\,E\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos\ \beta_s\ \sin\ \beta_s\frac{X-x}{X}}{2\,\beta_s+\sin\ 2\,\beta_s}\cos\frac{\beta_s}{X\sqrt{lc}}\ t.$$

14.42. Condițiile inițiale ale problemei sunt $u_{t=0}=U$ și $i_{t=0}=0$, iar condițiile limită, $u_{x=0}=0$ și $i_{x=X}=0$ pentru $t>0$. Constantele de integrare se determină ușor și sunt $A=-\frac{u}{p}$ și $B=\frac{u}{p}\frac{\text{sh}\ \alpha\ X}{\text{ch}\ \alpha\ X}$. Ecuațiile de funcționare ale circuitului sunt

$$\mathfrak{L}u=\frac{U}{p}\left[1-\frac{\text{ch}\ \alpha\ (X-x)}{\text{ch}\ \alpha\ X}\right]$$

$$\mathfrak{L}i=-\frac{U}{p\beta}\cdot\frac{\text{sh}\alpha\ (X-x)}{\text{ch}\ \alpha\ X},$$

*) A se vedea M. I. Contoroviei, Operaționnoe iscislenie i nestaționarnâie iavleniia v electricieschih țepiah, Moscova 1949, pag. 79.

Scanned with OKEN Scanner

a căror originale sunt

$$u = \frac{4}{\pi} U \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos\left(\frac{2s+1}{2} \cdot \frac{X-x}{X}\pi\right) \cos\left(\frac{2s+1}{2X\sqrt{lc}}\pi t\right)}{2s+1}$$

$$i = -\frac{4}{\beta\pi} U \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\sin\left(\frac{2s+1}{2} \cdot \frac{X-x}{X}\pi\right) \sin\left(\frac{2s+1}{2X\sqrt{lc}}\pi t\right)}{2s+1}.$$

15. *15*.1. (*a*) Rezistenţa statică $R_s = \frac{U}{i} = \frac{1}{A\sqrt{u}}$

(*b*) Rezistenţa dinamică $R_0 = \frac{du}{di} = \frac{2}{A3\sqrt{u}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{A^2 i}}$.

(*c*) $u_0 = Ri + \left(\frac{i}{A}\right)^{3/2}$.

15.2. Ecuaţia diferenţială de funcţionare a bobinei este $RL + N\frac{d\Phi}{dt} = U$ *). care se integrează prin metoda obişnuită. cunoscându-se expresia lui Φ. Constanta de integrare se determină scriind că, la $t = o$, $i_0 = o$ şi $i_p = \frac{U}{R} = 2$ A. Se găseşte $i = 2\ (1 - \varepsilon^{-\frac{10}{9}t}) / (1 - 1{,}05\,\varepsilon^{-\frac{10}{9}t})$.

15.3. Din cauza simetriei curenţii în laturile opuse sunt egali şi $i_2 = i_0 + i_1$.

(*a*) Pentru $i_0 = o$ ∴ $i_1 = i_2 = i$ ∴ $U_{ab} = U_{ac}$; rezultă $u = R\,i_2 = Ri$, de unde $i = \left(\frac{\alpha}{R}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = 0{,}01$ A iar $u_0 = U + Ri = 20$ V.

(*b*) Se scriu legile lui Kirchhoff circuitelor *abd* şi *acbd* şi se obţine $u_0 = R(i_1 + i_2) + \alpha i_1^{\beta} = 2R\,(i_1 + i_0) + R_0 i_0$. Diferenţiind în raport cu u_0, scriind că $\frac{di_0}{du_0} = o$ şi rezolvind sistemul se găseşte $i_1 = \left(\frac{R}{\alpha\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} = 0{,}0025$ A; $i_0 = \frac{\alpha i_1^{\beta} R i_1}{R + R_0} = 0{,}002$ A; $i_2 = i_0 + i_1 = 0{,}0045$ A ∴ $u = 2Ri_2 + R_0 i_0 = 9{,}5$ V.

15.4. Ecuaţia diferenţială a circuitului este $v(i) + \frac{1}{C}\int i dt = E$ care prin

---

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică, Bucureşti 1952, pag. 133.

separare de variabile şi integrare dă

$$\frac{t}{C}=\int_{E-v(i)=E_{co}}^{E-v(i)=E_{ct}}\frac{\mathrm{d}\,[E-v(i)]}{i}\,.$$

Integrala reprezintă suprafaţa cuprinsă între curba $1/i$ trasată în funcţie de $E-v(i)$ pentru $E-v(i)$ dela zero la valoarea lui v corespunzătoare E_{ct}, tensiunea la bornele condensatorului la timpul t. Efectuarea integralei se face conform schemei din fig. 15.4.

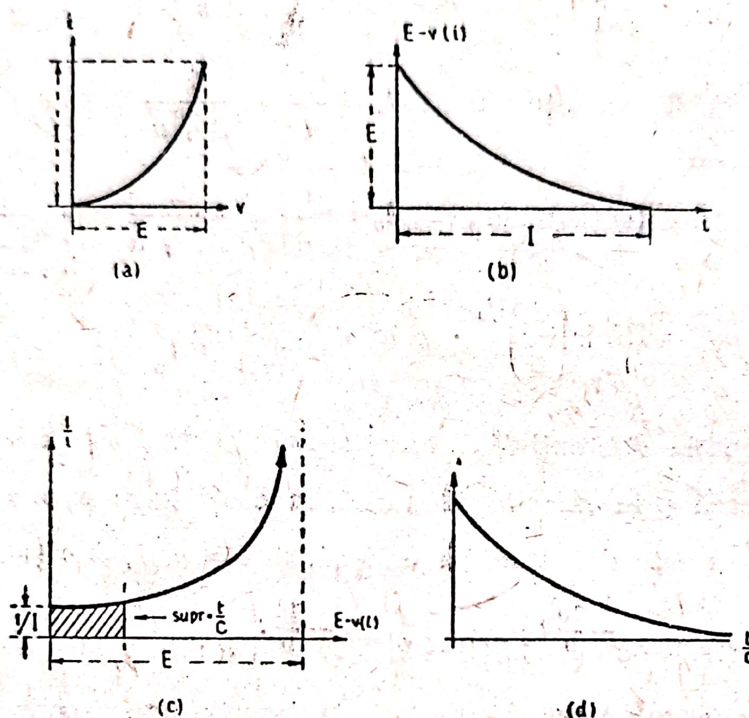


Fig. 15.4

Se obţine rezultatul

t/C	0	0,5012	1,0902	1,7965	2,6753	3,8055	5,3315
i	21,6	18,5	15,68	12,90	10,20	7,80	5,65

6,306	7,505	9,034	11,059	13,888	16,252	18,272	mA
4,70	3,75	2,90	2,15	1,50	1,10	0,9	ks/F

Problema poate fi rezolvită pe orice cale, obţinându-se rezultate foarte apropiate. Analitic, caracteristica este de forma $i = k\,v^{n}$ în care se poate lua $n = 3/2$ şi $K = 22.10^{-6}\,.\,Av^{-\frac{3}{2}}$.

15.5. Se rezolvă în acelaşi mod, calculându-se integrala

$$\frac{t}{L}=\int_{i_0}^{i_t}\frac{di}{E-v(i)}$$

şi obţinându-se rezultatul :

$\frac{t}{L}$	0	0,0095	0,0242	0,0465	0,0751	0,1144	0,1684
i	0	0,9	2,15	3,75	5,65	7,80	10,20

$\frac{t}{L}$	0,2033	0,2466	0,2961	0,3605	0,3964	0,4416	0,4945
i	11,50	12,90	14,25	15,68	16,35	17,08	17,80

$\frac{t}{L}$	0,5575	0,6250	0,7126	0,8376	1,0776	∞	mA
i	18,50	19,10	19,70	20,30	20,94	∞	ms/H

15.6. Un circuit serie cu condensator şi rezistenţă neliniară. Problema se rezolvă ca mai sus, prin integrare directă deoarece se cunoaşte ecuaţia caracteristicei rezistenţei nelineare.

Se calculează curentul tranzitoriu de descărcare a condensatorului în ambele cazuri şi se compară rezultatele.

15.7. Caracteristica volt-amper a thyritei conduce la ecuaţia $i = 5.10^{-3}\,u$ şi problema se poate rezolva analitic ca şi problema precedentă.

15.8. Punctul de coordonate (i, u) se găseşte pe curba (1). Aplicând legea lui Kirchhoff se găseşte $Ri + u = u_0$ sau $0{,}4\,.\,10^6 i + u = 500$, o dreaptă (2) care tae curba (1) în punctul $i = 0{,}36$ mA şi $u = 360$ V. Pentru a doua chestiune $R = 0{,}35$ M Ω.

15.9. Fie i_1 curentul în elementul nelinear, i_2 curentul din rezistenţa R şi u tensiunea comună. Aplicând legea întâia a lui Kirchhoff rezultă

$$i_1 + \frac{u}{0{,}5.10^6} = 0{,}84.10^{-7}.$$

Punctul de funcţionare se găseşte la intersecţia acestei drepte (3) cu curba (1) (fig. 15.8). Se găseşte $u = 320$ V, $i_1 = 0{,}9$ mA, $i_2 = 0{,}64$ mA.

15.10. Problema se rezolvă grafic*). Neglijând căderea ohmică din circuit, ecuaţia de funcţionare a transformatorului este $w\,\frac{d\Phi}{dt} = E\sqrt{2}\,\sin\,(\omega t + \psi)$. Unghiu ψ se determină scriind că la timpul $t=0$, $E\sqrt{2}\sin\psi = -\frac{1}{2}E\sqrt{2}\;.\!\cdot.\;\psi = -30^0$.

Din ecuaţia de mai sus se determină expresia fluxului $\Phi = \frac{E\sqrt{2}}{w\,\omega}\,\sin\left(\omega t + \psi - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)$. Curba fluxului este nesinusoidală având un termen constant.

Curba de magnetizare se construeşte pentru întreg ciclul de histerezis. Curba curentului de magnetizare se construeşte pe cale grafică, apoi se descompune în armonice.

---

*) Vezi I. S. Antoniu, Chestiuni speciale de electrotehnică, Bucureşti, 1952, pag. 429.

15.11. Ecuaţia de funcţionare a circuitului este $L\frac{di}{dt}+u_R+\frac{1}{C}\int i dt=e,$ în care U_R reprezintă caracteristica neliniară a rezistenţei întregului circuit: $U_R = v_1(i) + Ri$.

Notând $u_C(t) = \frac{1}{C}\int i dt$ tensiunea la bornele condensatorului, din ecuaţia de funcţionare se deduce $di = \frac{1}{L}\left[e-u_R-u_C(t)\right] dt$. Soluţia se obţine presupunând că în intervalul de timp Δt, suficient de mic, variaţia curentului (di/dt) este constantă în întreg intervalul. Imediat după închiderea circuitului, care se consideră ca origină de timp, curentul rămâne egal cu zero din cauza prezenţei inductanţei; rezultă că şi $u_R = 0$ şi $u_C = 0$. Rezultă $\left(\frac{di}{dt}\right)_0 = \left(\frac{e}{L}\right)_{t=0}$. În ipoteza făcută că ($di/dt$) rămâne constant în intervalul de timp Δt, curentul la sfârşitul acestui interval va fi

$$\Delta i_1 = i_1 = \left(\frac{di}{dt}\right) \cdot \Delta t.$$

Cunoscând valoarea curentului i_1, din caracteristica volt-amper a rezistenţei neliniare se deduce u_{R1}. Pentru a găsi şi u_C la sfârşitul acestui prim interval se calculează cantitatea de electricitate inmagazinată în condensator în acest interval de timp, care este egală cu suprafaţa cuprinsă între curba de curent, axa timpurilor şi ordonata lui Δt_1. Pentru intervalul $0 - \Delta t_1$ se găseşte $q_1 = \frac{i_1}{2}\Delta t_1 \therefore u_{C1} = q_1/C$. Pentru al doilea interval curentul este $\left(\frac{di}{dt}\right)_1 = \frac{e_{t=t_1} - u_{R1} - u_{C1}}{L}$. In timpul acestui nou interval curentul creşte dela i_1 la $i_2 = i_1 + \Delta i_2$ în care $\Delta i_2 = \left(\frac{di}{dt}\right)_1 \Delta t_2 = \frac{e_{t=t_1}-u_{R1}-u_{C1}}{L} \Delta t_2$. In acelaşi interval de timp sarcina condensatorului creşte cu $\Delta q_2 = \frac{i_1 + i_2}{2} \Delta t_2 = \left(i_1 + \frac{\Delta i_2}{2}\right) \Delta t_2$, astfel că sarcina condensatorului la sfârşitul celui de al doilea interval este $q_2 = q_1 + \Delta q_2$, iar tensiunea la bornele condensatorului $u_{C2} = q_2/C$. Calculul se urmează la fel pentru oricâte intervale, obţinându-se curba curentului. Se va ţine seama că dioda nu redresează decât o singură alternanţă, cea negativă în cazul de faţă. Cunoscând curba curentului, printr'o integrare grafică se deduce curba tensiunii la bornele condensatorului şi deci la bornele de ieşire ale circuitului.

15.12. (a) Fie i_1 curentul care trece prin redresor şi i_2 curentul care trece prin rezistenţă. Prima lege a lui Kirchhoff dă $i=i_1+i_2$. Scriind că tensiunea la bornele comune este aceeaşi, se obţine ecuaţia $u=10^2\sqrt[3]{10^2\, i_1^2} = Ri_2$, care, rezolvată în raport cu i_1 dă $i_1 = 0{,}1$ A, celelalte două rădăcini fiind imaginare $\therefore i_2 = 0{,}1$ A.

(b) Ecuaţia de funcţionare a circuitului este $i = i_R + C\frac{du}{dt}$, în care i_R este curentul din redresor şi i curentul dat de generator. Ţinând seama de caracteristica redresorului şi separând variabilele, pentru datele numerice ale problemei se obţine

$$t = 10^{-2}\int\frac{du}{2.10^3 - u^{1,5}}$$

care efectuată dă

$$t = \frac{1}{10\sqrt[3]{2}}\left[\frac{1}{3}\ln\frac{10\sqrt[3]{200} - 20\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{u} + u}{10\sqrt[3]{200} + 10\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{u} + u} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{10\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{u}}{10\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}\right]$$

Pentru $t = 10^{-3}$ s se determină valoarea lui u din curba de mai sus.

15.13. Problema se rezolvă grafic ca și problema 15.4. Se deduce timpul de încărcare

$$t_1 = C\int_{E_{co}}^{E_{ct}} \frac{\mathrm{d}\,[E - v(i)]}{i}\ .$$

în care, toate elementele integralei sunt cunoscute. Cunoscând timpul t_2 de descărcare a condensatorului rezultă $\Delta t = t_1 - t_2$ și deci $f = 1/\Delta t$.

15.14. Problema se rezolvă analog cu precedenta. Ecuația de funcționare a circuitului este $L\frac{di}{dt} + v(i) = E$ pentru perioada de conectare la sursă și $L\frac{di}{dt} + v(i) = 0$ pentru perioada de scurtcircuitare. Prin separare de variabile și integrare între limitele de curent date în ambele cazuri, se găsește $t_1 =$ 0,01045 s și $t_2 =$ 0,00169 s de unde rezultă $f =$ 114 Hz.

15.15. Caracteristica volt-amper a rezistenței este $R\sqrt{i} = u\ \therefore\ i = \frac{1}{R^2}u^2$ și ecuația de funcționare a circuitului $L\frac{di}{dt} + R\sqrt{i} = U\sqrt{2}\sin\omega t$, ecuație neliniară care nu se poate rezolva decât grafic sau prin transformarea în ecuația integro-diferențială $i = i_0 - \frac{R}{L}\int_0^t \sqrt{i(t)}\,dt + \frac{U\sqrt{2}}{L}\int_0^t \sin t\omega\,dt$ și care se rezolvă prin aproximații succesive.

15.16. Se shuntează intrerupătorul cu o rezistență $\rho = Kt$. Ecuațiile circuitului sunt

$$(R + R_1)\,i - R_1 i_1 + L\frac{di}{dt} = 0$$

$$-R_1\,i + (\rho + R_1 + R_2)\,i_1 = E$$

din care eliminând pe i, se obține o ecuație diferențială lineară de forma

$$\frac{di}{dt} + p\,(t)\,i + q\,(t) = 0$$

în care

$$p\,(t) = \frac{R + R_1}{L} - \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 + Kt}$$

$$q\,(t) = -\frac{R_1 E}{R_1 + R_2 + Kt}$$

a cărei soluție este

$$i = \varepsilon^{-\int p(t)\,dt}\left[C - \int q(t)\,\varepsilon^{\int p(t)\,dt}\,dt\right]$$

constanta de integrare C se determină scriind că, la timpul $t = 0$ are valoarea regimului permanent stabilit în problema 13.43. Cunoscând curentul i_1 se deduce curentul i_2.

15.17. Diodele având o rezistenţă infinită pentru sensul curentului dela catod către anod (dela filament către placă), la închiderea intrerupătorului K curentul $i_2 = 0$, iar la deschiderea acestuia, curentul $i_1 = 0$.

(*a*) La închiderea intrerupătorului ecuaţiile de funcţionare ale circuitului se obţin aplicând metoda circuitelor independente şi luând ca bucle (1) RLE şi $E(1)$: $v(i_1) = E \therefore i_1 = 7{,}8$ mA. $L\dfrac{di_3}{dt} + Ri_3 = E \therefore i_3 = 12{,}5\,(1-\varepsilon^{-400t})$ mA şi $i = i_1 + i_3 = 20{,}3 - 12{,}5\,\varepsilon^{-400t}$ mA.

(*b*) La deschiderea întrerupătorului $i_1 = 0$, $i = 0$ şi $i_2 = i_3$. Ecuaţia de funcţionare este $L\dfrac{di_3}{dt} + Ri_3 + v(i) = 0$, care prin separarea variabilelor şi integrare dă

$$t = -L\int_{i_0}^{0}\frac{di_3}{Ri_3 + v(i)}.$$

Această integrală se efectuează grafic aşa după cum s'a arătat în problema 15.4.

15.18. (*a*) In timpul unei alternanţe nu funcţionează decât o singură diodă. Ecuaţia de funcţionare este

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L + v(i) = e,$$

care se rezolvă grafic

(*b*) Da.

15.19. (*a*) Ecuaţia de funcţionare a circuitului este analoagă cu ecuaţia din problema precedentă, şi se rezolvă grafic.

(*b*) Cunoscând curba $i = f(t)$ dedusă mai sus, se calculează pentru fiecare moment produsul $u\,i\,t$, u fiind luat din caracteristica arcului. Suma acestor produse dă energie disipată în arc.

(*c*) Tot din curba de curent se calculează pentru fiecare moment valoarea expresiei $Ri + L\dfrac{di}{dt} = f(t)$ trasându-se curba corespunzătoare.

(*d*) Se caută condiţia pe care trebue să o îndeplinească R pentruca i să devină nul.

15.20. Circuitul comportă acum două bucle şi se determină curenţii corespunzători, prin integrare grafică.

15.21. Se presupune că maşina nu este saturată şi deci se poate scrie $w\Phi = w\,\Phi_0 + K\,i$, Φ_0 fiind fluxul remanent. R şi L fiind rezistenţa şi inductanţa întregului circuit (maşina şi sarcina), iar $e = nw\Phi$, forţa electromotoare produsă de maşină, ecuaţia de funcţionare a maşinii este

$$(R - K\,n)\,i + L\frac{di}{dt} = n\,w\,\Phi_0$$

Aplicând criteriul lui Hurwitz, pentru ca curentul să crească cu timpul trebue ca regimul liber să nu se amortizeze şi deci $a_1 < 0$, determinantul lui Hurwitz reducându-se numai la acesta. Se obţine $n > \dfrac{R}{K}$, regimul critic fiind pentru $n = \dfrac{R}{K}$, viteză sub care maşina nu se amorsează. Trebue deci ca R să fie mic

şi K suficient mare, K fiind proporţional cu produsul numărului de spire al indusului şi inductorului şi invers proporţional cu reluctanţa circuitului magnetic.

15.22. Dacă r, R, R_e, L şi n sunt rezistenţa inductorului, rezistenţa indusului, rezistenţa circuitului exterior, inductanţa inductorilor şi viteza maşinei, ecuaţiile de funcţionare ale maşinei sunt

$$e = R(I + i) + R_e I = R(I + i) + ri + L\frac{di}{dt} = nw\Phi_0 + Kni,$$

în care I este curentul principal al maşinei şi i curentul de excitaţie. S'a neglijat inductanţa indusului şi s'a presupus maşina nesaturată. Eliminând pe I şi e între aceste ecuaţii se obţine

$$\left(r + R + \frac{rR}{R_e} - Kn\right) i + L\left(\frac{R + R_e}{R_e}\right)\frac{di}{dt} = n\omega\,\Phi_0$$

Aplicând criteriul lui Hurwitz, pentruca curentul să crească cu timpul, trebue ca

$$a_1 = r + R + \frac{rR}{R_e} - Kn < 0$$

de unde condiţia de amorsare a maşinei

$$n > \frac{R + r + \dfrac{Rr}{R_e}}{K},$$

rezultă că şi în acest caz există o viteză critică sub care maşina nu se amorsează. Trebue deasemenea ca R_e să fie mare.

15.23. Desvoltând produsul se găseşte o ecuaţie de gradul 3 în p. Condiţia de funcţionare în regim critic este $a_1a_2 - a_0a_3 = 0$, de unde se găseşte $K_1K_2K_3 = 122$.

15.24. Ecuaţiile circuitului scrise în cantităţi complexe sunt

$$\rho \overline{I}_1 = \overline{U} + K\,\overline{V}$$

$$\overline{U} + L_1 \overline{p}\,\overline{I}_1 + M_1 \overline{p}\,\overline{I}_2 = 0$$

$$\overline{V} = M_2 \overline{p}\,\overline{I}_2$$

$$\left(R + \overline{p}\,L_2 + \frac{1}{\overline{p}C}\right)\overline{I}_2 + M_1 \overline{p}\,\overline{I}_1 = 0$$

între care eliminând pe $\overline{U}$, $\overline{V}$ şi $\overline{I}_1$ şi ţinând seama că $\overline{I}_2 = 0$, se obţine

$$[M_1(KM_2 - M_1) + L_1L_2]\,\overline{p}^3 + (\rho L_2 + RL_1)\,\overline{p}^2 + \left(\frac{L_1}{C} + \rho R\right)\overline{p} + \frac{\rho}{C} = 0$$

Condiţia de producere a undelor autoîntreţinute este $a_1a_2 - a_0a_3 < 0$, de unde

$$KM_2 > M_1 + \frac{CR\rho}{M_1}\left(L_2 + \frac{R}{\rho}L_1\right) + \frac{L_1^2}{M_1}\frac{R}{\rho}$$

dacă $M_1 > 0$ şi $M_2 > 0$. In caz contrariu se schimbă şi semnul inegalităţii de mai sus.

16. *16.1.* *a)*

1
8
—4
8

; *b)*

— 2
—3
4
—5

; *c)* 28 ;

d)

—2	10	0	6
—3	15	0	9
4	—20	0	—12
—5	25	0	15

; *e)*

4	10	0	— 4
6	15	0	— 6
—8	—20	0	8
10	25	0	—10

; *f)*

34
51
—68
85

;

g)

9	19	25	—2

16.2. a) $-\dfrac{1}{9}$

16	—8	1
—14	7	—2
1	—2	1

b)

1		
	1	
		1

16.3. Se găsește:

$$\|e_1\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|e_3\| = (\|Z_1\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_7\|) \cdot \|i_1\| + (\|Z_2\| - \|Z_3\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_8\|) \cdot \|i_2\|$$

$$\|e_2\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|e_3\| = (\|Z_4\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_7\|) \cdot \|i_1\| + (\|Z_5\| - \|Z_6\| \cdot \|Z_9\|^{-1} \cdot \|Z_8\|) \cdot \|i_2\|.$$

16.4. Calculul se face utilizându-se proprietățile matricelor compuse și nu prezintă nicio dificultate.

16.5. Se descompun matricele date în raport cu ultima linie și coloană transformându-se în matrice compuse din care se scot două ecuații matriciale

Scanned with OKEN Scanner

cu două matrice necunoscute; din acestea se elimină necunoscuta respectivă. Rezultatul obţinut se scrie din nou în funcţie de elementele date şi se procedează apoi în acelaşi mod până la obţinerea ultimei necunoscute. Eliminantul are forma $\|Z'\| = \|Z_1\| - \|Z_2\| \cdot \|Z_4\|^{-1} \cdot \|Z_3\|$.

16.6. Se scrie ecuaţia matricială a sistemului dat, care se descompune în matrice în raport cu necunoscutele căutate. Folosind eliminantul dat mai sus, se găseşte până la urmă:

	=			·	
4		67	63		x
−4		101	105		y

Soluţia se găseşte calculând:

$\|X\| = \|A\|^{-1} \cdot \|B\|$.

16.7. Se procedează ca mai sus. Se găseşte:

	=			·	
15		1,5	11		y
14		3,5	26		x

16.8. Se aplică relaţia dată şi se găseşte:

a)

0	0	0
0	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$
0	$\cos\theta$	$-\sin\theta$

; *b*) $\omega \times$

0	$-\sin\omega t$	0
$\cos\omega t$	0	$\cos\omega t$
0	$-\sin\omega t$	0

16.9. Se obţine efectuând produsul matricial între cele două matrice, produsul $x_n \cdot A_n$ fiind $\frac{d\,a_n}{d\,x_n}$. Se obţine:

m	x_m
n	x_n
k	x_k

·

a	*h*	*c*
$\cos x_m$	2	$\sin x_k$

=

	a	*h*	*c*
m	$-\sin x_m$	0	0
n	0	0	0
k	0	0	$\cos x_k$

Scanned with OKEN Scanner

16.10 Se aplică relaţia dată şi se găseşte :

$$a)\quad \begin{Vmatrix} 2\theta + A & -\cos\theta + B & \sin\theta + C \end{Vmatrix}$$

$$b)\quad \frac{1}{\omega}\begin{Vmatrix} & \sin \omega t + B' \\ \omega t + A' & -\cos \omega + C' \end{Vmatrix}$$

în care A, B, C, etc. sunt constantele de integrare.

16.11. Se calculează făcând produsul matricial :

$$\int \| A \| \cdot \| dx \|$$

Se găseşte :

$\| I \| = (\sin x_a + A) + (3x_b + B) - (\cos x_c + C)$, $A,B,C,$ fiind constantele de integrare.

16.12. In acelaşi mod se găseşte :

$$\int \| B \| \cdot \| dx \| = \frac{1}{\omega}\begin{Vmatrix} (\sin \omega x_a + A) + (\sin \omega x_c + C) \\ (\omega x_a + A_1) - (\cos\omega\, x_b + B_1) + (2\omega x_c + C_1) \end{Vmatrix}$$

A, A_1, B, C, C_1 fiind constantele de integrare.

$$16.13.\ a)\ \| e \|^* = \begin{Vmatrix} e_1 \\ e_2 + je_3 \end{Vmatrix};$$

$$b)\ \| e \|^* = \begin{Vmatrix} \varepsilon^{-j\theta} & \\ & \varepsilon^{j\theta} \end{Vmatrix};\quad c)\ \| Z \|^* = \begin{Vmatrix} p + jp\theta & Z\,\varepsilon^{-ja} \\ Z & p - jp\theta \end{Vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

16.14. Ţinând seama de indicii liniilor şi coloanelor se găseşte :

ERATĂ

Pag.	Rândul	In loc de	A se citi
222	6 de sus	3.25	4.25
222	9 de sus	3.26	4.26
222	13 de jos	3.27	4.27
222	6 de jos	3.29	4.28
223	16 de sus	3.29	4.29
228	5.18 soluţie	Se găseşte OP_2 proiecţia vectorului	Vectorul $\overline{S}_2$ obţinut, la scara 25 mm = = 10 MVA, reprezintă puterea aparentă maximă teoretică pe care o putem obţine pentru cele două tensiuni E şi U şi impedanţa $\overline{Z}$ date. Punctul real de funcţionare cu putere maximă corespunde intersecţiei cercului cu centrul în O_2 şi raza r, cu cercul cu centrul în O şi raza egală cu 5000 kVA. In acest caz se obţine $P_{2\,max.\,real} = 4{,}7$ MW ; $\eta_{real} = 0{,}88$.
403	1 de sus	$t \geqslant 1$	$t \geqslant 0$
404	1 de sus	$t \geqslant 1$	$t \geqslant 0$
405	1 de sus	$t \geqslant 1$	$t \geqslant 0$
406	1 de sus	$t \geqslant 1$	$t \geqslant 0$

Culegere de probleme de electrotehnică

... identificare se obţin n^2 ecuaţii lineare în a_{jk} (n^2 fiind numărul de elemente

16.14. Ţinând seama de indicii liniilor şi coloanelor se găseşte :

$$\| C \|^{-1} = \frac{1}{3} \| C_t \|^{*} = \frac{1}{3}$$

	a	*b*	*c*
h	1	1	1
d	1	a	a^2
i	1	a^2	a

$$\| C_t \|^{-1} = \frac{1}{3} \| C \|^{*} = \frac{1}{3}$$

	h	*d*	*i*
a	1	1	1
b	1	a	a^2
c	1	a^2	a

$$\| C_t^{*} \|^{-1} = \frac{1}{3} \| C \| = \frac{1}{3}$$

	h	*d*	*i*
a	1	1	1
b	1	a^2	a
c	1	a	a^2

$$\| C^{*} \|^{-1} = \frac{1}{3} \| C_t \| = \frac{1}{3}$$

	a	*b*	*c*
h	1	1	1
d	1	a^2	a
i	1	a	a^2

16.15. Fie A_{jk} elementele matricei date şi a_{jk} elementele matricei inverse. Se scrie :

$$\| A_{jk} \| \; \| a_{jk} \| = \| 1 \|$$

prin identificare se obţin n^2 ecuaţii lineare în a_{jk} (n^2 fiind numărul de elemente

Scanned with OKEN Scanner

ale matricei date) din care se calculează elementele matricei inverse şi se vede că ele sunt de forma cunoscută $(-1)^{j+k}\dfrac{\delta_{jk}}{\Delta}$.

17. *17.1.* Alegându-se drept curenţi independenţi curenţii din laturile AB, GB, FH şi DA, se găseşte uşor:

$\|C\| =$

	s	t	u	v
a	1			
b	−1			1
c	1	1		
d			1	
f			−1	1
g				1
h		1		
j		1	−1	1

; $\|e'\| =$

s	
t	e_h
u	
v	e_g

$\|Z'\| =$

	s	t	u	v
s	$Z_a + Z_b + Z_c$	Z_c		$-Z_b$
t	Z_c	Z_c		
u			$Z_d + Z_f$	$-Z_f$
v	$-Z_b$		$-Z_f$	$Z_b + Z_f$

Observaţii: 1° Rezultatele finale depind de curenţii independenţi aleşi. A se verifica.

Scanned with OKEN Scanner

2⁰ Matricea $\|Z\|$ este diagonală şi are ultimele trei linii şi coloane nule. Se va profita de aceasta pentru a se simplifica calculul lui $\|Z'\|$ prin utilizarea matricelor compuse.

17.2. Se iau drept curenţi independenţi curenţii din laturile BC, CG, AD şi FG. Se găseşte :

$\|C\| =$

	s	t	u	v
a		1	−1	1
b	1			
c	1	−1		
d	1	−1	1	
f				1
g			1	1
h			1	
j	−1	1	−1	1
k		1		
l			1	
m	1	−1	1	−1
n		−1		

$\|e'\| =$

s	
t	
u	e_l
v	e_f

$\|Z'\| =$

	s	t	u	v
s	$Z_b+Z_c+Z_d+$ $+Z_j+Z_m$	$-Z_c-Z_d-$ $-Z_j-Z_m$	$Z_d+Z_j+Z_m$	$-Z_j-Z_m$
t	$-Z_c-Z_d-$ $-Z_j-Z_m$	$Z_a+Z_c+Z_d+Z_j+$ $+Z_k+Z_m+Z_n$	$-Z_a-Z_d-$ $-Z_j-Z_m$	$Z_a+Z_j+Z_m$
u	$Z_d+Z_j+Z_m$	$-Z_a-Z_d-Z_j-Z_m$	$Z_a+Z_d+Z_g+Z_h+$ $+Z_j+Z_l+Z_m$	$-Z_a+Z_g-$ $-Z_j-Z_m$
v	$-Z_j-Z_m$	$Z_a+Z_j+Z_m$	$-Z_a+Z_g-$ $-Z_j-Z_m$	$Z_a+Z_g+Z_j+Z_m$

Scanned with OKEN Scanner

17.3. Se aplică prima lege a lui Kirchhoff nodurilor A, B şi C. Se găseşte sistemul $\|K\| \cdot \|i\| = 0$ în care

$\|K\| =$

	a	b	c	d	f	g	h
A		−1	−1			1	
B			1		−1		1
C	−1			1			−1

17.4. Neglijând curentul de magnetizare se găseşte: $n_a i_a + n_b i_b + n_c i_c + n_d i_d + n_f i_f = 0$. Aplicând metoda indicată în breviar (17.5 β) rezultă

$\|C\| =$

	a'	b'	c'	d'
a	1			
b		1		
c			1	
d				1
f	$-\frac{n_a}{n_f}$	$-\frac{n_b}{n_f}$	$-\frac{n_c}{n_f}$	$-\frac{n_d}{n_f}$

17.5. Schema transformatorului şi reţeaua primitivă a acestuia sunt date în figura 17.5. Fiind numai doi curenţi independenţi, se obţine

$\|C_1\| =$

	1'	3'
1	1	
2		$-a^2$
3		1
4		1

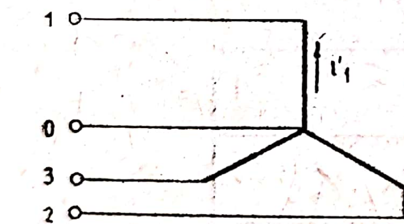
o matrice complexă.

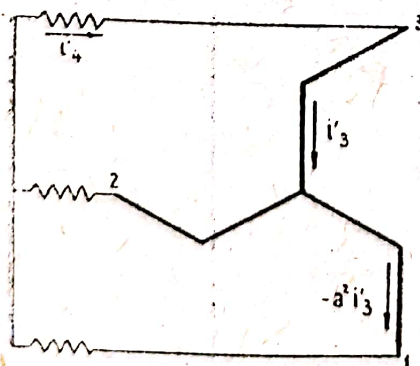
Circuitul magnetic dă

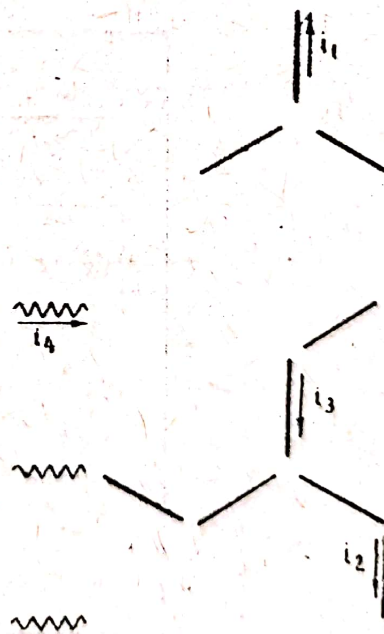
$$\| C_2 \| = \begin{array}{c|c|} & 3'' \\ 1' & N \\ 3' & 1 \end{array}$$

în care s'a notat $N = \dfrac{n_2 a^2}{n_1} - \dfrac{n_3}{n_1}$. Rezultă

$$\| C \| = \| C_1 \| \cdot \| C_2 \| = \begin{array}{c|c|} & 3'' \\ 1 & N \\ 2 & -a^2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}$$







(a) Fig. 17.5 (b)

17.6. Reţeaua primitivă este dată în figura 17.6. Se găseşte astfel:

$\| C_1 \| =$

	a'	b'
a	1	
b		1
c		$a-a^2$
d		$a-a^2$

, $\| C_2 \| =$

	b''
a'	$-N$
b'	1

, $\| C \| =$

	b''
a	$-N$
b	1
c	$a-a^2$
d	$a-a^2$

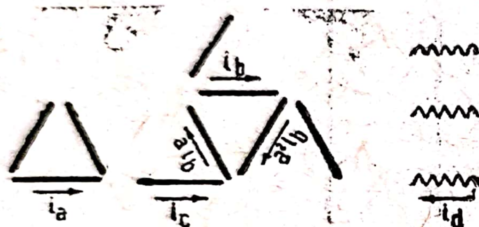


Fig. 17.6.

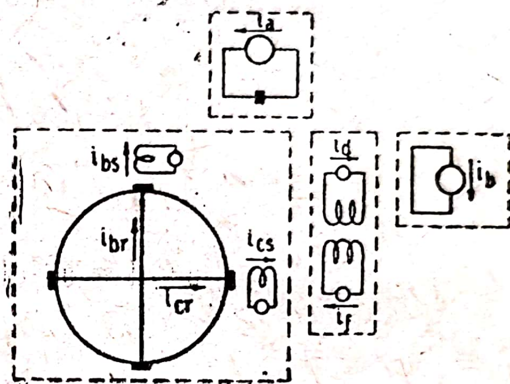


Fig. 17.7

17.7. Reţeaua primitivă este dată în figura 17.7. de unde rezultă imediat matricea de conexiune căutată.

$\| C \| =$

	b'_s	b'_r	c'_r	c'_s	d'
b_s	1				
b_r		1			
c_r			1		
c_s				n_s	
a	1				
b	1				-1
d					n_d
f				$-n_f$	

Scanned with OKEN Scanner

17.8. Se iau drept curenţi independenţi curenţii din laturile AB, CD şi AC. Se găseşte:

$\| C \| =$

	p	q	r
a			1
b		−1	1
c		1	
d	1		1
f	−1	1	−1
g	1		

; $\| e' \| =$

p	e_g
q	e_c
r	

$\| Z' \| =$

	p	q	r
p	$Z_{dd}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff}+$ $+Z_{gg}$	$Z_{df}-Z_{ff}$	$Z_{dd}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff}$
q	$Z_{fd}-Z_{ff}$	$Z_{bb}+Z_{cc}+Z_{ff}$	$-Z_{ba}-Z_{bb}+Z_{fd}-Z_{ff}$
r	$Z_{dd}-Z_{df}-Z_{fd}+Z_{ff}$	$-Z_{ab}-Z_{bb}+Z_{df}-Z_{ff}$	$Z_{aa}+Z_{ab}+Z_{ba}+Z_{bb}+$ $Z_{dd}-Z_{df}-Z_{fd}-Z_{ff}$

Curenţii se calculează cu relaţia (123) de unde rezultă:

$$\| i' \| = \| Z' \|^{-1} \cdot \| e' \| .$$

Se găsesc apoi curenţii în laturi cu relaţia (119) şi diferenţele de potenţiale la bornele fiecărui element cu relaţia (124).

Pentru a găsi condiţia de echilibru a punţii Wheatstone se scrie că $e_{AB} = 0$, ceeace duce la $e_g = 0$; $Z_{ab} = Z_{ba} = 0$; $Z_{df} = Z_{fd} = 0$. Se găseşte condiţia cu noscută Z_{dd} $Z_{bb} = Z_{aa} \cdot Z_{ff}$.

Observaţii. Pentru rezolvarea ultimului punct nu este necesar să se facă întreg calculul, în special al matricei inverse. Este suficient să se calculeze numai elementul corespunzător.

Se găseşte condiţia de echilibru sub forma:

$$\frac{e_{cc}}{\Delta} \cdot \beta \cdot Z_{gg} = 0 \;\therefore\; \beta = 0$$

în care β este elementul corespunzător al matricei $\| Z' \|^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

17.9. Sunt doi curenţi independenţi. Se găseşte :

$$\| C \| = \begin{array}{c|c|c} & p & q \\ \hline a & 1 & \\ b & & 1 \\ c & & 1 \\ d & & 1 \end{array} \; ; \qquad \| e' \| = \begin{array}{c|c} p & \\ q & e_d \end{array}$$

$$\| Z' \| = \begin{array}{c|c|c} & p & q \\ \hline p & R_a + pL_a & pM_2 + (M_1 + M_3)p\,\theta \\ q & -M_3p\theta + pM_6 & R_b + R_c + p(L_b + L_c) + p(M_4 + M_7) + M_5p\,\theta \end{array}$$

Ecuaţiile diferenţiale ale maşinii se obţin cu prima relaţie (120). Se găseşte :

$$0 = R_a i_p + L_a \frac{di_p}{dt} + M_2 \frac{di_q}{dt} + (M_1 + M_3)\, i_q \frac{d\theta}{dt}$$

$$e_d = (R_a + R_c)\, i_q + (L_b + L_c + M_4 + M_7) \frac{di_q}{dt} + M_6 \frac{di_p}{dt} + (M_5 i_q + M_3 i_p) \frac{d\theta}{dt} .$$

17.10. 1° Deşi cubul are cinci curenţi independenţi, se ia un al şaselea curent independent dat de o sursă fictivă legată între două vârfuri oarecari ; aceasta pentru a se putea rezolva a doua parte a problemei. In funcţie de alegerea curenţilor independenţi şi a vârfurilor cuburilor se găsesc matricele $\| C \|$ corespunzătoare. Se deduc apoi matricele $\| Z' \|$. Calculul se simplifică observând că matricea $\| Z \|$ este o matrice unitate. Deasemenea este bine ca primul curent independent să fie luat acel din circuitul fictiv suplimentar.

2° Din ecuaţia matricială :

$$\| e \| = \| Z \| \cdot \| i \|$$

rezultă că impedanţa căutată va fi aceea care răspunde ecuaţiei algebrice :

$$e_{AB} = Z_{AB} \cdot i_1$$

care se obţine prin eliminarea celorlalţi curenţi (dintr'odată, sau prin două etape). Eliminantul este de forma :

$$\| Z_1 \| - \| Z_2 \| \cdot \| Z_4 \|^{-1} \cdot \| Z_3 \| .$$

Se găsește: *a*) cele două vârfuri sunt adiacente unei muchii a cubului: $Z_{AB} = 0{,}57\,\Omega$; *b*) cele două vârfuri sunt adiacente diagonalei unei fețe: $Z_{AB} = 0{,}75\,\Omega$; *c*) cele două vârfuri sunt adiacente unei diagonale a cubului: $Z_{AB} = 0{,}833\,\Omega$.

17.11.

$\|C_4\| =$

	h	*k*	*m*	*n*
p	1			1
q	1	−1	1	
r		−1		
s		−1		−1

17.12. Se scriu vechii curenți în funcție de noii curenți găsindu-se matricea căutată.

17.13. Se scriu curenții rețelelor simple în funcție de curenții independenți ai rețelei interconectate, care are 12 curenți independenți.

17.14. Rețeaua interconectată a complexului de mașini are patru curenți independenți. Alegându-se drept curenți independenți $i_a = i_s$; $i_b = i_r$; $i_c = i_2$ și $i_f = i_q$, se scrie imediat matricea de conexiune căutată

$\|C\| =$

	a	*b*	*c*	*f*
s	1			
r		1		
1		1		
2			1	
d			−1	
q				1

cu ajutorul căreia, folosind proprietăţile matricelor compuse. se găseşte :

$$\|e'\| = \begin{array}{c|c|} a & e_s \\ \hline b & \\ \hline c & \\ \hline f & e_q \end{array}$$

$\|Z'\| =$

	a	b	c	f
a	R_s+pL_s	$M \cos \alpha p$		
b	$M(\cos \alpha p - - \sin \alpha p\theta_1)$	$R_R+R_1+ +p(L_R+L_1)$	pM_{12}	
c		pM_{12}	$R_2+R+p(L_2+L)$	$-Lp\theta_2$
f			$Lp\theta_2$	$R+pL$

17.15. Se desenează circuitul echivalent al montajului dat, care are şase curenţi independenţi (fig. 17.15) ce se aleg arbitrar. Scriind curenţii din laturi

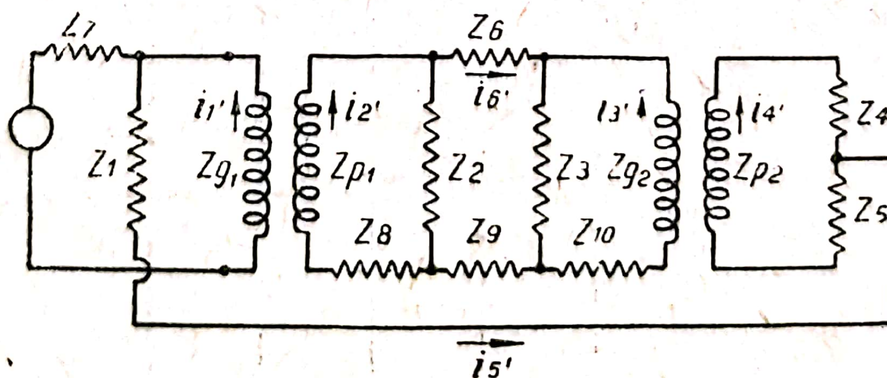


Fig. 17.15

în funcţie de noii curenţi se găseşte matricea de conexiune a circuitului cu ajutorul căreia se calculează $\| Z' \|$. Se găseşte:

$\| Z' \| =$

	1′	2′	3′	4′	5′	6′
1′	Z_z+Z_{gg1}	Z_{gp1}			$-Z_7$	
2′	Z_{pg1}	Z_2+Z_8+ $+Z_{pp1}$			Z_8	$-Z_2$
3′			$Z_3+Z_{10}+$ $+Z_{gg2}$	Z_{gp2}	$-Z_{10}$	Z_3
4′			Z_{pg2}	Z_4+Z_5+ Z_{pp2}	Z_5	
5′	$-Z_7$	Z_8	$-Z_{10}$	Z_5	Z_1+Z_5+ Z_7+Z_8+ $+Z_9+Z_{10}$	Z_9
6′		$-Z_2$	Z		Z_9	Z_2+Z_3+ $+Z_4+Z_9$

17.16. Reţeaua are trei curenţi independenţi. Alegând curenţii din laturile AB, CA şi DC, se găseşte matricea de conexiune:

$\| C \| =$

	p	q	r
a	1		
b		1	
c		−1	1
d	−1	1	
f	1	−1	1
g			1

Scanned with OKEN Scanner

b) Puterea respectivă:

$$\overline{S} = \| e'_l \| \cdot \| i' \|^* = 65{,}52 \text{ kVA}.$$

care se repartizează:

$$\overline{S}_d = 57{,}0 - j\,2{,}0 \text{ kVA} \quad \text{și} \quad \overline{S}_f = 8{,}52 + j\,2{,}0 \text{ kVA}$$

Puterea absorbită de rețea este reală deoarece rețeaua este formată numai din rezistențe ohmice. Puterea reactivă, produsă de un generator este absorbită de al doilea.

c)

$\| {}_l e \| =$ (V):

a	$106{,}8 + j\,69{,}6$
b	$-168 - j\,78{,}6$
c	$69{,}7 + j\,8{,}5$
d	$224 + j\,122$
f	$130{,}4 - j\,210{,}4$

*17.18. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește:

a)

$\| i \| =$;

a	$-26 - j\,34$
b	$-47 + j\,2$
c	$24 + j\,6$
d	$21 - j\,36$
f	$50 + j\,40$

Scanned with OKEN Scanner

b) $\overline{S} = 27{,}95$ kW, care se repartizează ; $\overline{S}_d = 12{,}54 + j\,3{,}30$ kVA şi $\overline{S}_f = 15{,}4 - j\,3{,}30$ kVA.

c)

$\| e_l \| =$

a	$-26 - j\,34$
b	$-94 + j\,4$
c	$120 + j\,30$
d	$126 - j\,216$
f	$100 + j\,80$

17.19. a) Se iau cei trei curenţi independenţi pe laturile *CA*, *AB*, *CB*. Matricea de conexiune este :

$\| C \| =$

	p	*q*	*r*
a		1	
b	1	—1	
c		1	1
d	1		
f			1

Se găseşte cu ajutorul ei :

$\| e' \| =$

p	$100 + j\,0$
q	
r	$100 + j\,100$

Scanned with OKEN Scanner

și

$\|Z'\| =$	p	q	r
p	$2 + j\,2$	$-2 - j\,2$	
q	$-2 - j\,2$	$6 + j\,3$	$1 - j\,3$
r		$1 - j\,3$	$0 + j\,5$

Ecuațiile de funcționare în regim permanent sunt :

$$100 + j\,0 = (2 + j\,2)\,i_p + (-2 - j2)\,i_q$$
$$0 = (-2 - j\,2)\,i_p + (6 + j\,3)\,i_q + (1 - j\,3)\,i_r$$
$$100 + j\,100 = (1 - j\,3)i_q + (0 + j\,5)i_r$$

b) Matricea inversă a lui $\|Z'\|$ fiind :

$\|Z'\|^{-1} = 10^{-2}$	p	q	r
p	$-6,2-j\,44,4$	$-2,2-j\,19,0$	$4,6-j\,10,2$
q	$-2,2-j\,19,0$	$-2,2-j\,19,0$	$0,7-j\,11,8$
r	$4,6-j\,10,2$	$0,7-j\,11,8$	$-15,5-j\,2$

se găsește :

$\|i'\| =$	
p	$8,6 - j\,50,0$
q	$10,3 - j\,30,1$
r	$-8,9 - j\,27,7$

și

$\|i\| =$	
a	$10,3 - j\,30,1$
b	$-1,9 - j\,19,9$
c	$1,4 - j\,57,8$
d	$8,6 - j\,50,0$
f	$-8,9 - j\,27,7$

c) $\bar{S} = \|e_i'\| \cdot \|i'\|^* = 2,74 - j\,8,66$ kVA.

Scanned with OKEN Scanner

17.20. a) Reţeaua are trei curenţi independenţi care se iau pe ramurile *BD*, *AC* şi *CB*. Matricea de conexiune este:

$\| C \| =$

	s	*t*	*u*
a	1		—1
b			1
c	1		
d	1	1	—1
f		—1	1
g			1

cu care se deduc:

$\| e' \| =$

s	100
t	
u	100

şi $\| Z' \| =$

	s	*t*	*u*
s	$6 + j$	3	$-5 - j\,3$
t	3	$3 + j\,5$	-3
u	$-5 - j\,3$	-3	$10 + j\,6$

Ecuaţiile de funcţionare în regim permanent sunt:

$$100 = (6 + j)\, i_s + 3\, i_t - (5 + j3)\, i_u$$
$$0 = 3\, i_s + (3 + j\,5)\, i_t - 3\, i_u$$
$$220 = -(5 + j\,3)\, i_s - 3\, i_t + (10 + j\,6)\, i_u$$

b) Matricea inversă a lui $\| Z' \|$ este:

$\| Z' \|^{-1} = 10^{-2}$

	s	*t*	*u*
s	$18{,}8 + j\,1{,}5$	$2{,}2 - j\,4{,}2$	$9{,}5 + j\,1{,}9$
t	$2{,}2 - j\,4{,}2$	$3{,}8 - j\,10{,}6$	$1{,}7 + j\,0{,}7$
u	$9{,}5 + j\,1{,}9$	$1{,}7 + j\,0{,}7$	$8{,}2 - j\,1{,}6$

Scanned with OKEN Scanner

şi se deduc curenţii căutaţi:

$$\| i' \| = \begin{array}{c|c|} s & 39{,}7 + j\,5{,}7 \\ \hline t & 5{,}9 - j\,2{,}7 \\ \hline u & 27{,}5 - j\,1{,}6 \end{array} \quad \text{şi} \quad \| i \| = \begin{array}{c|c|} a & 12{,}2 + j\,7{,}3 \\ \hline b & 27{,}5 - j\,1{,}6 \\ \hline c & 39{,}7 + j\,5{,}7 \\ \hline d & 18{,}1 + j\,4{,}6 \\ \hline f & 21{,}6 + j\,1{,}1 \\ \hline g & 27{,}5 - j\,1{,}6 \end{array}$$

c) $\overline{S} = 10020 - j\,218$ VA.

17.21. Reţeaua interconectată are cinci curenţi independenţi. Matricea de conexiune este:

$\| C \| =$

	a	b	c	d	f
p			1		
q	1				
r		1	—1		
s	—1		1		
t					1
u				1	

$$= \begin{array}{|c|} \| C_1 \| \\ \hline \| C_2 \| \end{array}$$

Tensiunea şi impedanţa reţelelor interconectate fiind:

$$\| e \| = \begin{array}{c|c|} p & 100 + j\,0 \\ q & \\ r & 100 + j\,100 \\ \hline s & 100 \\ t & \\ u & 200 \end{array} = \begin{array}{|c|} \| e_1 \| \\ \hline \| e_2 \| \end{array}$$

$\| Z \| =$

	p	q	r	s	t	u
p	2 + j 2	—2 — j 2				
q	—2 — j 2	6 + j 3	1 — j 3			
r		1 — j 3	j 5			
s				6 + j	3	—5 — j 3
t				3	3 + j 5	— 3
u				—5 — j 3	— 3	10 + j 6

se deduc aceleaşi matrice pentru noua reţea

$\| e' \| =$

a	-100
b	$100 + j\,100$
c	$100 - j\,100$
d	200
f	

şi $\| Z' \| =$

	a	b	c	d	f
a	$12+j4$	$1-j3$	-9	$5+j3$	-3
b	$-1-j3$	$j5$	$-j5$		
c	-9	$-j5$	$8+j7$	$-5-j3$	3
d	$5+j3$		$-5-j3$	$10+j6$	-3
f	-3		3	-3	$3+j5$

Calculul acestor matrice se face ţinând seama de proprietăţile matricelor compuse. Ecuaţiile de funcţionare căutate sunt:

$$100 = -(12 + j\,4)\,i_a - (1 - j3)\,i_b + 9\,i_c - (5 - j\,3)\,i_d - 3\,i_f$$
$$100 + j\,100 = (1 - j\,3)\,i_a + 5\,i_b - j\,5\,i_c$$
$$100 - j\,100 = -9\,i_a - j\,5 i_b + (8 + j\,7)\,i_c - (5 + j\,3)\,i_d + 3\,i_f$$
$$200 = (5 + j\,3)\,i_a - (5 + j\,3)\,i_c + (10 + j\,6)\,i_d - 3\,i_f$$
$$0 = -3\,i_a + 3\,i_c - 3\,i_d + (3 + j\,5)\,i_f$$

17.22. Schema circuitului este dată în fig. 17.22. Sunt doi curenţi independenţi. Problema se rezolvă trecând la reţeaua primitivă reală. Impendanţele

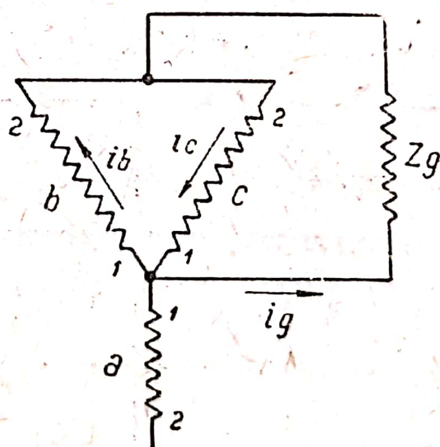


Fig. 17.22.

se calculează cu relaţia (128) din care se deduce $\|Z_1\|$; tensiunile se calculează cu relaţia (128) din care se deduce $\|e\|$. Se interconectează apoi cele două reţele

Scanned with OKEN Scanner

(alternatorul şi bobina de stingere), obţinându-se matricele impedanţă, tensiune şi de conexiune. Se găseşte:

$$\| e' \| = \begin{array}{c|c|} b' & (a^2 - a)\, e \\ \hline g' & -\, ae \end{array}$$

şi

$$\| i' \| = \begin{array}{c|c|} b' & 3e\,[(a^2 - a)\,(X_0 + 3\,Z_g) + (a^2 - 1)\,X_2] \\ \hline g' & 3e\,[2\,a\,X_1 + (1 - 2\,a^2)\,X_2] \end{array} \times \frac{1}{\Delta}$$

în care $\Delta = \frac{1}{3}\left[X_1X_2 + (X_1 + X_2)\,(X_0 + 3\,Z_g)\right]$ este determinantul matricei $\| Z' \|$.

Numeric se găseşte:

$$X_1 = j\,0{,}225\ \Omega;\ X_2 = j\,0{,}34\ \Omega;\ X_0 = j\,0{,}11\ \Omega$$

$$e = 3{,}46\ \text{kV}.$$

$$\| e' \| = \begin{array}{c|c|} b' & 6\ \underline{|-90^\circ} \\ \hline g' & 3{,}46\ \underline{|-60^\circ} \end{array}\quad \text{kV};\ \Delta = -\,8{,}52$$

şi deci:

$$\| i \| = \begin{array}{c|c|} b' & -95{,}11 + j\,0{,}34 \\ \hline g' & -0{,}54 - j\,1{,}19 \end{array}\quad \text{kA}$$

17.23. Schema circuitului este dată în fig. 17.23. Reactanţele alternatorului sunt: $X_s = j\,0{,}6\ \Omega$, $X_a = j\,0{,}9\ \Omega$, $X_h = j\,0{,}3\ \Omega$. Elementele date sunt impedanţele şi forţele electromotoare ale alternatorului în coordonate simetrice şi

impedanţele sarcinii în mărimi reale. Se trece la reţeaua primitivă reală, transformând impedanţele şi tensiunile respective. Se găseşte:

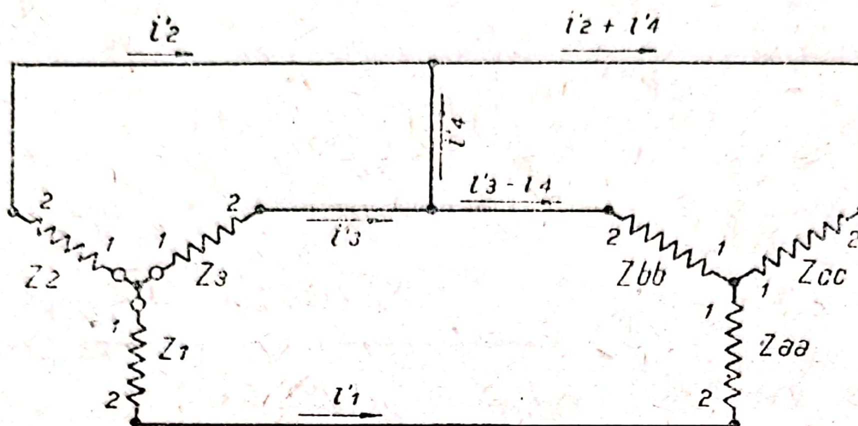


Fig. 17.23.

$$
\| Z_1 \| = \frac{j}{10}
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & a & b & c \\
\hline
a & 6 & 1 + 2a + 3a^2 & 1 + 2a^2 + 3a \\
\hline
b & 1 + 2a^2 + 3a & 6 & 1 + 2a + 3a \\
\hline
c & 1 + 2a + 3a^2 & 1 + 2a^2 + 3a & 6 \\
\hline
\end{array}
$$

şi

$$
\| e_1 \| = \frac{10}{\sqrt{3}}
\begin{array}{c|c|}
\hline
a & 1 \\
\hline
b & a^2 \\
\hline
c & a \\
\hline
\end{array}
\ \text{kV.}
$$

Interconectând cele două reţele se obţine matricea de conexiune:

$$
\| C \| =
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & 1' & 2' & 3' & 4' \\
\hline
1 & 1 & & & \\
\hline
2 & & 1 & & \\
\hline
3 & & & 1 & \\
\hline
a & -1 & & & \\
\hline
b & & -1 & & -1 \\
\hline
c & & & -1 & -1 \\
\hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|}
 & g' & l' \\
\hline
g & \| 1 \| & \\
\hline
 & \| -1 \| & \| A \| \\
\hline
\end{array}
$$

şi se calculează impedanţa şi tensiunea noii reţele. Se găseşte:

$\| Z' \| = \dfrac{j}{10}$

	1′	2′	3′	4′
1′	11	$1+2a+3a^2$	$1+2a^2+3a$	
2′	$1+2a^2+3a$	16	$1+2a+3a^2$	$-j\,10$
3′	$1+2a+3a^2$	$1+2a^2+3a$	26	$-j\,20$
4′		$-j\,10$	$-j\,20$	$-j\,30$

$\| e' \| = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

1′	1
2′	a^2
3′	a
4′	

Pentru calculul curenţilor se determină matricea $\| Z' \|^{-1}$, apoi se utilizează relaţiile (123) şi (119).

17.24. Schema defectului este dată în figura 17.24 iar matricele corespunzătoare sistemului sunt

$\| \overline{Z}_1 \| =$

	h'	d'	i'
h'	$\overline{Z}_0$		
d'		$\overline{Z}_s$	
i'			$\overline{Z}_a$

, $\| \overline{\mathfrak{Z}} \| =$

	h''	d''	i''
h''			
d''		$\overline{\mathfrak{Z}}_d$	
i''			$\overline{\mathfrak{Z}}_i$

$\| \overline{Z} \| =$

	h^{IV}
h^{IV}	$3\,\overline{Z}g$

$\| e \| =$

h'	
d'	e_1
i'	

Interconectând sistemul, se obţine matricele de impedanţă şi tensiune corespunzătoare.

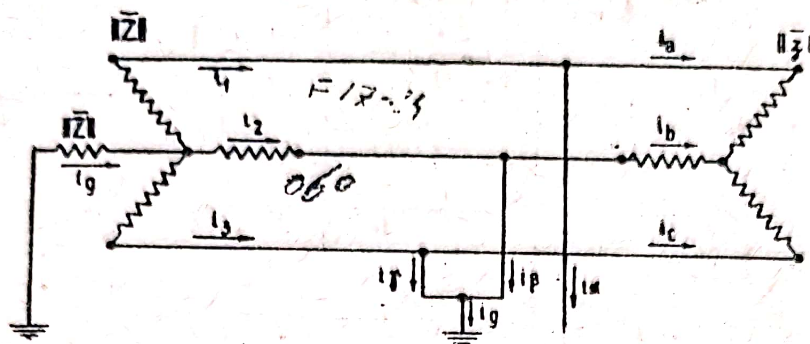


Fig. 17.24

$\| Z_{33} \| =$

	h'	d'	i'	h''	d''	i''	h'''	d'''	i'''	h^{IV}
h'	$\overline{Z}_0$									
d'		$\overline{Z}_s$								
i'			$\overline{Z}_a$							
h''										
d''					$\overline{Z}_d$					
i''						$\overline{Z}_i$				
h'''										
d'''										
i'''										
h^{IV}										$3\overline{Z}_g$

$\| e_3 \| =$

h'	
d'	e_1
i'	
h''	
d''	
i''	
h'''	
d'''	
i'''	
h^{IV}	

Scriind curenţii din reţeaua primitivă în funcţie de curenţii din reţeaua echivalentă se găseşte

$$i'_h = -i_d - i_i$$

$$i'_d = i_d$$

$$i'_i = i_i$$

$$i''_h = -i_d - i_i$$

$$i''_d = i_d$$

$$i''_i = i_i$$

$$i'''_h = -i_d - i_i$$

$$i'''_d = i_d$$

$$i'''_i = i_i$$

$$i^{IV}_h = -i_d - i_i$$

de unde $\| C_4^3 \| =$

	d	i
h'	−1	−1
d'	1	
i'		1
h''	−1	−1
d''	1	
i''		1
h'''	−1	−1
d'''	1	
i'''		1
h^{IV}	−1	−1

Scanned with OKEN Scanner

De aici, elementele reţelei echivalente

$\| Z_4 \| =$

	d	i
d	$\bar{Z}_0 + \bar{Z}_s + \bar{\mathfrak{z}}_d + 3\,\bar{Z}_g$	$\bar{Z}_0 + 3\,\bar{Z}_g$
i	$\bar{Z}_0 + 3\,\bar{Z}_g$	$\bar{Z}_0 + \bar{Z}_a + \bar{\mathfrak{z}}_i + 3\,\bar{Z}_g$

$\| e_4 \| =$

d	e_1
i	

Componentele simetrice ale curenţilor se găsesc resolvind ecuaţia

$$\| e_4 \| = \| Z_4 \| \cdot \| i_4 \|.$$

Rezultă:

$\| i_4 \| = \dfrac{e_1}{\Delta}$

d	$\bar{Z}_0 + \bar{Z}_a + \bar{\mathfrak{z}}_i + 3\,\bar{Z}_0$
i	$-\bar{Z}_0 - 3\,\bar{Z}_g$

în care

$$\Delta = \bar{Z}_0\,(\bar{Z}_g + \bar{Z}_a + \bar{\mathfrak{z}}_d + \bar{\mathfrak{z}}_i) + (\bar{Z}_a + \bar{\mathfrak{z}}_i)\,(\bar{Z}_s + \bar{\mathfrak{z}}_d + 3\,\bar{Z}_g) + 3\,\bar{Z}_g\,(\bar{Z}_s + \bar{Z}_d)$$

Pentru a se putea calcula curenţii căutaţi trebueşte determinată matricea

$$\| C_4^1 \| = \| C_2^1 \| \cdot \| C_3^2 \| \cdot \| C_4^3 \|.$$

Se găseşte

$\| C_2^1 \| =$

	1	2	3	b	c
1′	1				
2′		1			
3′			1		
1″	1				
2″				1	
3″					1
1‴					
2‴		1		−1	
3‴			1		−1
3IV	1	1	1		

$$\| C_3^2 \| =$$

	h'	d'	i'	h''	d''	i''	h'''	d'''	i'''	h^{IV}
$1'$	1	1	1							
$2'$	1	a^2	a							
$3'$	1	a	a^2							
$1''$				1	1	1				
$2''$				1	a^2	a				
$3''$				1	a	a^2				
$1'''$							1	1	1	
$2'''$							1	a^2	a	
$3'''$							1	a	a^2	
3^{IV}										3

şi rezultă

$$\| C_4^1 \| =$$

	d	i
$1'$	0	0
$2'$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$3'$	$-1 + a$	$-1 + a^2$
$1''$	0	0
$2''$	0	0
$3''$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$1'''$	0	0
$2'''$	$-1 + a^2$	$-1 + a$
$3'''$	$a - a^2$	$a^2 - a$
3^{VI}	-3	-3

Scanned with OKEN Scanner

Curenţii căutaţi sunt daţi de relaţia

$$\| i_1 \| = \| C_4^1 \| \cdot \| i_4 \| .$$

iar diferenţele de potenţial la bornele fiecărui element prin relaţia

$$\| e_1 \| = \frac{1}{3} \| C_4^1 \|_t^{*} \cdot \| e_4 \| .$$

17.25. Problema se rezolvă ca şi precedenta.

17.26. Se obţine uşor, combinînd cuadripolii simpli :

$$\| \gamma \| = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \left\| \begin{matrix} Z_1 + Z_2 & -2Z_1 Z_2 \\ -2Z_1 Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{matrix} \right\|$$

$$\| \zeta \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} Z_1 + Z_2 & Z_1 - Z_2 \\ Z_2 - Z_1 & -Z_1 - Z_2 \end{matrix} \right\|$$

$$\| \eta \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} & \dfrac{1}{Z_2} - \dfrac{1}{Z_1} \\ \dfrac{1}{Z_1} - \dfrac{1}{Z_2} & -\dfrac{1}{Z_1} - \dfrac{1}{Z_2} \end{matrix} \right\|$$

17.27. Scriind ecuaţiile transformatorului, se deduce imediat :

$$\| \zeta \| = \left\| \begin{matrix} \overline{Z}_1 & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \overline{Z}_2 \end{matrix} \right\| , \qquad \| \eta \| = \frac{1}{\overline{Z}_1 \overline{Z}_2 - \mathcal{M}^2} \left\| \begin{matrix} \overline{Z}_2 & -\mathcal{M} \\ -\mathcal{M} & \overline{Z}_1 \end{matrix} \right\|$$

$$\| \gamma \| = \frac{1}{\mathcal{M}} \left\| \begin{matrix} \overline{Z}_2 & \mathcal{M}^2 - \overline{Z}_1 \overline{Z}_2 \\ 1 & -\overline{Z}_1 \end{matrix} \right\|$$

în care :

$$\overline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1, \quad \overline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2, \quad \mathcal{M} = j\omega M.$$

17.28. Cu aceleaşi notaţii ca mai sus se găseşte :

$$\| \gamma \| = \frac{\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3}{\mathcal{M}_{12} \mathcal{M}_{34}} \left\| \begin{matrix} \overline{Z}_4 + \dfrac{\mathcal{M}_{34}^2}{\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3} & -\overline{Z}_1 \overline{Z}_4 + \dfrac{\overline{Z}_4 \mathcal{M}_{12}^2 - \overline{Z}_1 \mathcal{M}_{34}^2}{\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3} \\ 1 & -\overline{Z}_1 + \dfrac{\mathcal{M}_{12}^2}{\overline{Z}_2 - \overline{Z}_3} \end{matrix} \right\|$$

Scanned with OKEN Scanner

17.29. Cuadripolii fiind în lanţ, matricea caracteristică a cuadripolului rezultant este egală cu produsul matricelor caracteristice ale fiecărui cuadripol. Se găseşte :

$$\|\gamma\| = \|\gamma_1\| \cdot \|\gamma_2\| = \begin{Vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{Vmatrix}$$

Numeric se obţine acelaşi rezultat.

17.30. Acelaşi procedeu ca mai sus, matricea caracteristică fiind produsul celor trei matrice componente.

17.31. Ca mai sus.

17.32. Cuadripolul dat este format dintr'un cuadripol în T legat în paralel cu un cuadripol format dintr'o impedanţă în serie. Se găseşte

$$\|\eta\| = \frac{1}{R\overline{Z}\,(R + 2\,\overline{Z})} \begin{Vmatrix} R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2 & -\,2\overline{Z}\,(R + \overline{Z}) \\ 2\overline{Z}\,(R + \overline{Z}) & -(R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2) \end{Vmatrix}$$

Din care se deduc şi celelalte matrice

$$\|\gamma\| = \frac{1}{2\overline{Z}\,(R + \overline{Z})} \begin{Vmatrix} R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2 & R\,(R + 2\overline{Z})\,\overline{Z} \\ \dfrac{R\,(R + 2\,\overline{Z})}{\overline{Z}} & R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2 \end{Vmatrix}$$

$$\|\zeta\| = \frac{1}{R\,(R + 2\overline{Z})} \begin{Vmatrix} R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2 & -\,2\overline{Z}\,(R + \overline{Z}) \\ 2\,\overline{Z}\,(R + \overline{Z}) & -\,(R^2 + 2R\overline{Z} + 2\overline{Z}^2) \end{Vmatrix}$$

Observaţie : Pentru calculul determinantului $|\eta|$ se va ţine seama de impedanţa de undă, $Z_1 = \pm\sqrt{Z_{10}\,Z_{1sc}}$ sau $Z_2 = \pm\sqrt{Z_{20}\,Z_{2sc}}$, şi de condiţia de simetrie a cuadripolului.

17.33. Reţeaua are $L = 15$, $N = 6$, $S = 1$, deci $B = 10$ circuite independente şi $P = 5$ perechi de noduri independente. Cum $P < B$ se va aplica metoda perechilor de noduri*). Se aleg s. ex. perechile de noduri AB, BC, CD, DE, EF. Matricele reţelei primitive sunt

---

*) Vezi I. S. Antoniu, Introducerea în aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice, Editura Academiei RPR, 1953 pag. 94.

Scanned with OKEN Scanner

$\| \overline{Y} \| =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1														
2		1													
3			1												
4				1											
5					1										
6						1									
7							1								
8								1							
9									1						
10										1					
11											1				
12												1			
13													1		
14														1	
15															1

şi

$\| I \| =$

1	
2	
3	
4	
5	5
6	
7	−10
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Matricea de conexiune este

$\| C_t \|^{-1} =$

	1′	2′	3′	4′	5′
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1
6	1	1	1	1	1
7	1	1			
8	1	1	1		
9	1	1	1	1	
10		1	1		
11		1	1	1	
12		1	1	1	1
13			1	1	
14			1	1	1
15				1	1

Se găseşte

$\| Y' \| = \| C^{-1} \| \cdot \| Y \| \cdot \| C_t \|^{-1} =$

	1′	2′	3′	4′	5′
1′	5	4	3	2	1
2′	4	8	6	4	2
3′	3	6	9	6	3
4′	2	4	6	8	4
5′	1	2	3	4	5

şi noua matrice a curenţilor

$\| I' \| =$

1′	−10
2′	−10
3′	
4′	
5′	5

A.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicând relaţia $\| \overline{I'} \| = \| Y' \| \cdot \| E' \|$, rezultă $\| \overline{E'} \| = \| \overline{Y'} \|^{-1} \cdot \| I' \|$.
Calculând matricea inversă a lui se găseşte

$\| Y' \|^{-1} = \frac{1}{6}$

	1′	2′	3′	4′	5′
1′	2	1			
2′	1	2	1		
3′		1	2	1	
4′			1	2	1
5′				1	2

De unde rezultă :

$\| E' \| =$ (V)

1′	−30
2′	−30
3′	−10
4′	5
5′	10

şi deci $E_{AB} = -60$ V şi $E_{EF} = 10$ V.

17.34. Fie o punte Wheatstone, având laturile AB, BC, CD, DA, de rezistenţe respectiv R_1, R_2, R_3, R_4 şi străbătute de curenţi I_1, I_2, I_3, I_4; diagonala galvanometru BD de rezistenţă R_5 şi străbătută de curentul I_5; diagonala pilă AC, de rezistenţă R_6 şi străbătută de curentul I_6. Luând drept curenţi independenţi curenţii $I_4 = J_2$, $I_5 = J_1$ şi $I_6 = J_3$, matricele de conexiune şi de impedanţă sunt

$\| C \| =$

	1′	2′	3′
1	1	−1	1
2	−1	1	
3		−1	1
4		1	
5	1		
6			1

$\| R \| =$

	1	2	3	4	5	6
1	R_1					
2		R_2				
3			R_3			
4				R_4		
5					R_5	
6						R_6

Rezultă noua matrice de impedanţă

$\| R' \| =$

	1′	2′	3′
1′	$R_1 + R_2 + R_5$	$-R_1 - R_2$	R_1
2′	$-R_1 - R_2$	$R_1 + R_2 + R_2 + R_4$	$-R_1 - R_3$
3′	R_1	$-R_1 - R_3$	$R_1 + R_3 + R_6$

Scanned with OKEN Scanner

de unde ecuaţia de funcţionare a punţii $\| E' \| = \| R' \| \cdot \| J \|$. Matricea arată că se iau ca circuite independente ABD, $ADCB$, $ABCEA$, ordinea literelor indicând şi sensul curentului.

17.35. Problema se rezolvă cu ajutorul calculului matricial folosind calculul operaţional. Ecuaţiile de funcţionare ale circuitului sunt:

$$Z_{11}\mathcal{L}i_1 + Z_{12}\mathcal{L}i_2 = \mathcal{L}e$$
$$Z_{21}\mathcal{L}i_1 + Z_{22}\mathcal{L}i_2 = 0$$

în care:

$$Z_{11} = pL_1 + \frac{S_1 + S}{p}$$

$$Z_{22} = pL_2 + \frac{S_2 + S}{p}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = -\frac{S}{p}$$

$$S_1 = \frac{1}{C_1}, \quad S_2 = \frac{1}{C_2}, \quad S = \frac{1}{C}$$

Ecuaţia matricială a acestui sistem este:

$$\begin{Vmatrix} \mathcal{L}e \\ \\ \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathcal{L}i_1 \\ \mathcal{L}i_2 \end{Vmatrix}$$

care rezolvat în raport cu $\| \mathcal{L}i \|$ dă:

$$\begin{Vmatrix} \mathcal{L}i_1 \\ \mathcal{L}i_2 \end{Vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \mathcal{L}e \\ \\ \end{Vmatrix}$$

$(\Delta = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21})$

Punând:

$$\omega_{11}^2 = \frac{S_1 + S}{L_1}, \quad \omega_{22}^2 = \frac{S_2 + S}{L_2}, \quad \omega_{12}^2 = \frac{S}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2 + 4\,\omega_{12}^4}$$

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{11}^2 - \omega_{22}^2)^2 + 4\,\omega_{12}^4}$$

rezultă $\Delta = (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2)$

Scanned with OKEN Scanner

şi deci :

$$\mathfrak{L}i_1 = \frac{E_0}{L_1} \cdot \frac{p^2 + \omega_2^2}{(p^2 + \omega_1^2)\,(p^2 + \omega_2^2)}$$

$$\mathfrak{L}i_2 = -\frac{E_0 S}{L_1\, L_2}\, \frac{1}{(p^2 + \omega_1^2)\,(p^2 + \omega_2^2)}$$

de unde se deduce :

$$i_1 = \frac{E_0}{L_1}\left[\frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_{22}^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega}\, \frac{\omega_{22}^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \cdot \sin \omega_2 t\right]$$

$$i_2 = -\frac{E_0 S}{L_1\, L_2}\left[\frac{1}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t - \frac{1}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \sin \omega_2 t\right];$$

Scanned with OKEN Scanner

A N E X E

TABELE NUMERICE, NOMOGRAME,
TABELE PENTRU ANALIZA ARMONICĂ
ŞI
FORMULE PENTRU CALCULUL OPERAŢIONAL

Scanned with OKEN Scanner

Funcții trigonometrice, exponențiale și hiperbolice

x radiani	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x în grade
0,00	0,00000	1,00000	0,00000	1,00000	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	0,00°
01	0,01000	0,99995	0,01000	1,01005	0,99005	0,01000	0,10005	0,01000	0,57
02	0,02000	0,99980	0,02000	1,02020	0,98020	0,02000	1,00020	0,02000	1,15
03	0,03000	0,99955	0,03001	1,03045	0,97045	0,03000	1,00045	0,02999	1,72
04	0,03999	0,99920	0,04002	1,04081	0,96079	0,04001	1,00080	0,03998	2,29
05	0,04998	0,99875	0,05004	1,05127	0,95123	0,05002	1,00125	0,04996	2,86
06	0,05996	0,99820	0,06007	1,06184	0,94176	0,06004	1,00180	0,05993	3,44
07	0,06994	0,99755	0,07011	1,07251	0,93239	0,07006	1,00245	0,06989	4,01
08	0,07991	0,99680	0,08017	1,08329	0,92312	0,08009	1,00320	0,07983	4,58
09	0,08988	0,99595	0,09024	1,09417	0,91393	0,09012	1,00405	0,08976	5,16
0,10	0,09983	0,99500	0,10033	1,10517	0,90484	0,10017	1,00500	0,09967	5,73
11	0,10978	0,99396	0,11045	1,11628	0,89583	0,11022	1,00606	0,10956	6,30
12	0,11971	0,99281	0,12058	1,12750	0,88692	0,12029	1,00721	0,11943	6,88
13	0,12963	0,99156	0,13074	1,13883	0,87810	0,13037	1,00846	0,12927	7,45
14	0,13954	0,99022	0,14092	1,15027	0,86936	0,14046	1,00982	0,13909	8,02
15	0,14944	0,98877	0,15114	1,16183	0,86071	0,15056	1,01127	0,14889	8,59
16	0,15932	0,98723	0,16138	1,17351	0,85214	0,16068	1.01283	0,15865	9,17
17	0,16918	0,98558	0,17166	1,18530	0,84366	0,17082	1,01448	0,16838	9,74
18	0,17903	0,98384	0,18197	1,19722	0,83527	0,18097	1,01624	0,17808	10,31
19	0,18886	0,98200	0,19232	1,20925	0,82696	0,19115	1,01810	0,18775	10,89
0,20	0,19867	0,98007	0,20271	1,22140	0,81873	0,20134	1,02007	0,19738	11,46
21	0,20846	0,97803	0,21314	1,22368	0,81058	0,21155	1,02213	0,20697	12,03
22	0,21823	0,97590	0,22362	1,24608	0,80252	0,22178	0,02430	0,21652	12,61
23	0,22798	0,97367	0,23414	1,25860	0,79453	0,23203	1,02657	0,22603	13,18
24	0,23770	0,97134	0,24472	1,27152	0,78663	0,24231	1,02894	0,23550	13,75

Scanned with OKEN Scanner

25	0,24740	0,96891	0,25534	1,28403	0,77880	0,25261	1,03141	0,24492	14,32
26	0,25708	0,96639	0,26602	1,29693	0,77105	0,26294	1,03399	0,25430	14,90
27	0,26673	0,96377	0,27676	1,30996	0,76338	0,27329	1,03667	0,26362	15,47
28	0,27636	0,96106	0,28755	1,32313	0,75578	0,28367	1,03946	0,27291	16,04
29	0,28595	0,95824	0,29841	1,33643	0,74826	0,29408	1,04235	0,28213	16,62
0,30	0,29552	0,95534	0,30934	1,34986	0,74082	0,30452	1,04534	0,29131	17,19
31	0,30506	0,95233	0,32033	1,36343	0,73345	0,31499	1,04844	0,30044	17,76
32	0,31457	0,94924	0,33139	1,37713	0,72615	0,32549	1,05164	0,30951	18,33
33	0,32404	0,94604	0,34252	1,39097	0,71892	0,33602	1,05495	0,31852	18,91
34	0,33349	0,94275	0,35374	1,40495	0,71177	0,34659	1,05836	0,32748	19,48
35	0,34290	0,93937	0,36503	1,41907	0,70469	0,35719	1,06188	0,33638	20,05
36	0,35227	0,93590	0,37640	1,43333	0,69768	0,36783	1,06550	0,34521	20,63
37	0,36162	0,93233	0,38786	1,44773	0,69073	0,37850	1,06923	0,35399	21,20
38	0,37092	0,92866	0,39941	1,46228	0,68386	0,38921	1,07307	0,36271	21,77
39	0,38019	0,92491	0,41105	1,47698	0,67706	0,39996	1,07702	0,37136	22,35
0,40	0,38942	0,92106	0,42279	1,49182	0,67032	0,41075	1,08107	0,37995	22,92
41	0,39861	0,91712	0,43463	1,50682	0,66365	0,42158	1,08523	0,38847	23,49
42	0,40776	0,91309	0,44657	1,52196	0,65705	0,43246	1,08950	0,39693	24,06
43	0,41687	0,90897	0,45862	1,53726	0,65051	0,44337	1,09388	0,40532	24,64
44	0,42594	0,90475	0,47078	1,55271	0,64404	0,45434	1,09837	0,41364	25,21
45	0,43497	0,90045	0,48306	1,56831	0,63763	0,46534	1,10297	0,42190	25,78
46	0,44395	0,89605	0,49545	1,58407	0,63128	0,47640	1,10768	0,43008	26,36
47	0,45289	0,89157	0,50797	1,59999	0,62500	0,48750	1,11250	0,43820	26,93
48	0,46178	0,88699	0,52061	1,61607	0,61878	0,49865	1,11743	0,44624	27,50
49	0,47063	0,88233	0,53339	1,63232	0,61263	0,50984	1,12247	0,45422	28,07
0,50	0,47943	0,87758	0,54630	1,64872	0,60653	0,52110	1,12763	0,46212	28,65
51	0,48818	0,87274	0,55936	1,66529	0,60050	0,53240	1,13289	0,46995	29,22
52	0,49688	0,86782	0,57256	1,68203	0,59452	0,54375	1,13821	0,47770	29,79

x radiani	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	e^x	e^{-x}	$\mathrm{sh}\, x$	$\mathrm{ch}\, x$	$\mathrm{th}\, x$	x în grade
53	0,50553	0,86281	0,58592	1,69893	0,58860	0,55516	1,14377	0,48538	30,37°
54	0,51414	0,85771	0,59943	1,71601	0,58275	0,56663	1,14938	0,49299	30,94
55	0,52269	0,85252	0,61311	1,73325	0,57695	0,57815	1,15510	0,50052	31,51
56	0,53119	0,84726	0,62695	1,75067	0,57121	0,58973	1,16094	0,50798	32,09
57	0,53963	0,84190	0,64097	1,76827	0,56553	0,60137	1,16690	0,51536	32,66
58	0,54802	0,83646	0,65517	1,78604	0,55990	0,61307	1,17297	0,52267	33,23
59	0,55636	0,83094	0,66956	1,80399	0,55433	0,62483	1,17916	0,52990	33,80
0,60	0,56464	0,82534	0,68414	1,82212	0,54881	0,63665	1,18547	0,53705	34,38
61	0,57287	0,81965	0,69892	1,84043	0,54335	0,64854	1,19189	0,54413	34,95
62	0,58104	0,81388	0,71391	1,85893	0,53794	0,66049	1,19844	0,55113	35,52
63	0,58914	0,80803	0,72911	1,87761	0,53259	0,67251	1,20510	0,55805	36,10
64	0,59720	0,80210	0,74454	1,89648	0,52729	0,68459	1,21189	0,56490	36,67
65	0,60519	0,79608	0,76020	1,91554	0,52205	0,69675	1,21879	0,57167	37,24
66	0,61312	0,78999	0,77610	1,93479	0,51685	0,70897	1,22582	0,57836	37,82
67	0,62099	0,78382	0,79225	1,95424	0,51171	0,72126	1,23297	0,58498	38,39
68	0,62879	0,77757	0,80866	1,97388	0,50662	0,73363	1,24025	0,59152	38,96
69	0,63654	0,77125	0,82534	1,99372	0,50158	0,74607	1,24765	0,59798	39,53
0,70	0,64422	0,76484	0,84229	2,01375	0,49659	0,75858	1,25517	0,60437	40,11
71	0,65183	0,75836	0,85953	2,03399	0,49164	0,77117	1,26282	0,61068	40,68
72	0,65938	0,75181	0,87707	2,05443	0,48675	0,78384	1,27059	0,61691	41,25
73	0,66687	0,74517	0,89492	2,07508	0,48191	0,79659	1,27849	0,62307	41,83
74	0,67429	0,73847	0,91309	2,09594	0,47711	0,80941	1,28652	0,62915	42,40
75	0,68164	0,73169	0,93160	2,11700	0,47237	0,82232	1,29468	0,63515	42,97
76	0,68892	0,72484	0,95045	2,13828	0,46767	0,83530	1,30297	0,64108	43,54
77	0,69614	0,71791	0,96967	2,15977	0,46301	0,84838	1,31139	0,64693	44,12
78	0,70328	0,71091	0,98926	2,18147	0,45841	0,86153	1,31994	0,65271	44,69
79	0,71035	0,70385	1,00925	2,20340	0,45384	0,87478	1,32862	0,65841	45,26

Scanned with OKEN Scanner

0,80	0,71736	0,69671	1,02964	2,22554	0,44933	0,88811	1,33743	0,66404	45,84
81	0,72429	0,68950	1,05046	2,24791	0,44486	0,90152	1,34638	0,66959	46,41
82	0,73115	0,68222	1,07171	2,27050	0,44043	0,91503	1,35547	0,67507	46,98
83	0,73793	0,67488	1,09343	2,29332	0,43605	0,92863	1,36468	0,68048	47,56
84	0,74464	0,66746	1,11563	2,31637	0,43171	0,94233	1,37404	0,68581	48,13
85	0,75128	0,65998	1,13833	2,33965	0,42741	0,95612	1,38353	0,69107	48,70
86	0,75784	0,65244	1,16156	2,36316	0,42316	0,97000	1,39316	0,69626	49,27
87	0,76433	0,64483	1,18532	2,38691	0,41895	0,98398	1,40293	0,70137	49,85
88	0,77074	0,63715	1,20966	2,41090	0,41478	0,99806	1,41284	0,70642	50,42
89	0,77707	0,62941	1,23460	2,43513	0,41066	1,01224	1,42289	0,71139	50,99
0,90	0,78333	0,62161	1,26016	2,45960	0,40657	1,02652	1,43309	0,71630	51,57
91	0,78950	0,61375	1,28637	2,48432	0,40252	1,04090	1,44342	0,72113	52,14
92	0,79560	0,60582	1,31326	2,50929	0,39852	1,05539	1,45390	0,72590	52,71
93	0,80162	0,59783	1,34087	2,53451	0,39455	1,06998	1,46453	0,73059	53,29
94	0,80756	0,58979	1,36923	2,55998	0,39063	1,08468	1,47530	0,73522	53,86
95	0,81342	0,58168	1,39838	2,58571	0,38674	1,09948	1,48623	0,73978	54,43
96	0,81919	0,57352	1,42836	2,61170	0,38289	1,11440	1,49729	0,74428	55,00
97	0,82489	0,56530	1,45920	2,63794	0,37908	1,12943	1,50851	0,74870	55,58
98	0,83050	0,55702	1,49096	2,66446	0,37531	1,14457	1,51988	0,75307	56,15
99	0,83603	0,54869	1,52368	2,69123	0,37158	1,15983	1,53141	0,75736	56,72
1,00	0,84147	0,54030	1,55741	2,71828	0,36788	1,17520	1,54308	0,76159	57,30
01	0,84683	0,53186	1,59221	2,74560	0,36422	1,19069	1,55491	0,76576	57,87
02	0,85211	0,52337	1,62813	2,77319	0,36059	1,20630	1,56689	0,76987	58,44
03	0,85730	0,51482	1,66524	2,80107	0,35701	1,22203	1,57904	0,77391	59,01
04	0,86240	0,50622	1,70361	2,82922	0,35345	1,23788	1,59134	0,77789	59,59
05	0,86742	0,49757	1,74332	2,85765	0,34994	1,25386	1,60379	0,78181	60,16
06	0,87236	0,48887	1,78442	2,88637	0,34646	1,26996	1,61641	0,78566	60,73
07	0,87720	0,48012	1,82703	2,91538	0,34301	1,28619	1,62919	0,78946	61,31
08	0,88196	0,47133	1,87122	2,94468	0,33960	1,30251	1,64214	0,79320	61,88
09	0,88663	0,46249	1,91709	2,97427	0,33622	1,31903	1,65525	0,79688	62,45

x radiani	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x în grade
1,10	0,89121	0,45360	1,96476	3,00417	0,33287	1,33565	1,66852	0,80050	63,03°
11	0,89570	0,44466	2,01434	3,03436	0,32956	1,35240	1,68196	0,80406	63,60
12	0,90010	0,43568	2,06596	3,05485	0,32628	1,36929	1,69557	0,80757	64,17
13	0,90441	0,42666	2,11975	3,09566	0,32303	1,38631	1,70934	0,81102	64,74
14	0,90863	0,41759	2,17588	3,12677	0,31982	1,40347	1,72329	0,81441	65,32
15	0,91276	0,40849	2,23450	3,15819	0,31664	1,42078	1,73741	0,81775	65,89
16	0,91680	0,39934	2,29580	3,18993	0,31349	1,43822	1,75171	0,82104	66,46
17	0,92075	0,39015	2,35998	3,22199	0,31037	1,45581	1,76618	0,82427	67,04
18	0,92561	0,38092	2,42727	3,25437	0,30728	1,47355	1,78083	0,82745	67,61
19	0,92837	0,37166	2,49790	3,28708	0,30422	1,49143	1,79565	0,83058	68,18
1,20	0,93204	0,36236	2,57215	3,32012	0,30119	1,50946	1,81066	0,83365	68,75
21	0,93562	0,35302	2,65033	3,35348	0,29820	1,52764	1,82584	0,83668	69,33
22	0,93910	0,34365	2,73275	3,38719	0,29523	1,54598	1,84121	0,83965	69,90
23	0,94249	0,33424	2,81982	3,42123	0,29229	1,56447	1,85676	0,84258	70,47
24	0,94578	0,32480	2,91193	3,45561	0,28938	1,58311	1,87250	0,84546	71,05
25	0,94898	0,31532	3,00957	3,49034	0,28650	1,60192	1,88842	0,84828	71,62
26	0,95209	0,30582	3,11327	3,52542	0,28365	1,62088	1,90454	0,85106	72,19
27	0,95510	0,29628	3,22363	3,56085	0,28083	1,64001	1,92084	0,85380	72,77
28	0,95802	0,28672	3,34135	3,59664	0,27804	1,65930	1,93734	0,85648	73,34
29	0,96084	0,27712	3,46721	3,63279	0,27527	1,67876	1,95403	0,85913	73,91
1,30	0,96356	0,26750	3,60210	3,66930	0,27253	1,69838	1,97091	0,86172	74,48
31	0,96618	0,25785	3,74708	3,70617	0,26982	1,71818	1,98800	0,86428	75,06
32	0,96872	0,24818	3,90335	3,74342	0,26714	1,73814	2,00528	0,86678	75,63
33	0,97115	0,23848	4,07231	3,78104	0,26448	1,75828	2,02276	0,86925	76,20
34	0,97348	0,22875	4,25562	3,81904	0,26185	1,77800	2,04044	0,87167	77,78

Scanned with OKEN Scanner

35	0,97572	0,21901	4,45522	3,85743	0,25924	1,79909	2,05833	0,87405	77,35
36	0,97786	0,20924	4,67344	3,89619	0,25666	1,81977	2,07643	0,87639	77,92
37	0,97991	0,19945	4,91306	3,93535	0,25411	1,84062	2,09473	0,87869	78,50
38	0,98185	0,18964	5,17744	3,97490	0,25158	1,86166	2,11324	0,88095	79,07
39	0,98370	0,17981	5,47069	4,01485	0,24908	1,88289	2,13196	0,88317	79,64
1,40	0,98545	0,16997	5,79789	4,05520	0,24660	1,90430	2,15090	0,88535	80,21
41	0,98710	0,16010	6,16536	4,09596	0,24414	1,92591	2,17005	0,88749	80,79
42	0,98865	0,15023	6,58112	4,13712	0,24171	1,94770	2,18942	0,88960	81,36
43	0,99010	0,14033	7,05547	4,17870	0,23931	1,96970	2,20900	0,89167	81,93
44	0,99146	0,13042	7,60183	4,22070	0,23693	1,99188	2,22881	0,89370	82,51
45	0,99271	0,12050	8,23810	4,26311	0,23457	2,01427	2,24884	0,89569	83,08
46	0,99387	0,11057	8,98861	4,30596	0,23224	2,03686	2,26910	0,89765	83,65
47	0,99492	0,10063	9,91550	4,34924	0,22993	2,05965	2,28958	0,89958	84,22
48	0,99588	0,09067	10,98338	4,39295	0,22764	2,08265	2,31029	0,90147	84,80
49	0,99674	0,08071	12,34986	4,43710	0,22537	2,10586	2,33123	0,90332	85,37
1,50	0,99749	0,07074	14,10142	4,48169	0,22313	2,12928	2,35241	0,90515	85,94
51	0,99815	0,06076	16,42809	4,52673	0,22091	2,15291	2,37382	0,90694	86,52
52	0,99871	0,05077	19,66966	4,57223	0,21871	2,17676	2,39547	0,90870	87,09
53	0,99917	0,04079	24,49841	4,61818	0,21654	2,20082	2,41736	0,91042	87,66
54	0,99953	0,03079	32,46114	4,66459	0,21438	2,22510	2,43949	0,91212	88,24
55	0,99978	0,02079	48,07849	4,71147	0,21225	2,24961	2,46186	0,91379	88,81
56	0,99994	0,01080	92,62050	4,75882	0,21014	2,27434	2,48448	0,91542	89,37
57	1,00000	+0,00080	+1255,766	4,80665	0,20805	2,29930	2,50735	0,91703	89,95
58	0,99996	−0,00920	−108,6492	4,85496	0,20598	2,32449	2,53047	0,91860	90,53
59	0,99982	−0,01920	−52,06698	4,90375	0,20393	2,34991	2,55384	0,92015	91,10
1,60	0,99957	−0,02920	−34,23254	4,95303	0,20190	2,37557	2,57746	0,92167	91,67
70	0,99166	−0,12884	−7,69660	5,47395	0,18268	2,64563	2,82832	0,93541	97,40
80	0,97385	−0,22720	−4,28626	6,04965	0,16530	2,94217	3,10747	0,94681	103,13
90	0,94630	−0,32329	−2,92710	6,68589	0,14957	3,26816	3,41773	0,95624	108,86

x radiani	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x în grade
2,00	0,90930	−0,41615	−2,18504	7,38906	0,13534	3,62686	3,76220	0,96403	114,59°
10	0,86321	−0,50485	−1,70985	8,16617	0,12246	4,02186	4,14431	0,97045	120,32
20	0,80850	−0,58850	−1,37382	9,02501	0,11080	4,45711	4,56791	0,97574	126,05
30	0,74571	−0,66628	−1,11921	9,97418	0,10026	4,93696	5,03722	0,98010	131,78
40	0,67546	−0,73739	−0,91601	11,02318	0,09072	5,46623	5,55695	0,98367	137,51
2,50	0,59847	−0,80114	−0,74702	12,18249	0,08208	6,05020	6,13229	0,98661	143,24
60	0,51550	−0,85689	−0,60160	13,46374	0,07427	6,69473	6,76901	0,98903	148,97
70	0,42738	−0,90407	−0,47273	14,87973	0,06721	7,40626	7,47347	0,99101	154,70
80	0,33499	−0,94222	−0,35553	16,44465	0,06081	8,19192	8,25273	0,99263	160,43
90	0,23925	−0,97096	−0,24641	18,17415	0,05502	9,05956	9,11458	0,99396	166,16
3,00	0,14112	−0,98999	−0,14255	20,08554	0,04979	10,01787	10,06766	0,99505	171,89
10	+0,04158	−0,99914	−0,04162	22,19795	0,04505	11,07645	11,12150	0,99595	177,62
20	−0,05837	−0,99829	+0,05847	24,53253	0,04076	12,24588	12,28665	0,99668	183,35
30	−0,15775	−0,98748	0,15975	27,11264	0,03688	13,53788	13,57476	0,99728	189,08
40	−0,25554	−0,96680	0,26442	29,96410	0,03337	14,96536	14,99874	0,99777	194,81
50	−0,35078	−0,93646	0,37470	33,11545	0,03020	16,54263	16,57282	0,99818	200,54
60	−0,44252	−0,89676	0,49347	36,59823	0,02732	18,28546	18,31278	0,99851	206,26
70	−0,52984	−0,84810	0,62473	40,44730	0,02472	20,21129	20,23601	0,99878	211,99
80	−0,61186	−0,79097	0,77356	44,70118	0,02237	22,33941	22,36178	0,99900	217,72
90	−0,68777	−0,72593	0,94742	49,40245	0,02024	24,69110	24,71135	0,99918	223,45
4,00	−0,75680	−0,65364	1,15782	54,59815	0,01832	27,28992	27,30823	0,99933	229,18
10	−0,81828	−0,57482	1,42353	60,34029	0,01657	30 16186	30,17843	0,99945	234,91
20	−0,87158	−0,49026	1,77778	66,68633	0,01500	33,33567	33,35066	0,99955	240,64
30	−0,91617	−0,40080	2,28585	73,69979	0,01357	36,84311	36,85668	0,99963	246,37
40	−0,95160	−0,30733	3,09632	81,45087	0,01228	40,71930	40,73157	0,99970	252,10

Scanned with OKEN Scanner

50	−0,97753	−0,21080	4,63733	90,01713	0,01111	45,00301	45,01412	0,99975	257,83
60	−0,99369	−0,11215	8,86018	99,48432	0,01005	49,73713	49,74718	0,99980	263,56
70	−0,99992	−0,01239	+80,71280	109,9472	0,00910	54,96904	54,97813	0,99983	269,29
80	−0,99616	+0,08750	−11,38487	121,5104	0,00823	60,75109	60,75932	0,99986	275,02
90	−0,98245	0,18651	− 5,26749	134,2898	0,00745	67,14117	67,14861	0,99989	280,75
5,00	−0,95892	0,28366	− 3,38052	148,4132	0,00674	74,20321	74,20995	0,99991	286,48
10	−0,92581	0,37798	− 2,44939	164,0219	0,00610	82,00791	82,01400	0,99993	292,21
20	−0,88345	0,46852	− 1,88564	181,2722	0,00552	90,63336	90,63888	0,99994	297,94
30	−0,83227	0,55437	− 1,50128	200,3368	0,00499	100,1659	100,1709	0,99995	303,67
40	−0,77276	0,63469	− 1,21754	221,4064	0,00452	110,7069	110,7055	0,99996	309,40
5,50	−0,70554	0,70867	− 0,99558	244,6919	0,00409	122,3439	122,3480	0,99997	315,13
60	−0,63127	0,77557	− 0,81394	270,4264	0,00370	135,2114	135,2150	0,99997	320,86
70	−0,55069	0,83471	− 0,65973	298,8674	0,00335	149,4320	149,4354	0,99998	326,59
80	−0,46460	0,88552	− 0,52467	330,2996	0,00303	165,1483	165,1513	0,99998	332,32
90	−0,37388	0,92748	− 0,40311	365,0375	0,00274	182,5174	182,5201	0,99999	338,05
6,00	−0,27942	0,96017	− 0,29101	403,4288	0,00248	201,7132	201,7156	0,99999	343,77
30	+0,01681	0,99986	+ 0,01681	544,5719	0,00184	272,2850	272,2869	0,99999	360,96

Scanned with OKEN Scanner

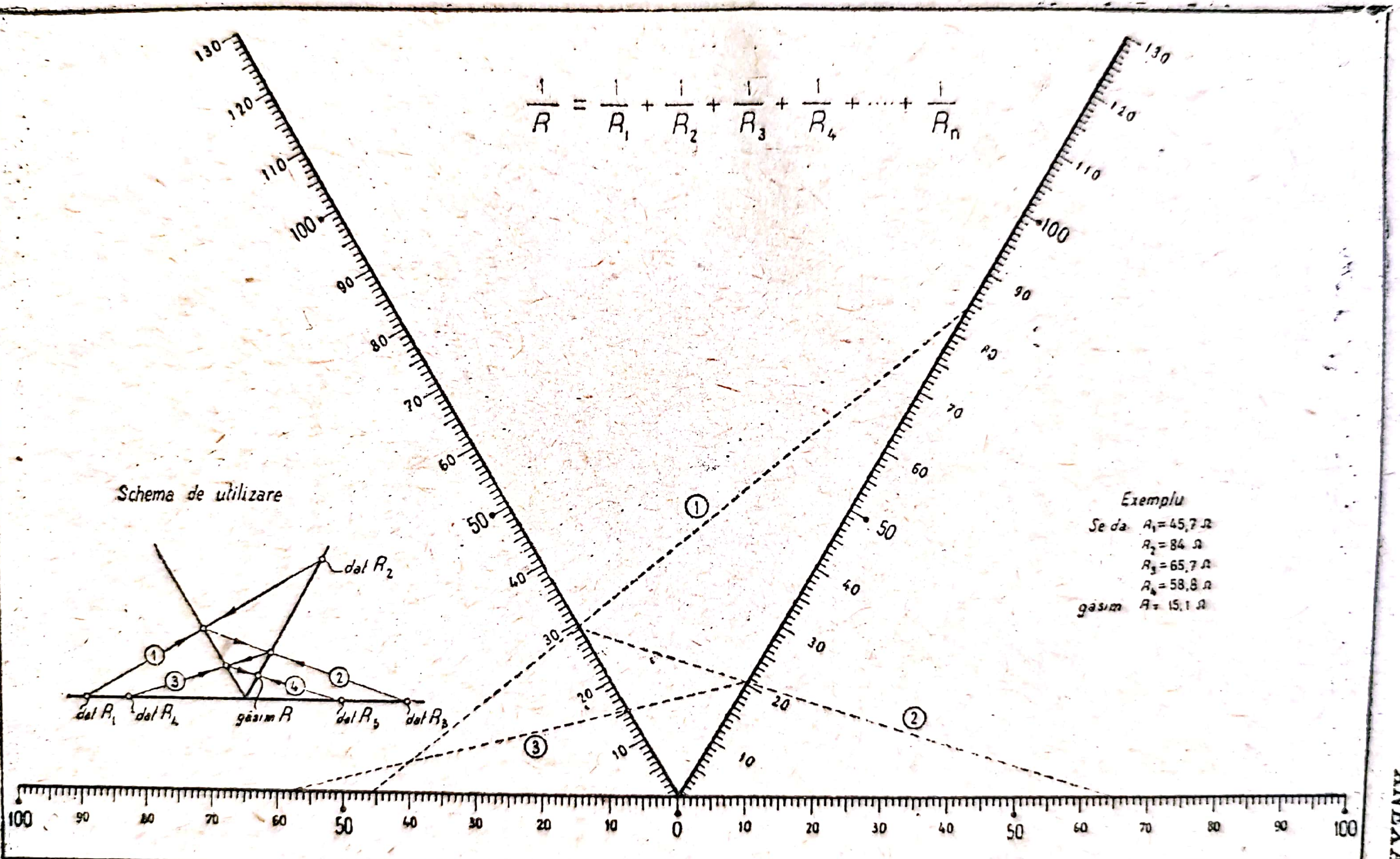
Tabelă suplimentară pentru argumentele $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$, $7\pi/4$, 2π

(Argumentul în radiani și grade vechi)

x radiani	sin x	cos x	tg x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	x în grade
$^1/_4\,\pi = 0{,}7854$	0,70711	0,70711	1	2,19328	0,45594	0,86867	1,32461	0,65579	45,00°
$^1/_2\,\pi = 1{,}5708$	1,00000	0,00000	$\pm\infty$	4,81049	0,20788	2,30130	2,50918	0,91715	90,00
$^3/_4\,\pi = 2{,}3562$	0,70711	−0,70711	−1	10,55072	0,09478	5,22797	5,32275	0,98219	135,00
$\pi = 3{,}1416$	0,00000	−1,00000	0	23,14069	0,04321	11,54874	11,59195	0,99627	180,00
$^5/_4\,\pi = 3{,}9270$	−0,70711	−0,70711	1	50,75402	0,01970	25,36716	25,38686	0,99922	225,00
$^3/_2\,\pi = 4{,}7124$	−1,00000	0,00000	$\pm\infty$	111,3178	0,00898	55,65440	55,66338	0,99984	270,00
$^7/_4\,\pi = 5{,}4978$	−0,70711	0,70711	−1	244,1511	0,00410	122,0735	122,0776	0,99997	315,00
$2\,\pi = 6{,}2832$	0,00000	1,00000	0	535,4917	0,00187	267,7449	267,7468	0,99999	360,00

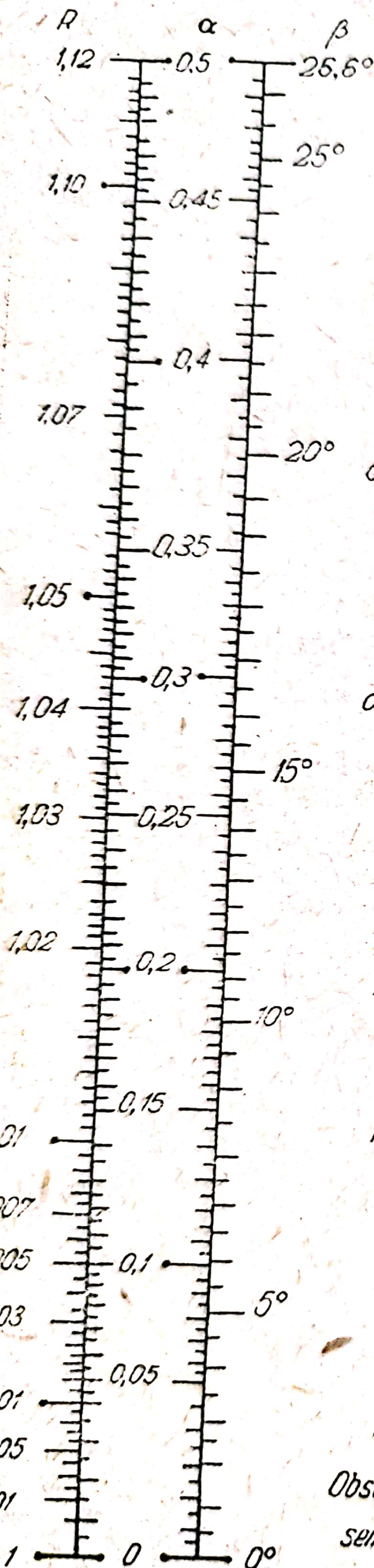
Scanned with OKEN Scanner

SCHEMĂ PENTRU DETERMINAREA REZISTENȚEI ECHIVALENTE A UNOR CONDUCTORI LEGAȚI ÎN PARALEL



Întocmit D. E. LEVIT
ELECTRICESTVO NR. 1 1951

NOMOGRAMĂ PENTRU CONVERTIREA NUMĂRULUI COMPLEX ÎN FORMĂ EXPONENŢIALĂ



$$\pm a + jb = re^{j\varphi}$$

1. Se dă a şi b se determină r şi φ

$0 < b < a$

$\alpha = \frac{b}{a}$; $r = aR$;

$\varphi = \beta$ (în cazul: $a + jb$)

$\varphi = 180° - \beta$ (în cazul: $-a + jb$)

$0 < a < b$

$\alpha = \frac{a}{b}$; $r = bR$;

$\varphi = 90° \pm \beta$ (în cazul $a + jb$)

$\varphi = 90° - \beta$ (în cazul $-a + jb$)

2. Se dă r şi φ se determină a şi b

$0 < \varphi < 45°$

$\beta = \varphi$; $a = \frac{r}{R}$; $b = \alpha \frac{r}{R}$

$45° < \varphi < 90°$

$\beta = 90° - \varphi$; $a = \alpha \frac{r}{R}$; $b = \frac{r}{R}$

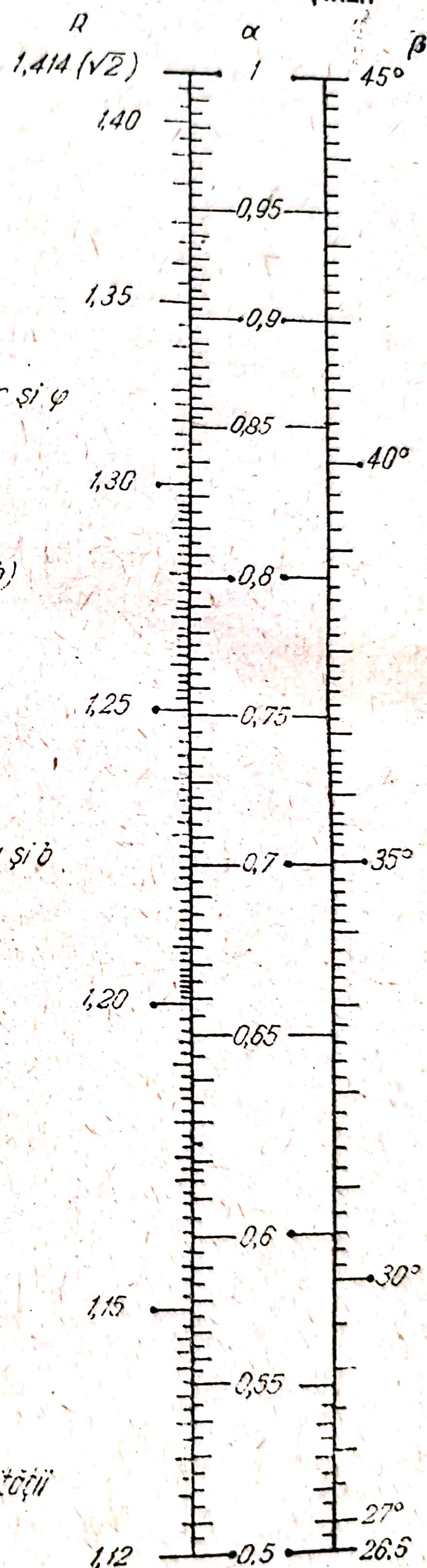
$90° < \varphi < 135°$

$\beta = \varphi - 90°$; $-a = \alpha \frac{r}{R}$; $b = \frac{r}{R}$

$135° < \varphi < 180°$

$\beta = 180° - \varphi$; $-a = \frac{r}{R}$; $b = \alpha \frac{r}{R}$

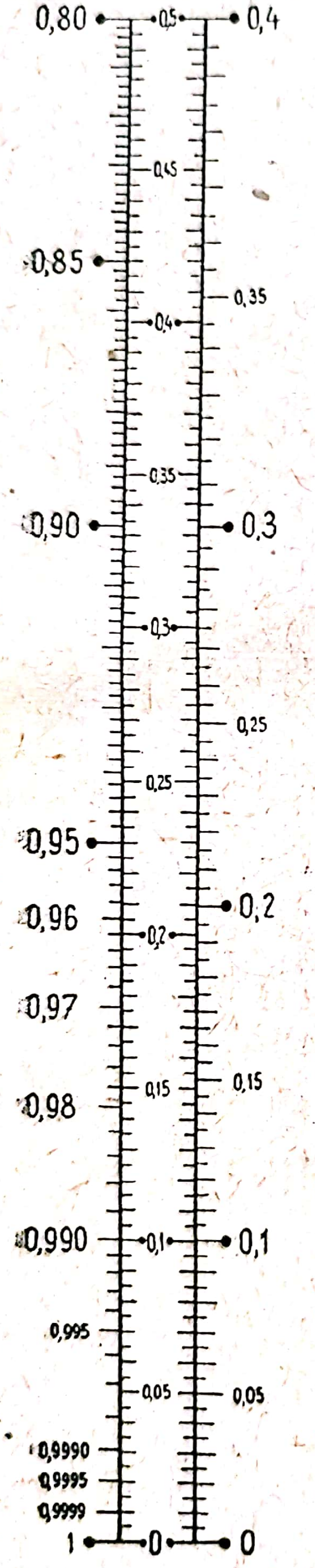
Observaţie: în ambele părţi ale egalităţii semnul $+j$ poate fi înlocuit cu $-j$



Electricestvo 11/1951

Întocmită: D. E. Levit

NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA INVERSULUI UNUI NUMĂR COMPLEX



$$\frac{1}{\pm a + jb} = \pm c - jd$$

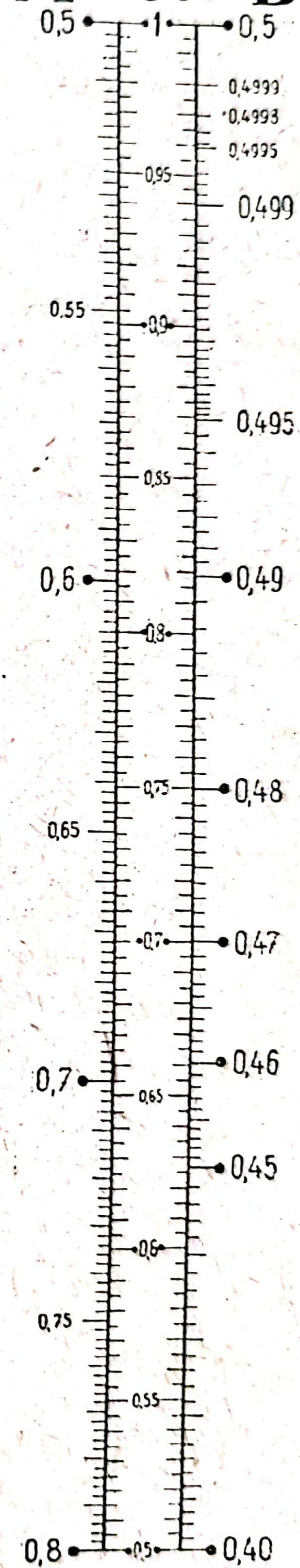
$$0 < b < a$$

$$\alpha = \frac{b}{a};\ c = \frac{A}{a};\ d = \frac{B}{a}$$

$$0 < a < b$$

$$\alpha = \frac{a}{b};\ c = \frac{B}{b};\ d = \frac{A}{b}$$

În ambele părţi ale egalităţii se poate înlocui $+j$ *cu* $-j$



Întocmit D. E. LEVIT
ELECTRICESTVO NR. 12 195[illegible]

NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA CÂTULUI A DOUĂ NUMERE COMPLEXE $a + jb$ şi $c + jd$

Câtul a două numere complexe $(a + jb)/(c + jd)$ se determină prin nomograma dată sub forma $Q = p + jq$.

Nomograma este construită pentru a, b, c, d numere întregi, ele putând fi aduse întotdeauna la această formă, în care caz

$$p = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \quad \text{şi} \quad q = \frac{bc + ad}{c^2 + d^2}$$

se înmulţesc cu 10^n, unde n este un număr întreg (vezi exemplul). In nomogramă mărimile variabile c şi d sunt date ca drepte, a şi b sunt date prin două familii de curbe. Pentru determinarea lui p, valorile a sunt date în partea stângă a nomogramei, C în dreapta. Pentru determinarea lui q, a este dat în partea dreaptă (în paranteze) (valorile pozitive jos), b în stânga (în paranteze).

Exemplu: Se dă $a + jb = 50 + j\,10$; $c + jd = 0{,}3 + j\,0{,}16$. Impărţim $a + jb$ la 10:

$$\frac{50 + j\,10}{10} = 5 + j\,1$$

şi înmulţim $c + jd$ cu 10

$$10\,(0{,}3 + j\,0{,}6) = 3 + j\,6$$

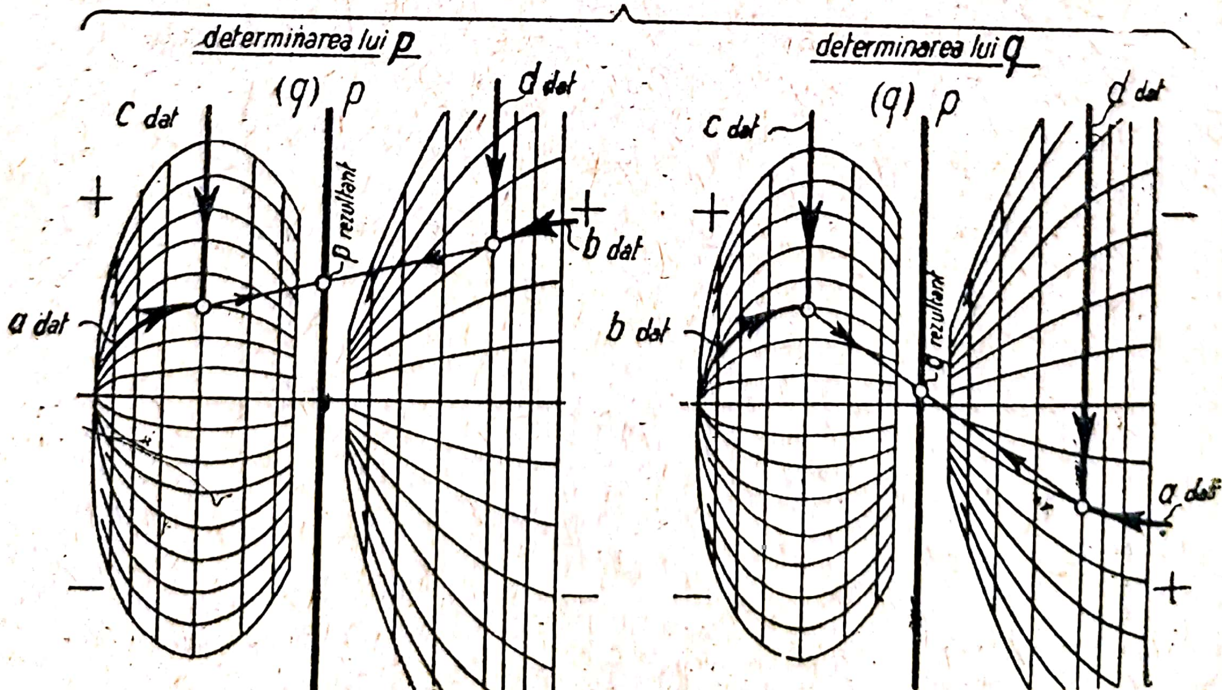
Prin urmare, prin aceasta Q se înmulţeşte cu 10^{-2}.

In stânga nomogramei găsim punctul comun pentru curba $a = 5$ şi dreapta $c = 3$, iar în dreapta punctul $b = 1{,}0$, $d = 6$. Dreapta, care uneşte aceste puncte determină pe scara $p(q)$ punctul $p = 0{,}468$.

Mai departe, găsim în stânga nomogramei punctul $(b) = 1$, $c = 3$, iar în dreapta $(a) = 5$; $d = 6$. Dreapta, care uneşte aceste puncte, determină pe scara $p(q)$ punctul $(q) = -0{,}6$;

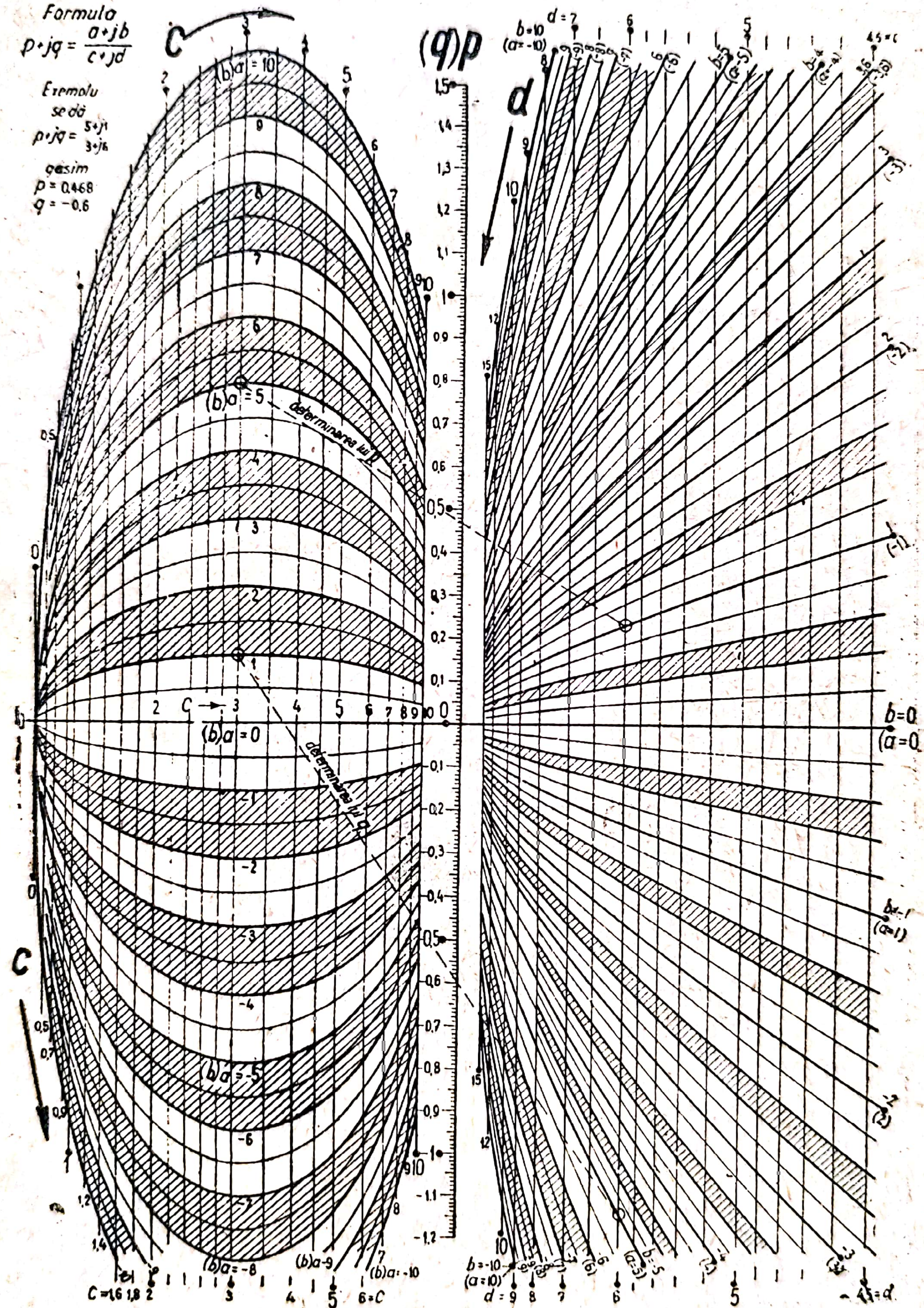
$$Q = (p + jd)\;100 = 100\;(0{,}468 + j\,0{,}6) = 46{,}8 + j\,60.$$

Schema de utilizare a nomogramei



Pentru determinarea lui q se iau cifrele din paranteze

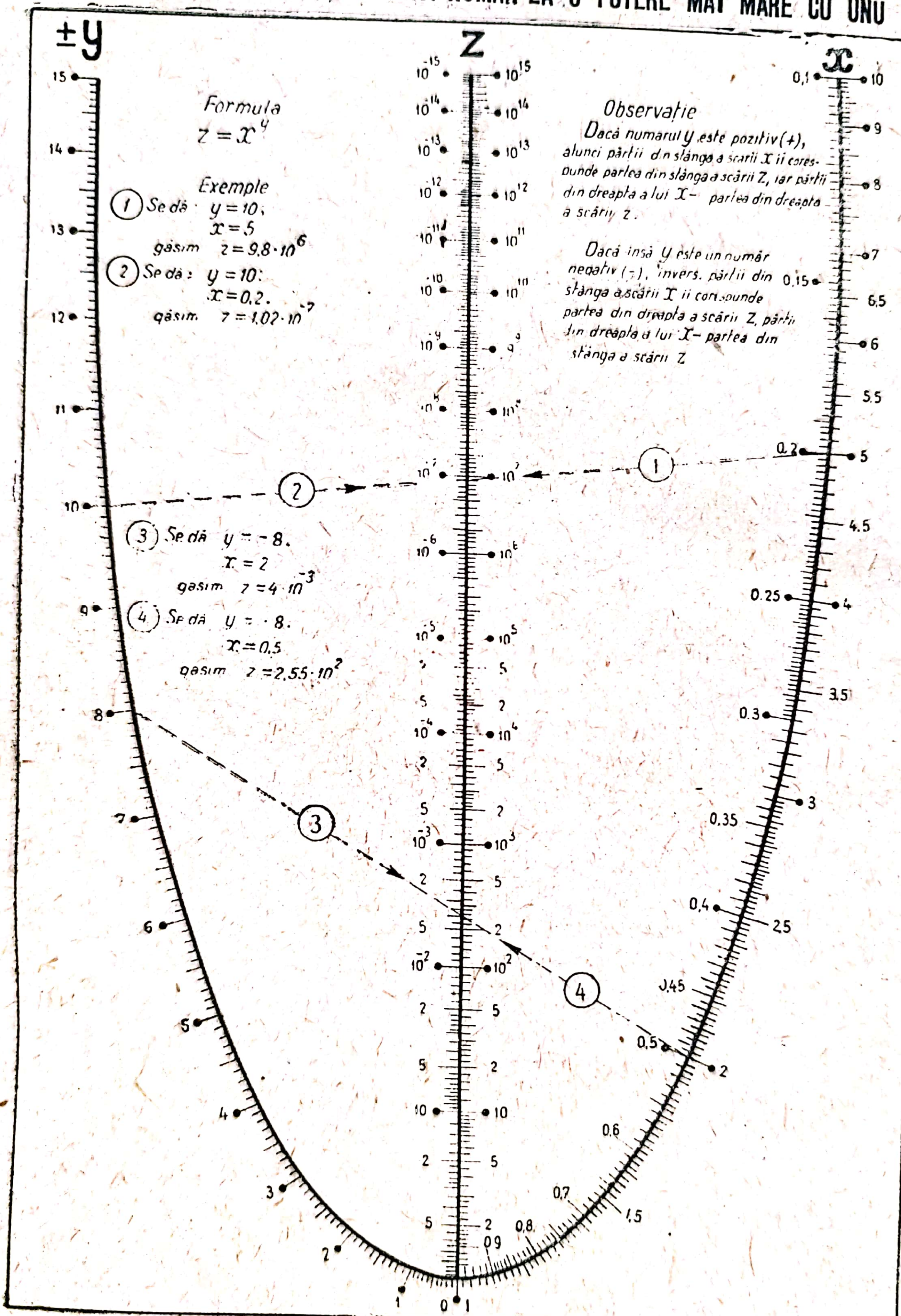
NOMOGRAMĂ PENTRU DETERMINAREA CÂTULUI A DOUĂ NUMERE COMPLEXE



Intocmit D. E. LEVIT
ELECTRICESTVO NR 5 195?

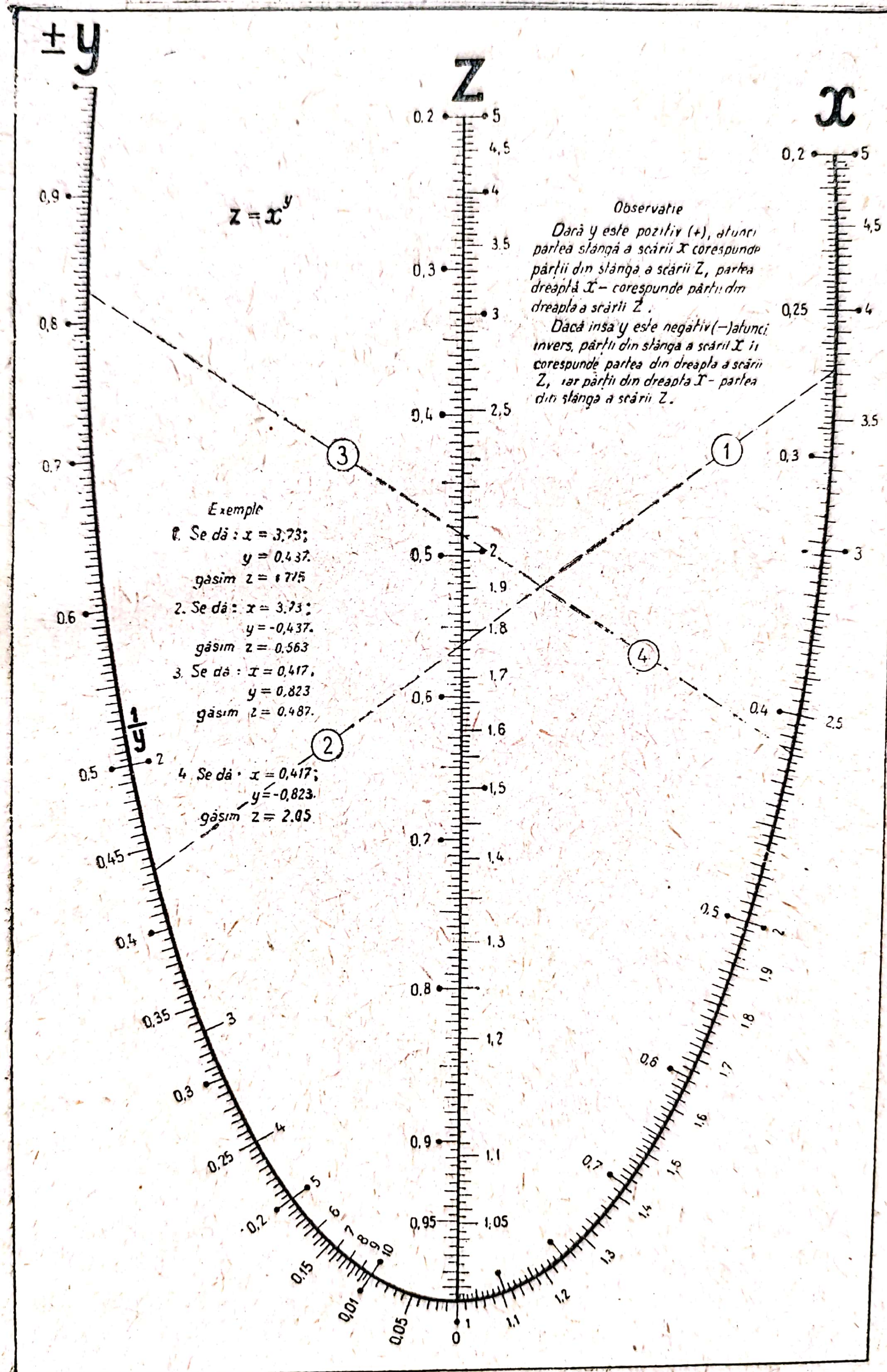
ANEXA VI

NOMOGRAMĂ PENTRU RIDICAREA UNUI NUMĂR LA O PUTERE MAI MARE CU UNU



Intocmit D. E. LEVIT
ELECTRICESTVO NR. 2 1953

NOMOGRAMĂ PENTRU RIDICAREĂ UNUI NUMĂR LA PUTERI MAI MICI CU UNU



Întocmit D. E. LEVIT
ELECTRICESTVO NR. 9 1952

TABLOUL I

CALCULUL SUMELOR $S_K = Y_K + Y_{2p-K}$ SI DIFERENTELOR $d_K = Y_K - Y_{2p-K}$

Y_K		1	2	3	4	5	6	7	8
Y_{2p-K}	36	35	34	33	32	31	30	29	28
S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_K		1	2	3	4	5	6	7	8

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
27	26	25	24	23	22	21	20	19	
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

TABLOUL II

CALCULUL SUMELOR SUMELOR $S_K = S_K + S_{p-K}$ ŞI AL DIFERENŢELOR SUMELOR $M = S_K - S_{p-K}$

S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S_{p-K}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
S_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLOUL III

CALCULUL SUMELOR DIFERENTELOR $E_K = d_K + d_{p-K}$ ŞI AL DIFERENŢELOR DIFERENŢ. $D_K = d_K - d_{p-K}$

d_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_{p-K}	17	16	15	14	13	12	11	10	
E_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_K	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLOUL IV

CALCULUL ARMONICILOR FUNCȚIUNILOR IMPARE

Y_k		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_{p-k}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
M_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_k		1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLOUL V

CALCULUL ARMONICILOR FUNCȚIUNILOR PARE

Y_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y_{p-k}	18	17	16	15	14	13	12	11	10	
S_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Scanned with OKEN Scanner

E

CALCULUL ARMONICE IMPARE A_n ÎN SIN TABLOUL PRODUSELOR DINTRE SUMELE DIFERENȚELOR $E_K = d_p + d_{p-K}$ şi $\sin K\frac{\pi}{p}$ $[K = 1 \text{ LA } K = \frac{p}{2}]$

	sin 90° 1	sin 80° 0.9848	sin 70° 0.9397	sin 60° 0.866	sin 50° 0.766	sin 40° 0.6428	sin 30° 0.500	sin 20° 0.342	sin 10° 0.1736	sin 0° 0	
	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										
	9										

M

CALCULUL ARMONICE IMPARE B_n ÎN COS TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENȚELE SUMELOR $M_K = S_K - S_{p-K}$ ȘI COS $K \frac{\pi}{p}$ $[K=0 \text{ LA } K=\frac{p}{2}]$

	cos 0° 1	cos 10° 0.9848	cos 20° 0,9397	cos 30° 0,866	cos 40° 0,766	cos 50° 0,6428	cos 60° 0,500	cos 70° 0,342	cos 80° 0.1736	cos 90° 0	
	0										
	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										
	9										

Scanned with OKEN Scanner

D

CALCULUL ARMONICE PARE A_n ÎN SIN
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE DIFERENȚELE DIFERENȚELOR $D_K = d_K - d_{p-K}$ ȘI $\sin K\frac{\pi}{p}$ $[K = 1$ LA $K = \frac{p}{2}]$

	sin 90° 1	sin 80° 0,9848	sin 70° 0,9397	sin 60° 0,866	sin 50° 0,766	sin 40° 0,6428	sin 30° 0,500	sin 20° 0,342	sin 10° 0,1736	sin 0° 0	
	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										
	9										

Scanned with OKEN Scanner

S

CALCULUL ARMONICE PARE B_n ÎN COS
TABLOUL PRODUSELOR DINTRE SUMELE SUMELOR $S_k = s_k + s_{p-k}$ ŞI $\cos k\frac{\pi}{p}$ $[k = 0$ LA $k = \frac{p}{2}]$

	cos 0° 1	cos 10° 0,9848	cos 20° 0,9397	cos 30° 0,866	cos 40° 0,766	cos 50° 0,6428	cos 60° 0,500	cos 70° 0,342	cos 80° 0,1736	cos 90° 0	
	0										
	1										
	2										
	3										
	4										
	5										
	6										
	7										
	8										
	9										

Tabel de corespondență pentru funcții imagină și original *)
(Transformarea Laplace)

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t > 0$
1	$aF(p)$	$af(t)$
	a — mărime constantă sau variabilă care nu depinde de t și p	
	$F_1(p) \pm F_2(p)$	$f_1(t) \pm f_2(t)$
2	$pF(p) - f(0+)$	$\frac{df(t)}{dt} \equiv f'(t)$
3	$pF(p)$	$f'(t)$ dacă $f(0+) = 0$
4	$\frac{F(p)}{p} + \frac{f^{(-1)}(0+)}{p}$	$\int f(t)dt \equiv f^{(-1)}(t)$
5	$\frac{F(p)}{p}$	$\int_0^t f(t)dt \equiv f^{(-1)}(t) - f^{(-1)}(0+)$
6	$aF(ap)$	$f\left(\frac{t}{a}\right)$
	a — mărime pozitivă constantă sau variabilă care nu depinde de t și p	
7	$F(p+a)$ $F(p-a)$	$e^{-at} f(t)$ $e^{at} f(t)$
	a — număr complex cu partea reală pozitivă	
8	$-\frac{d}{dp} F(p)$	$tf(t)$
9	$\int_p^\infty F(p)dp$	$\frac{1}{t} f(t)$
10	$\frac{A(p)}{B(p)}$ Fracție rațională regulată cu poli de ordinul I	$\sum_{k=1}^{a} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$

*) In aceste tabele e reprezintă baza logaritmilor neperieni.

Scanned with OKEN Scanner

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geqslant 1$
11	$\dfrac{A(p)}{B(p)}$ Idem, cu poli de ordine superioare	$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k} \dfrac{K_{kj}}{(m_k-j)} t^{m_k-j} e^{p_k t}$; $m_1+m_2+\dots+m_n = q$; $K_{kj} \equiv \dfrac{1}{(j-1)^2}\left[\dfrac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \dfrac{(p-p_k)^{m_k} A(p)}{B(p)}\right]_{p=p_k}$; $B(p) = (p-p)^{m_1}(p-p)^{m_2}\dots(p-p_k)^{m_k}\dots(p-p_n)^{m_n}$
12	1	$f'(t) \equiv \lim\limits_{a\to 0} \dfrac{1(t) - f(t-a)}{a}$ funţie de impuls de ordinul I pentru $t = 0$
13	$\dfrac{1}{p}$	1 sau $\mathbf{1}(t)$ salt unitar pentru $t = 0$
14	$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}
15	$\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
16	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t} - (a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
17	$\dfrac{1}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{\gamma e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma(\alpha-\gamma)}$
18	$\dfrac{p+a_0}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\gamma} + \dfrac{a_0-\alpha}{\alpha(\alpha-\gamma)} e^{-\alpha t} + \dfrac{a_0-\gamma}{\gamma(\gamma-\alpha)} e^{-\gamma t}$
19	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\gamma} + \dfrac{\alpha^2 - a_1\alpha + a_0}{\alpha(\alpha-\gamma)} e^{-\alpha t} - \dfrac{\gamma^2 - a_1\gamma + a_0}{\gamma(\alpha-\gamma)} e^{-\gamma t}$
20	$\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p+\delta)}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} + \dfrac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)} + \dfrac{e^{-\delta t}}{(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)}$
21	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p+\delta)}$	$\dfrac{a_0-\alpha}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} e^{-\alpha t} + \dfrac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)} e^{-\gamma t} + \dfrac{a_0-\delta}{(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)} e^{-\delta t}$

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geqslant 1$
22	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p+\alpha)\ (p+\gamma)\ (p+\delta)}$	$\dfrac{\alpha^2 - a_1 \alpha + a_0}{(\gamma-\alpha)\ (\delta-\alpha)} e^{-\alpha t} + \dfrac{\gamma^2 - a_1 \gamma + a_0}{(\alpha-\gamma)\ (\delta-\gamma)} e^{-\gamma t} +$ $+ \dfrac{\delta^2 - a_1 \delta + a_0}{(\alpha-\delta)\ (\gamma-\delta)} e^{-\delta t}$
23	$\dfrac{1}{p^2 + \beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \sin \beta t$
24	$\dfrac{1}{p^2 - \beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta t$
25	$\dfrac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\cos \beta t$
26	$\dfrac{p}{p^2 - \beta^2}$	$\operatorname{ch} \beta t$
27	$\dfrac{p + a_0}{p^2 + \beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \sqrt{a_0 + \beta^2} \sin (\beta t + \psi)$, unde $\psi \equiv \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\beta}{a_0}$
28	$\dfrac{1}{p\,(p^2 + \beta^2)}$	$\dfrac{1}{\beta^2}(1 - \cos \beta t)$
29	$\dfrac{p + a_0}{p\,(p^2 + \beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2} - \dfrac{1}{\beta^2} \sqrt{a_0^2 + \beta^2} \cos (\beta t + \psi)$, unde $\psi \equiv \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\beta}{a_0}$
30	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{p\,(p^2 + \beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2} - \dfrac{1}{\beta^2} \sqrt{(a_0 - \beta^2)^2 + a_1^2 \beta^2} \cos (\beta t + \psi)$, unde $\psi \equiv \operatorname{arc\,tg} \dfrac{a_1 \beta}{a_0 - \beta^2}$
31	$\dfrac{p}{(p^2 + \beta^2)\ (p^2 + \lambda^2)}$	$\dfrac{\cos \beta t - \cos \lambda t}{\lambda^2 - \beta^2}$
32	$\dfrac{p}{[p^2+(\beta+\lambda)^2]\ [p^2+(\beta-\lambda)^2]}$	$\dfrac{1}{2\lambda\beta} \sin \lambda t \cdot \sin \beta t$

Scanned with OKEN Scanner

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geqslant 1$
33	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$
34	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}\, e^{-\alpha t} \sin(\beta t+\psi)$, unde $\psi \equiv \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\beta}{a_0-\alpha}$
35	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$
36	$\dfrac{1}{p^2}$	t
37	$\dfrac{1}{p^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)} t^{n-1}$, unde n este un număr întreg pozitiv
38	$\dfrac{1}{(p+\alpha)\, p^2}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$
39	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)\, p^2}$	$\dfrac{a_0-\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha t}+\dfrac{a_0}{\alpha} t+\dfrac{\alpha-a_0}{\alpha^2}$
40	$\dfrac{p^2+a_1 p+a_0}{(p+\alpha)\, p^2}$	$\dfrac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\alpha^2} e^{-\alpha t}+\dfrac{a_0}{\alpha} t+\dfrac{a_1\alpha-a_0}{\alpha^2}$
41	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$t e^{-\alpha t}$
42	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)^2}$	$[(a_0-\alpha) t+1]\, e^{-\alpha t}$
43	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\alpha t}$, unde n este un număr întreg pozitiv
44	$\dfrac{p^n}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!\,(-\alpha)^k}{(n-k)!\,(k!)^2} t^k$, unde n este un număr întreg pozitiv
45	$\dfrac{1}{p\,(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{1-(t+\alpha t)\, e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
46	$\dfrac{p+a_0}{p\,(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2}+\left(\dfrac{\alpha-a_0}{\alpha} t-\dfrac{a_0}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha t}$

Scanned with OKEN Scanner

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geqslant 0$
47	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2} + \left(\dfrac{a_1\alpha - a_0 - \alpha^2}{\alpha} t + \dfrac{\alpha^2 - a_0}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha t}$
48	$\dfrac{1}{(p+\gamma)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)^2} e^{-\gamma t} + \dfrac{(\gamma-\alpha)t - 1}{(\gamma-\alpha)^2} e^{-\alpha t}$
49	$\dfrac{1}{(p^2+\beta^2)\, p^2}$	$\dfrac{1}{\beta^2} t - \dfrac{1}{\beta^3} \sin\beta t$
50	$\dfrac{1}{(p^2-\beta^2)\, p^2}$	$\dfrac{1}{\beta^3} \operatorname{sh} \beta t - \dfrac{1}{\beta^2} t$
51	$\dfrac{1}{(p^2+\beta^2) p^3}$	$\dfrac{1}{\beta^4} (\cos\beta t - 1) + \dfrac{1}{2\beta^2} t^2$
52	$\dfrac{1}{(p^2-\beta^2)\, p^3}$	$\dfrac{1}{\beta^4} (\operatorname{ch} \beta t - 1) - \dfrac{1}{2\beta^2} t^2$
53	$\dfrac{1}{(p^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta^3} (\sin\beta t - \beta t \cos\beta t)$
54	$\dfrac{p}{(p^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta} t \sin\beta t$
55	$\dfrac{p^2}{(p^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\beta} (\sin\beta t + \beta t \cos\beta t)$
56	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$	$t \cos\beta t$
57	$\dfrac{1}{p(p^2+\beta^2)^2}$	$\dfrac{1}{\beta^4} (1 - \cos\beta t) - \dfrac{1}{2\beta^3} t \sin\beta t$
58	$\dfrac{1}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$\dfrac{1}{2\beta^3} e^{-\alpha t} (\sin\beta t - \beta t \cos\beta t)$
59	$\dfrac{p+\alpha}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$\dfrac{1}{2\beta} t e^{-\alpha t} \sin\beta t$

Scanned with OKEN Scanner

Nr.	$F(p)$	$f(t)$ pentru $t \geqslant 1$
60	$\frac{(p+\alpha)^2-\beta^2}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^2}$	$te^{-\alpha t}\cos\beta t$
61	$\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{p}$	$\frac{\sin\beta t}{t}$
62	$\ln\frac{p+\beta}{p+\alpha}$	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{t}$

Am sosit!
Sunt la servici!
Rodica

Vin la 10

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. *Angol, A.*: Complemente de matematici. Paris 1949.
2. *Antoniu, I. S.*: Chestiuni speciale de electrotehnică. Bucureşti 1952.
3. *Antoniu, I. S.*: Introducere în aplicarea calculului matricial la studiul circuitelor electrice. Bucureşti, 1953.
4. *Aronson, G. S.*: Culegere de probleme privind bazele electrotehnicei. Moscova 1948.
5. *Atabecov, G. I.*: Protecţia prin relee a reţelelor de înaltă tensiune. Moscova 1949
6. *Budeanu, C. I.*: Puteri reactive şi fictive. Bucureşti 1927.
7. *Budeanu, C. I*: Câteva consideraţii asupra spaţiilor superioare. (Bul. de Mat. şi Fiz. a Sc. Politechnice din Bucureşti, VIII, 38, 1936—37).
8. *Contorovici, M. I.*: Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii în circuitele electrice. Moscova 1949.
9. *Costenco, M. P.*: Maşini electrice. Moscova, 1949.
10. *Crug, C. A.*: Bazele electrotechnicei. T. II. Teoria curenţilor alternativi. Moscova, 1946.
11. *Crug, C. A., Lomonosov, V. I., Perecalin, M. A., Polivanov, C. M.*: Culegere de probleme privind bazele teoretice ale electrotehnicei. Moscova, 1948.
12. *Ditchin, V.A.* şi *Cuznețov, P. I.*: Indreptar de calcul operaţional. Moscova, 1951.
13. *Fraenkel, A.*: Teoria curenţilor alternativi. Berlin, 1930.
14. *Gutenmaher, L. I.*: Modele electrice, Moscova, 1949.
15. *Ionchin, P. A., Pantiuşin, V. C., Smirnov, V. A.*: Culegere de probleme şi exerciţii de electrotehnică generală. Moscova, 1951.
16. *Janet, P.*: Probleme şi exerciţii de electricitate generală, Paris, 1921.
17. *Kron, G.*: Analiza tensorială a reţelelor electrice. New-York, 1939.
18. *Kron, G.*: Scurt curs de analiză tensorială pentru inginerii electricieni. New-York, 1942.
19. *Mansurov, N. N.* şi *Popov, V. C.*: Electrotehnica teoretică. Moscova, 1950.
20. *Neiman, L. P* şi *Calantarov, P. L.*: Bazele teoretice ale electrotehnicei. Leningrad, 1948.
21. *Perecalin, M. A.*: Circuite electrice. Moscova, 1950.
22. *Popescu, A. T.*: Curs de electrotehnică II (Chestiuni speciale). Partea I. Analiza armonică a funcţiunilor periodice nesinusoidale. Bucureşti, 1947.
23. *Teumin, I. I.*: Indreptar asupra fenomenelor tranzitorii în electricitate. Moscova, 1951.
24. *Ulianov, S. A.*: Scurtcircuite în reţelele electrice. Moscova, 1949.
25. *Wagner, C. F.* şi *Evans, R. D.*: Componentele simetrice, New-York, 1933.
26. *Zaițev, I. A.* şi *Lurie, A. G.*: Culegere de probleme privind bazele teoretice de electrotehnicei. Moscova 1952.

LISTA SIMBOLURILOR MAI DES UTILIZATE IN CULEGERE

a	operatorul de rotire al vectorilor cu 120°.
$a, b, c, \ldots$	mărimi reale
$A, B, \ldots, Y, Z$	mărimi reale.
$\overline{A}, \overline{B}, \ldots, \overline{Y}, \overline{Z}$	mărimi complexe (vectori).
$\lvert \overline{A} \rvert$	modulul unui vector
$\lVert A \rVert$	matrice
$\lvert A \rvert$	determinantul unei matrice
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	argumentul unui vector.
α	factor de formă
B	susceptanţă.
C	capacitate.
$\lVert C \rVert$	matricea de conexiune a reţelelor.
d (indice)	direct (componente simetrice).
D	putere deformantă.
δ	coeficient de atenuare (regim tranzitoriu).
δ	coeficient de distorsiune (regim deformant).
e	forţă electromotoare, valoare instantanee.
E	forţă electromotoare, valoare eficace.
ε, e	baza logaritmilor neperieni.
f	frecvenţă.
f_v	factor de vârf (unde nesinusoidale).
φ, ψ, θ,	unghi de fază.
G	conductanţă.
h (indice)	homopolar (componente simetrice).
i	curent, valoare instantanee.
i (indice)	inversă (componente simetrice).
I	curent, valoare eficace.
$j = \sqrt{-1}$	operatorul de rotire a vectorilor cu 90°.
k	ordinul unei armonice.
K	factor de putere.
L	inductanţă proprie.
$\mathfrak{L}$	simbolul funcţiei imagine
M	inductanţă mutuală.
ω	pulsaţia unui curent alternativ.
p	simbolul operaţional $\frac{d}{dt}$.
$\overline{p}$	simbolul $-\delta + j\Omega$.
p	pierderi de putere activă.
P	putere activă.
q	pierderi de putere reactivă.
Q	putere reactivă.
R	rezistenţa electrică n general.

ρ	factor reactiv.
s	alunecarea motorului asincron.
S	putere aparentă.
t, τ	timp.
T	perioadă.
τ	constantă de timp.
$\tilde{\tau}$	factor deformant.
u, v	tensiune, valoare instantanee.
U, V	tesiune, valoare eficace.
$\overline{V}$	vector.
V_c, $\overline{V}^*$	vector conjugat.
X	reactanţă în general.
X_L	reactanţă inductivă.
X_C	reactanţă capacitivă.
Y	admitanţă în general.
$\overline{Y}$	admitanţă, mărime complexă.
Y_d	reziduul deformant.
Y_{ef}	valoarea eficace a unei mărimi nesinusoidale.
Y_k	valoarea eficace a unei armonice de ordinul k.
Z	impedanţă în general.
$\overline{Z}$	impedanţă, mărime complexă.
$\mathfrak{Z}$	impedanţa de calcul (componente simetrice).
$\angle$	semnul argumentului une imărimi complexe

Redactor de carte: Ing. Eigeles S.
Tehnoredactor: Vasilescu C.
Corector: Păsărin Constanţa

Dat la cules 15.II.1954. Bun de tipar 15.III.1954. Hârtie semivelină 65 g/m², format 61×86/16. Coli editoriale 30, coli tipografice 27. Preţul unui exemplar cartonat 1/2 pânză lei 19,30. Comanda 807 A 339. Pentru bibliotecile mari indicile de clasificare zecimală 621.3.01. Pentru bibliotecile mici 621.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică 3
B-dul 6 Martie, Bucureşti R. P. R.

şi apoi :

$$\|Z'\| = \begin{array}{c|c|c|c|} & p & q & r \\ \hline p & 4{,}5 & -3{,}5 & 2 \\ \hline q & -3{,}5 & 3{,}5 & -2 \\ \hline r & 2 & -2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{şi} \quad \|e'\| = \begin{array}{c|c|} p & \\ \hline q & 100 \\ \hline r & 100 \\ \hline \end{array}$$

Din relaţia (123) se deduce :

$$\|i'\| = \begin{array}{c|c|} p & 100 \\ \hline q & 160 \\ \hline r & 55 \\ \hline \end{array} \quad \text{şi rezultă} \quad \|i\| = \begin{array}{c|c|} a & 100 \\ \hline b & 160 \\ \hline c & -55 \\ \hline d & 60 \\ \hline f & -5 \\ \hline g & 55 \\ \hline \end{array}$$

Puterea absorbită de circuit este :

$$P' = P = \begin{array}{|c|c|c|} p & q & r \\ \hline & 100 & 100 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{c|c|} p & 100 \\ \hline q & 160 \\ \hline r & 55 \\ \hline \end{array} = 21500 \text{ W}$$

care se repartizează : $P_b = 32000$ W şi $P_c = -10500$ W. Deci P_c este motor şi numai P_b este generator.

Scanned with OKEN Scanner

17.17. *a*) Reţeaua are trei curenţi independenţi care se iau în laturile *CA*, *AB*, *CB*. Matricea de conexiune este:

$\| C \| =$

	p	*q*	*r*
a		1	
b	—1	1	
c		1	1
d	1		
f			1

cu care se găseşte:

$\| Z' \| =$

	p	*q*	*r*
p	5	—3	
q	—3	6	1
r		1	9

şi $\| e' \| =$

p	$400 + j200$
q	
r	$200 - j200$

apoi:

$\| i' \| =$

p	$112 + j61$
q	$53{,}4 + j34{,}8$
r	$16{,}3 - j26{,}3$

şi $\| i \| =$

a	$53{,}4 + j34{,}8$
b	$-59 - j26{,}2$
c	$63{,}7 + j\ 8{,}5$
d	$112 + j61$
f	$16{,}3 - j26{,}3$

Scanned with OKEN Scanner

b) Puterea respectivă:

$$\overline{S} = \| e'_l \| \cdot \| i' \|^* = 65{,}52 \text{ kVA}.$$

care se repartizează:

$$\overline{S}_d = 57{,}0 - j\,2{,}0 \text{ kVA} \text{ și } \overline{S}_f = 8{,}52 + j\,2{,}0 \text{ kVA}$$

Puterea absorbită de rețea este reală deoarece rețeaua este formată numai din rezistențe ohmice. Puterea reactivă, produsă de un generator este absorbită de al doilea.

c)

$\| {}_l e \| =$ (V)

a	$106{,}8 + j\,69{,}6$
b	$-168 - j\,78{,}6$
c	$69{,}7 + j\,8{,}5$
d	$224 + j\,122$
f	$130{,}4 - j\,210{,}4$

V

17.18. Problema se rezolvă ca și precedenta. Se găsește:

a)

$\| i \| =$

a	$-26 - j\,34$
b	$-47 + j\,2$
c	$24 + j\,6$
d	$21 - j\,36$
f	$50 + j\,40$

;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\overline{S} = 27{,}95$ kW, care se repartizează ; $\overline{S}_d = 12{,}54 + j\,3{,}30$ kVA şi $\overline{S}_f = 15{,}4 - j\,3{,}30$ kVA.

c)

$\| e_l \| =$

a	$-26 - j\,34$
b	$-94 + j\,4$
c	$120 + j\,30$
d	$126 - j\,216$
f	$100 + j\,80$

17.19. a) Se iau cei trei curenţi independenţi pe laturile *CA*, *AB*, *CB*. Matricea de conexiune este :

$\| C \| =$

	p	*q*	*r*
a		1	
b	1	−1	
c		1	1
d	1		
f			1

Se găseşte cu ajutorul ei :

$\| e' \| =$

p	$100 + j\,0$
q	
r	$100 + j\,100$